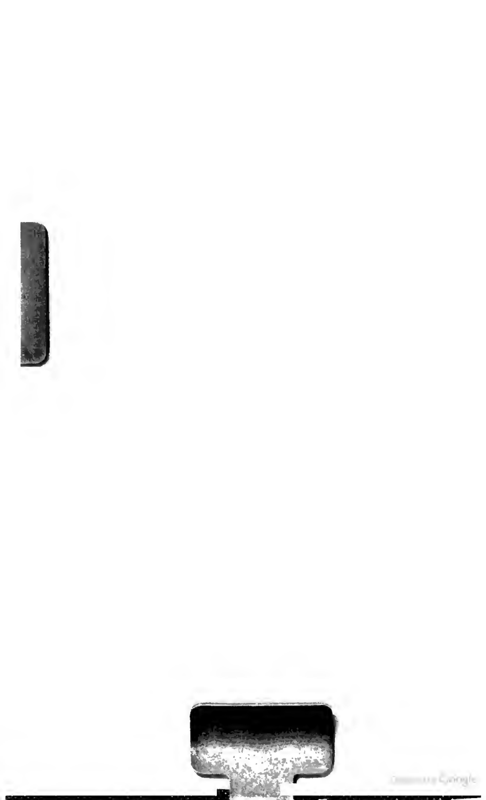




COURS

DE

TOPOGRAPHIE ET DE GÉODÉSIE.

Cosse et J. Dumaine, rue Christine, 2.

COURS

DE

TOPOGRAPHIE ET DE GÉODÉSIE

PAR

J.-F. SALNEUVE,

ANCIEN PROFESSEUR A L'ÉCOLE D'APPLICATION D'ÉTAT-MAJOR,
OFFICIER DE LA LÉGION D'HONNEUR, CHEVALIER DE SAINT-FERDINAND D'ESPAGNE,
CHEF D'ESCADRON D'ÉTAT-MAJOR EN RETRAITE,
DIRECTEUR DE L'ÉCOLE DES ARTS ET MÉTIERS DE CHALONS,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Troisième Édition, revue et augmentée

PAR

A. SALNEUVE,

CAPITAINE D'ÉTAT-MAJOR, PROFESSEUR A L'ÉCOLE D'APPLICATION,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.



PARIS,
LIBRAIRIE MILITAIRE,
J. DUMAINE, LIBRAIRE-ÉDITEUR DE L'EMPEREUR,
Rue et Passage Dauphine, 30.

1857

PRÉFACE

DE LA TROISIÈME ÉDITION.

Les deux premières éditions du *Cours de Topographie et de Géodésie* étant épuisées, je me suis d'autant plus volontiers décidé à en publier une nouvelle, que j'ai trouvé un puissant auxiliaire dans mon fils A. Salneuve, capitaine d'état-major et mon successeur dans les fonctions que j'ai remplies pendant vingt ans à l'École d'application.

Son zèle et son savoir me sont garants que cette édition l'emportera sur les précédentes, par le soin qu'il a mis à faire disparaître les quelques fautes typographiques qui ont pu m'échapper, et par les articles nouveaux qu'il y a introduits à la place de certains autres d'une utilité plus contestable.

Je suis donc heureux de pouvoir lui en témoigner ici toute ma satisfaction.

J.-F. SALNEUVE.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

Trigonométrie rectiligne et construction des tables de logarithmes.

CHAPITRE Ier.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

CHAPITRE X.

LIVRE II.

Trigonométrie sphérique. — Binôme de Newton. — Développements en séries.

CHAPITRE Ier.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

LIVRE III.

Topographie.

CHAPITRE Ier.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

CHAPITRE X.

CHAPITRE XI.

CHAPITRE XII.

CHAPITRE XIII.

CHAPITRE XIV.

CHAPITRE XV.

LIVRE IV.

Optique.

CHAPITRE Ier.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

LIVRE V.

Géodésie.

CHAPITRE Ier.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

CHAPITRE X.

CHAPITRE XI.

LIVRE VI.

Observations et calculs astronomiques.

CHAPITRE Ier.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

SUITE DE TABLEAUX

destinés

1° À L'INSCRIPTION DES ANGLES OBSERVÉS ET DES ÉLÉMENTS DE RÉDUCTION, AINSI QU'AUX DIFFÉRENTS CALCULS GÉODÉSIQUES ;

2° AUX CALCULS ASTRONOMIQUES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Page 50,	ligne 17,	descendant;	antésimales,	*lisez :* centésimales.
— 85,	— 8,	*idem ;*	$\tang.x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3.5} \cdots\cdots$	
			lisez : $\tang.x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2.x^5}{3.5} + \frac{17.x^7}{3.3.5.7} \cdots\cdots$	
— 263,	— 9,	*idem ;*	feut,	*lisez :* faut.
— 276,	— 4,	remontaut ;	485,	— 285.
— 296,	— 11,	descendant;	conditlons,	— couditions.
— 338,	— 4,	—	page 282,	— 338.
— 450,	— 15,	—	Flamsterd,	— Flamstead.
— 507,	— 18,	*ajoutez :*	L'angle A dn triangle serait la projection de 200 — z sur un plan infiniment rapproché; la formule de réduction à l'horizon appliquée à ce cas donnerait une correction complétement négligeable.	

COURS

DE

TOPOGRAPHIE ET DE GÉODÉSIE.

LIVRE PREMIER.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

CHAPITRE PREMIER.

DÉFINITION, PROPRIÉTÉS ET RELATIONS DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

1. Les lignes trigonométriques des arcs qui mesurent les angles jouissent de certaines propriétés qui les font employer avec avantage dans la résolution des triangles. Elles se combinent de manière à donner naissance à des formules dont quelques-unes se présentent fréquemment en trigonométrie sphérique, en géodésie et en astronomie.

2. Soit un arc AB, *fig.* 1. Nous rappelons seulement que la perpendiculaire BD, abaissée de l'une des extrémités de l'arc sur le rayon AC qui passe par l'autre extrémité, se nomme le *sinus;* que la portion CD de ce rayon est le *cosinus;* AE, la *tangente;* CE, la *sécante;* FG, la *cotangente*, et CG, la *cosécante*.

La résolution des problèmes de trigonométrie repose habituellement sur l'emploi des lignes ou rapports trigonométriques des angles, et non sur celui des éléments analogues des arcs qui les mesurent.

L'angle qui, dans le cercle dont le rayon est R, est mesuré par l'arc AB, a pour expression numérique $\frac{AB}{R}$, rapport constant qui définit complétement cet angle.

Mais, en même temps que ce rapport, il en existe d'autres également invariables avec l'angle. Tel est celui de BD à BC, rapport qu'on peut écrire

$$\frac{BD}{BC}=\frac{\sin.\ AB}{R}$$

et qu'on appelle sinus de l'angle dont la mesure est $\frac{AB}{R}$. On sera donc en droit d'écrire :

$$\text{sinus de l'angle } \frac{AB}{R}=\frac{\text{sinus de l'arc AB}}{R}$$

Ce que nous disons du sinus d'un angle se rapporte également à ses autres lignes trigonométriques, analogues à celles des arcs dont la définition a été donnée au commencement du paragraphe, en sorte qu'il sera toujours permis d'écrire :

Le rapport qui représente la ligne trigonométrique de l'angle $\frac{AB}{R}$ est égal au rapport de la même ligne trigonométrique de l'arc AB, au rayon R.

On a trouvé avantageux, dans beaucoup de circonstances, de substituer aux considérations d'angles celles de leurs lignes trigonométriques qui en sont des fonctions déterminées et dont les six formes distinctes offriront plus de ressources que la forme unique représentant l'angle lui-même.

Malheureusement, ces nouvelles fonctions, qui sont parfaitement précisées par l'angle, ne le précisent pas également bien, car, comme on le verra plus tard, si l'angle n'a qu'un sinus, par exemple, l'inverse n'a pas lieu ; en sorte que les conséquences que l'on tirera de certaines formules conduiront à d'autres conséquences non-seulement vraies pour les angles qui auront donné naissance au problème, mais encore pour d'autres angles, qui heureusement seront dans des rapports simples avec les premiers.

La recherche des propriétés des lignes trigonométriques exigeant l'emploi des figures, on comprend de suite qu'en vertu de la relation générale précédente, il suffira de rechercher ces propriétés relativement aux arcs et de remplacer dans l'équation finale qui en résultera la ligne trigonométrique de l'arc par celle

de l'angle multipliée par le rayon, résultat auquel on arrivera de suite en substituant une de ces lignes à l'autre et en faisant le rayon égal à l'unité.

3. La comparaison des trois triangles rectangles semblables BCD, ECA, FCG, *fig.* 1, fournit les relations suivantes :

$$(1)\ \text{tang.} = \frac{\text{R. sin.}}{\text{cosin.}} \qquad (2)\ \text{cotang.} = \frac{\text{R cosin.}}{\text{sin.}} \qquad (3)\ \text{sécante} = \frac{\text{R}^2}{\text{cosin.}}$$

$$(4)\ \text{cosécante} = \frac{\text{R}^2}{\text{sin.}} \qquad (5)\ \text{R}^2 = \overline{\text{sin.}}^2 + \overline{\text{cosin.}}^2$$

On a ainsi cinq équations entre six inconnues, et l'on peut dire que la connaissance de l'une d'elles suffit pour entraîner celle des cinq autres. Remarquons pourtant que la résolution de la dernière donnera le double signe $\pm$ qui, transporté dans les autres équations, conduira à deux systèmes de valeurs convenables, pour certaines des lignes trigonométriques inconnues, et qui donnera par suite deux valeurs pour l'angle correspondant. Ainsi se trouve vérifiée la remarque faite dans le paragraphe précédent, remarque qui, jointe à celle du § 8, fera comprendre que la connaissance d'un angle par une de ses lignes laisse une indétermination qui ne pourra cesser, dans chaque cas, que par l'examen des considérations particulières au problème qu'on aura en vue de résoudre.

L'examen des deux triangles ACE, FCG, conduit aux trois nouvelles formules :

$$\overline{\text{sec.}}^2 = \text{R}^2 + \overline{\text{tang.}}^2,\ \overline{\text{coséc.}}^2 = \text{R}^2 + \overline{\text{cotang.}}^2,\quad \text{cotang.} = \frac{\text{R}^2}{\text{tang.}}$$

Il semblerait donc exister huit équations entre les six lignes trigonométriques d'un même arc, ce qu'il est impossible d'admettre, car, après avoir éliminé ces six inconnues, il resterait deux équations de condition qui, ne pouvant renfermer que la seule variable R et devant être satisfaites, quel que soit le rayon, devraient se réduire à des identités. Il est donc évident *à priori* que quelques-unes de ces équations doivent rentrer les unes dans les autres. Les trois dernières sont dans ce cas.

En effet, l'équation $\overline{\text{sec.}}^2 = \text{R}^2 + \overline{\text{tang.}}^2$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\text{R}^4}{\overline{\text{cosin.}}^2} = \text{R}^2 + \frac{\text{R}^2.\overline{\text{sin.}}^2}{\overline{\text{cosin.}}^2},$$

puis, en multipliant par $\frac{\overline{\text{cosin.}}^2}{\text{R}^2}$, elle devient $\text{R}^2 = \overline{\text{sin.}}^2 + \overline{\text{cosin.}}^2$

De même, $\overline{\text{coséc.}}^2 = R^2 + \overline{\text{cotang.}}^2$ peut passer successivement par les deux formes

$$\frac{R^4}{\overline{\text{sin.}}^2} = R^2 + \frac{R^2 . \overline{\text{cosin.}}^2}{\overline{\text{sin.}}^2} \text{ et } R^2 = \overline{\text{sin.}}^2 + \overline{\text{cosin.}}^2$$

Enfin, la troisième $\text{cotang.} = \frac{R^2}{\text{tang.}}$ n'est que le résultat de la combinaison des équations (1) et (2).

4. Des limites de grandeur des sinus et cosinus et de la règle des signes adoptée pour eux on conclut au moyen de (1), (2), (3), (4), les signes et dimensions des autres lignes trigonométriques correspondant à toutes les valeurs que peut prendre un arc.

Les sinus sont positifs de 0^g à 200^g et négatifs de 200^g à 400^g.

Les cosinus positifs de 0^g à 100^g sont négatifs de 100^g à 300^g, puis positifs de 300^g à 400^g.

Au moyen de (1) et (2), on voit que

Tangente et cotangente $\begin{cases} > o \text{ de } 0^g \text{ à } 100^g \text{ et de } 200^g \text{ à } 300^g. \\ < o \text{ de } 100^g \text{ à } 200^g \text{ et de } 300^g \text{ à } 400^g. \end{cases}$

Les formules (3) et (4) indiquent que la sécante est toujours du même signe que le cosinus, tandis que la cosécante prend celui du sinus.

5. Le sinus et le cosinus ne peuvent varier en longueur que de zéro au rayon : il en résulte qu'en désignant l'arc par A, on a

$A = 0^g$	$A < 100.$	$A = 100.$	$A < 200.$	$A = 200.$	$A < 300.$	$A = 300.$	$A < 400.$
sin. $= 0$	sin. $< R$	sin. $= R$	sin. > 0	sin. $= 0$	sin. < 0	sin. $= -R$	sin. < 0
cosin. $= R$	cosin. $< R$	cos. $= 0$	cosin. < 0	cos. $= -R$	cosin. < 0	cosin. $= 0$	cos. > 0
tang. $= 0$	tang. > 0	tang. $= \infty$	tang. < 0	tang. $= 0$	tang. > 0	tang. $= \infty$	tang. < 0
cot. $= \infty$	cot. > 0	cot. $= 0$	cot. < 0	cot. $= \infty$	cot. > 0	cot. $= 0$	cot. < 0
séc. $= R$	séc. > 0	séc. $= \infty$	séc. < 0	séc. $= -R$	séc. < 0	séc. $= \infty$	séc. > 0
coséc. $= \infty$	coséc. > 0	coséc. $= 0$	coséc. > 0	coséc. $= \infty$	coséc. < 0	coséc. $= -R$	coséc. < 0

6. Les tables de logarithmes des sinus, cosinus, etc., n'ayant été calculées que jusqu'à 100^g, il est nécessaire de voir quelles relations existent entre les lignes trigonométriques des arcs plus petits que 100^g, et de ceux qui sont compris entre 100 et 400^g.

L'inspection seule d'une figure apprend que, pris d'une manière absolue, les sinus et cosinus de 100, 200, 300 grades plus un arc A, sont égaux, soit au sinus, soit au cosinus de A, et qu'en tenant compte de la règle des signes indiquée plus haut,

$\sin. 100^g + A = + \cos. A.$	$\sin. 200 + A = - \sin. A$	$\sin. 300 + A = - \cos. A$
$\text{cosin}. 100 + A = - \sin. A.$	$\text{cosin}. 200 + A = - \cos. A$	$\text{cosin}. 300 + A = \sin. A$

On trouve ensuite facilement, en combinant ces valeurs avec les équat. (1) (2) (3) (4),

$\text{tang}.(100 + A) = - \text{cotang}. A$	$\text{tang}. (200 + A) = + \text{tang}. A$	$\text{tang}. (300 + A) = - \cot. A$
$\text{cotang}. (100 + A) = - \text{tang}. A$	$\text{cotang}. (200 + A) = + \cot. A$	$\text{cotang}. (300 + A) = - \text{tang}. A$
$\text{séc}. (100 + A) = - \text{coséc}. A$	$\text{séc}. (200 + A) = - \text{séc}. A$	$\text{séc}. (300 + A) = - \text{coséc}. A$
$\text{coséc}. (100 + A) = \text{séc}. A.$	$\text{coséc}. (200 + A) = - \text{coséc}. A$	$\text{coséc}. (300 + A) = - \text{séc}. A$

Voici un moyen mnémonique qui pourrait servir encore à éviter les erreurs dans la transformation des sinus et cosinus d'arcs plus grands que 100^g.

On écrit :

$$+ \text{sinus}, + \text{cosinus}, - \text{sinus}, - \text{cosinus}, + \text{sinus}.$$

Puis ensuite, si parmi ces cinq figures on supprime la dernière, les quatre autres représenteront les sinus de A (plus petit que 100^g), de $100^g + A$, $200^g + A$ et $300_g + A$.

Si, au contraire, c'est la première figure que l'on retranche, les quatre suivantes seront précisément les cosinus de A, $100^g + A$, $200^g + A$ et $300^g + A$.

7. Les sinus de deux arcs égaux et de signes contraires sont aussi égaux et de signes contraires : c'est-à-dire que

$$\sin. (-A) = - \sin. A.$$

Les cosinus, dans ce même cas, sont égaux et de même signe : ainsi $\textit{cosin}. (-A) = + \textit{cos}. A$. Substituant ces valeurs de sinus et cosinus d'arc négatif dans (1), (2), (3), (4), on obtient :

$$\text{tang}. (-A) = - \text{tang}. A ; \cot. (-A) = - \cot. A ; \text{séc}. (-A) = + \text{séc}. A ;$$
$$\text{coséc}. (-A) = - \text{coséc}. A.$$

8. Il est facile de voir qu'en ajoutant un certain nombre de circonférences à un arc, ou en les retranchant, les lignes trigonométriques restent les mêmes.

9. Il convient de placer encore ici, avant de passer outre, deux

formules qui donnent le sinus et le cosinus en fonction de la tangente ou de la cotangente.

En combinant $\text{coséc.} = \frac{R^2}{\text{sin.}}$ et $\overline{\text{coséc.}}^2 = R^2 + \overline{\text{cotang.}}^2$ on a

$$\text{sin.} = \sqrt{\frac{R^4}{R^2 + \overline{\text{cot.}}^2}} = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + \frac{R^4}{\overline{\text{tang.}}^2}}} \text{ d'où sinus} = \frac{R.\,\text{tang.}}{\sqrt{R^2 + \overline{\text{tang.}}^2}}$$

De même,

$\text{séc.} = \frac{R^2}{\text{cosin.}}$ et $\overline{\text{séc.}}^2 = R^2 + \overline{\text{tang.}}^2$ combinés ensemble conduisent

à $\text{cosin.} = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + \overline{\text{tang.}}^2}}$

Si l'on avait voulu que cette valeur de cosinus fût exprimée en fonction de la cotangente, on aurait remplacé $\overline{\text{tang.}}^2$ par $\frac{R^4}{\overline{\text{cotang.}}^2}$

ce qui eût produit $\text{cosin.} = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + \frac{R^4}{\overline{\text{cot.}}^2}}} = \frac{R.\,\text{cotang.}}{\sqrt{R^2 + \overline{\text{cotang.}}^2}}$.

CHAPITRE II.

RELATIONS ENTRE LES SINUS ET COSINUS DE DEUX ARCS, ET CEUX DE LEUR SOMME OU DE LEUR DIFFÉRENCE.

10. Soient deux arcs A et B représentés, *fig.* 2, par DE, EF; portons EG = EF, de sorte que DF = A + B, DG = A — B; menons les lignes EH = sin. A, FI = sin. (A + B), GN = sin. (A—B), GF = GK + FK = 2. sin. B, KO perpendiculaire à CD, et enfin KL, GM parallèles à cette même ligne.

Cherchons d'abord le sinus de la somme

$$\text{sin.}\,(A+B) = FI = FL + IL.$$

LI est égal à KO comme parallèles comprises entre parallèles : les triangles ECH, KCO semblables fournissent la proportion EC : EH : : CK : KO

d'où $$KO = \frac{EH.CK}{EC} = \frac{\text{sin. A} \times \text{cosin. B.}}{R}$$

On trouve encore, en comparant les triangles FKL, ECH, sem-

blables comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires, EC : CH :: FK : FL

$$FL = \frac{CH \times FK}{EC} = \frac{\sin. B \times \text{cosin}. A}{R}$$

d'où enfin

$$KO + FL = IL + FL = \sin. (A + B) = \frac{\sin. A. \text{cosin}. B + \sin. B. \text{cosin}. A}{R}$$

Le sinus de la différence ou GN est égal à KO—KM, et parce que KM=FL, il résulte que

$$\sin. (A - B) = \frac{\sin. A \times \text{cosin}. B - \sin. B \times \text{cosin}\ A.}{R}$$

Cette formule peut d'ailleurs se déduire de la précédente sans le secours de la figure et au moyen de la règle des signes, puisqu'en y changeant l'arc $+B$ en $-B$, il faut substituer $-\sin. B$ à $+\sin. B$.

Le cosinus de la somme des deux arcs est

$$CI = CO - IO = CO - KL.$$

Des triangles semblables, qui nous ont servi plus haut, nous tirons

$$CE : CH :: CK : CO = \frac{CH \times CK}{CE} = \frac{\cos. A \times \cos. B}{R},$$

$$CE : EA :: FK : KL = \frac{EH \times FR}{CE} = \frac{\sin. A \times \sin. B}{R},$$

d'où $$\text{cosin}. (A + B) = \frac{\text{cosin}. A. \times \text{cosin}. B - \sin\ A \times \sin. B}{R}.$$

Il n'y aurait que le signe du second terme à changer pour que le second membre fût l'expression de la différence, puisque

$$\text{cosin}. (A - B) = CN = CO + NO = CO + CL.$$

11. Les quatre formules fondamentales de trigonométrie

$$\sin. (A \pm B) = \frac{\sin. A \times \text{cosin}. B \pm \sin. B. \text{cosin}. A}{R} \quad (6) \text{ et } (7)$$

$$\cos. (A \pm B) = \frac{\cos. A \times \text{cosin}. B \mp \sin. A \times \sin. B}{R} \quad (8) \text{ et } (9),$$

viennent d'être démontrées pour les cas où $A + B < 100^g$ et $A > B$.

Il faut les généraliser et faire voir qu'elles ont encore lieu quand A et B sont quelconques,

1° Si $B > A$, on aura $\sin.(A - B) = -\sin.(B - A)$, ou

$$\sin.(A-B) = -\frac{\sin B.\cos.A - \sin.A \times \cos.B}{R} = \frac{\sin.A \times \cos.B - \sin.B \times \cos.A}{R}$$

Quant au cosinus, il est évidemment le même, puisque, § 7, les cosinus d'arcs égaux et de signes contraires sont égaux et de même signe;

2° Il peut arriver que $50^g < A < 100^g$, $B < 50^g$ et $A + B > 100^g$.

Désignons par α la différence de A à 100^g ou son complément, nous aurons $\sin.A = \cos.\alpha$ et $\cos in.A = \sin.\alpha$.

$$\sin.(A+B) = \sin.(100^g - \alpha + B) = [100 - (\alpha - B)] = \cos.(\alpha - B)$$

B et α étant chacun plus petit que 50^g, le développement de cosin. $(B - \alpha)$ nous est connu : il vient donc

$$\sin.(A+B) = \frac{\cos.B \times \cos\alpha + \sin.B \times \sin.\alpha}{R} = \frac{\sin.A \times \cos B + \sin.B \times \cos.A}{R}.$$

Nous aurons de même

$$\cos.(A+B) = \cos.(100^g - \alpha + B) = \cos.[100 - (\alpha - B)] = \sin.(\alpha - B),$$

donc

$$\cos.(A+B) = \frac{\sin.\alpha\cos.B - \sin.B\cos.\alpha}{R} = \frac{\cos.A \times \cos.B - \sin.A \times \sin.B}{R};$$

3° Supposons que A et B soient l'un et l'autre plus grands que 50^g et plus petits que 100^g. Faisant $B = 100 - \beta$, nous aurons :

$$\sin.A = \cos.\alpha;\ \cos.A = \sin.\alpha;\ \sin.B = \cos.\beta;\ \cos.B = \sin.\beta.$$

$$\sin.(A+B) = \sin.[200 - (\alpha + \beta)] = \sin.(\alpha + \beta) = \frac{\sin.\alpha \times \cos.\beta + \sin.\beta \times \cos.\alpha}{R},$$

ce qui revient à $\sin.(A+B) = \frac{\sin.B \times \cos.A + \sin A. \times \cos.B}{R}$

$$\cos.(A+B) = \cos.[200 - (\alpha + \beta)] = -\cos.(\alpha + \beta) = -\frac{\cos.\alpha \times \cos.\beta - \sin.\alpha \times \sin.\beta}{R}$$

et finalement $\cos.(A+B) = \frac{\cos.A \times \cos.B. - \sin.A \times \sin.B}{R}$.

Plus A et B augmentent, plus α et β diminuent, et la formule

est encore vraie, lorsque A et B atteignent 100_g chacun. Parvenus à cette limite, les cosinus de α et β égalent le rayon et les sinus sont nuls, ce qui réduit les formules à

$$\sin.200^g = o \quad \cos in.200^g = \frac{-R^2}{R} = -R.$$

On aurait pu voir encore que, si A et B sont précisément égaux à 50^g chacun,

$$\sin.(A+B) = \sin.100^g = \frac{\sin.^2 50^g + \cos.^2 50^g}{R} = \frac{R^2}{R} = R;$$

$$\cos.(A+B) = \cos.100^g = \frac{\cos.^2 50^g - \sin.^2 50^g}{R} = o,$$

par la raison que $\sin.^2 50^g + \cos.^2 50^g = R^2$, et que $\sin.50^g = \cos.50^g$;

4° Il nous reste à faire voir que les formules conviennent encore, quelles que soient les valeurs de A et B.

Ces arcs peuvent être égaux à un certain nombre de quadrans plus un arc plus petit que 100^g. On peut avoir $A = mq + \alpha$, $B = nq + \beta$: m et n affecteront l'une des formes suivantes :

$$m = \begin{cases} 4rq \\ (4r+1)q \\ (4r+2)q \\ (4r+3)q \end{cases} \qquad n = \begin{cases} 4sq \\ (4s+1)q \\ (4s+2)q \\ (4s+3)q \end{cases}$$

d'où

$$A = \begin{Bmatrix} 4rq \\ (4r+1)q \\ (4r+2)q \\ (4r+3)q \end{Bmatrix} + \alpha \qquad B = \begin{Bmatrix} 4sq \\ (4s+1)q \\ (4s+2)q \\ (4s+3)q \end{Bmatrix} + \beta$$

Il est inutile de s'occuper de la combinaison $A = 4rq + \alpha$, $B = 4sq + \beta$, puisque les lignes trigonométriques restent les mêmes; quant aux arcs, on ajoute un certain nombre de circonférences entières.

Si $A = (4r+1)q + \alpha$ et $B = (4s+1)q + \beta$, il résulte que

$$\sin.A = \sin.(1q + \alpha) = \cos.\alpha; \quad \cos.A = \cos.(1q + \alpha) = -\sin.\alpha;$$

$$\sin.B = \cos.\beta \text{ et } \cos.B = -\sin.\beta$$

$$\sin.(A+B) = \sin.[200^g + (\alpha+\beta)] = -\sin.(\alpha+\beta) =$$

$$\frac{\sin.\alpha \times \cos.\beta + \sin.\beta \times \cos.\alpha}{R}$$

$$\sin.(A+B) = -\frac{\cos.A \times \sin.B - \sin.A}{R} = \frac{\sin.A \times \cos B + \sin.B \times \cos.A}{R}$$

de même $\cos.(A+B)=\cos.[200+(\alpha+\beta)]=-\cos(\alpha+\beta)$

$$-\frac{\cos.\alpha\times\cos.\beta-\sin.\alpha\times\sin.\beta}{R}=-\frac{\sin.A\sin.A-\cos.B\cos.B}{R}$$

et enfin $\cos.(A+B)=\frac{\cos.A\times\cos.B-\sin.A\times\sin.B}{R}$

En combinant de la même manière les autres valeurs que peuvent prendre A et B, on arriverait toujours aux formules générales.

CHAPITRE III.

TRANSFORMATIONS DIVERSES DE CES FORMULES.

12. Nous allons les combiner par voie d'addition, soustraction, multiplication et division. D'abord, en les ajoutant et retranchant successivement, on obtient :

$$\sin.(A+B)+\sin.(A-B)=2.\sin.A\times\cos.B. \quad (10)$$
$$\sin.(A+B)-\sin.(A-B)=2.\sin.B\times\cos.A \quad (11)$$
$$\cos.(A+B)+\cos.(A-B)=2.\cos.A\times\cos.B. \quad (12)$$
$$\cos.(A-B)-\cos.(A+B)=2.\sin.A.\times\sin.B \quad (13)$$

On n'effectue pas les autres combinaisons que fourniraient encore les quatre formules générales, parce qu'elles n'offriraient que des expressions composées de quatre termes, et qu'il n'y aurait aucun parti à en tirer comme on le fait de (10), (11), (12), (13).

Faisant $A+B=p$, $A-B=q$: d'où $A=\frac{1}{2}(p+q)$, $B=\frac{1}{2}(p-q)$

$$\sin.p+\sin.q=2\sin.\tfrac{1}{2}(p+q)\cos.\tfrac{1}{2}(p-q) \quad (14)$$
$$\sin.p-\sin.q=2.\sin.\tfrac{1}{2}(p-q)\cos.\tfrac{1}{2}(p+q) \quad (15)$$
$$\cos.p+\cos.q=2.\cos.\tfrac{1}{2}(p+q)\cos.\tfrac{1}{2}(p-q) \quad (16)$$
$$\cos.q-\cos.p=2.\sin.\tfrac{1}{2}(p+q)\sin.\tfrac{1}{2}(p-q) \quad (17)$$

Ces quatre dernières s'emploient souvent pour remplacer des sommes ou différences de sinus ou cosinus par des expressions composées de facteurs seulement, et faciliter ainsi les calculs par l'emploi des logarithmes.

13. Multiplions (6) par (7) et (8) par (9), en nous rappelant que

$$R^2 = \overline{\sin.}^2 + \overline{\cos.}^2 \qquad \sin.(A+B)\sin.(A-B) =$$

$$\frac{\overline{\sin.}^2 A\ \overline{\cos.}^2 B - \sin.^2 B \times \cos.^2 A}{R^2} = \frac{\sin.A\ (R^2 - \overline{\sin.}^2 B) - \sin.^2 B\ (R^2 - \sin.^2 A)}{R^2} =$$

$$= \overline{\sin}^2 A - \overline{\sin.}^2 B \text{ ou } \sin.(A+B)\sin.(A-B) =$$

$$\frac{\overline{\cos.}^2 B\ (R^2 - \overline{\cos.}^2 A) - \cos.^2 A\ (R^2 - \cos.^2 B)}{R^2} = \overline{\cos.}^2 B - \overline{\cos.}^2 A$$

$$\cos.(A+B)\cos.(A-B) = \frac{\overline{\cos.}^2 A \times \overline{\cos.}^2 B - \overline{\sin.}^2 A \times \overline{\sin.}^2 B}{R^2} =$$

$$\frac{(R^2 - \overline{\sin.}^2 A)(R^2 - \overline{\sin.}^2 B) - \overline{\sin.}^2 A \times \overline{\sin.}^2 B}{R^2}$$

$$= R^2 - (\overline{\sin.}^2 A + \overline{\sin.}^2 B) = \overline{\cos.}^2 A - \overline{\sin.}^2 B = \overline{\cos.}^2 B - \overline{\sin.}^2 A$$

En résumé

$$\sin.(A+B)\sin.(A-B) = \overline{\sin.}^2 A - \overline{\sin.}^2 B = \overline{\cos.}^2 B - \overline{\cos.}^2 A \qquad (18)$$

$$\cos.(A+B)\cos.(A-B) = \overline{\cos.}^2 A - \overline{\sin.}^2 B = \overline{\cos.}^2 B - \overline{\sin.}^2 A \qquad (19)$$

Ces formules peuvent servir à remplacer des différences de sinus et cosinus carrés par des produits. Les autres combinaisons analogues que l'on pourrait déduire de (6), (7), (8), (9), ne donneraient pas naissance à des expressions assez simples pour qu'on en pût faire usage.

14. Si l'on divise (6) par (7), puis le numérateur et le dénominateur par cos. A × cos. B. ou sin. A × sin. B, il vient

$$\frac{\sin.(A+B)}{\sin.(A-B)} = \frac{\sin.A \times \cos.B + \sin B \times \cos.A}{\sin.A \times \cos.B - \sin.B \times \cos.A} = \frac{\text{tang}.A + \text{tang}.B}{\text{tang}.A - \text{tang}.B}$$

$$\frac{\text{cotang}.B + \text{cotang}.A}{\text{cotang}.B - \text{cotang}.A}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

$$(8) \text{ par } (9)\ \frac{\cos.(A+B)}{\cos.(A-B)} = \frac{\cos.A \times \cos.B - \sin.A \sin.B}{\cos.A \times \cos.B + \sin.A \times \sin.B} = \frac{1 - \text{tang}.A \times \text{tang}\,B}{1 + \text{tang}.A \times \text{tang}.B}$$

$$= \frac{\cot.A \times \cot.B - 1}{\cot.A \times \cot.B + 1} \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

(6) par (8) $\text{tang.}(A+B)=\frac{\sin.A\times\cos.B+\sin.B\times\cos.A}{\cos.A\times\cos.B-\sin.A\times\sin.B}=\frac{\text{tang.}A+\text{tang.}B}{1-\text{tang.}A\times\text{tang.}B}$

$$=\frac{\cot.B+\cot.A}{\cot.A\times\cot.B-1}. \quad (22)$$

(7) par (9) $\text{tang.}(A-B)=\frac{\sin.A\times\cos B-\sin.B\times\cos.A}{\cos.A\cos.B+\sin.A\times\sin.B}=\frac{\text{tang.}A-\text{tang.}B}{1+\text{tang.}A\times\text{tang.}B}$

$$=\frac{\cot.B-\cot.A}{\cot.A\times\cot.B+1}. \quad (23)$$

(6) par (9) $\frac{\sin.(A+B)}{\cos.(A-B)}=\frac{\text{tang.}A+\text{tang.}B}{1+\text{tang.}A.\ \text{tang.}B}=\frac{\cot.B+\cot.A}{\cot.B\times\cot.A+1}$. (24)

(7) par (8) $\frac{\sin.(A-B)}{\cos.(A+B)}=\frac{\text{tang.}A-\text{tang.}B}{1-\text{tang.}A\times\text{tang.}B}=\frac{\cot.B-\cot.A}{\cot.B\times\cot.A-1}$. (25)

15. Si l'on divise les formules (14) (15), (16) et (17) les unes par les autres, on trouve :

$$\frac{\sin.p+\sin.q}{\sin.p-\sin.q}=\frac{\sin.\frac{1}{2}(p+q)\cos.\frac{1}{2}(p-q)}{\cos.\frac{1}{2}(p+q)\sin.\frac{1}{2}(p-q)}=\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(p+q)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(p-q)}. \quad (26)$$

$$\frac{\sin.p+\sin.q}{\cos.p+\cos.q}=\frac{\sin.\frac{1}{2}(p+q)\cos.\frac{1}{2}(p-q)}{\cos.\frac{1}{2}(p+q)\cos.\frac{1}{2}(p-q)}=\frac{\text{tang}\ \frac{1}{2}(p+q)}{R}. \quad (27)$$

$$\frac{\sin p+\sin.q}{\cos.p-\cos.q}=\frac{\sin.\frac{1}{2}(p+q)\cos.\frac{1}{2}(p-q)}{\sin\ \frac{1}{2}(p+q)\sin.\frac{1}{2}(p-q)}=\frac{\cot.\frac{1}{2}(p-q)}{R}. \quad (28)$$

$$\frac{\sin.p-\sin.q}{\cos.p+\cos.q}=\frac{\sin.\frac{1}{2}(p-q)\cos.\frac{1}{2}(p+q)}{\cos.\frac{1}{2}(p+q)\cos.\frac{1}{2}(p-q)}=\frac{\text{tang}\ \frac{1}{2}(p-q)}{R}. \quad (29)$$

$$\frac{\sin.p-\sin q}{\cos.p-\cos.q}=-\frac{\sin.\frac{1}{2}(p-q)\cos.\frac{1}{2}(p+q)}{\sin.\frac{1}{2}(p+q)\sin.\frac{1}{2}(p-q)}=-\frac{\cot.\frac{1}{2}(p+q)}{R}. \quad (30)$$

$$\frac{\cos p+\cos.q}{\cos.p-\cos.q}=-\frac{\cos\ \frac{1}{2}(p+q)\cos.\frac{1}{2}(p-q)}{\sin.\frac{1}{2}(p+q)\sin.\frac{1}{2}(p-q)}=-\frac{\cot.\frac{1}{2}(p+q)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(p-q)}. \quad (31)$$

Ces différentes formules peuvent se démontrer directement et synthétiquement.

Soient MP $=$ A, MN $=$ B, *fig.* 2 *bis :* prenons MQ $=$ MP $=$ A ; il en résulte, en traçant l'horizontale NO, que sin. A $+$ sin. B $=$ SQ et sin. A $-$ sin. B $=$ SP. Joignons les points P et Q à O, et nous formerons ainsi NOQ $=\frac{1}{2}$ (A $+$ B), NOP $=\frac{1}{2}$ (A $-$ B) : car ces angles ont leurs sommets sur la circonférence et embrassent entre

leurs côtés les arcs A + B, A — B. Cela posé, du point O comme centre, et avec le même rayon R qui a servi à décrire PNMP, décrivons un arc de cercle, puis traçons la tangente au point T ; elle rencontrera les deux cordes OP, OQ en deux points U et V tels qu'évidemment l'on aura :

$$TU = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B) \quad TV = \text{tang}\ \tfrac{1}{2}(A-B)$$

Mais dans les triangles semblables OPQ, OVU, la droite ON partage les deux côtés parallèles PQ, UV en parties proportionnelles.

donc $\frac{QS}{PS} = \frac{UT}{VT}$ c'est-à-dire $\frac{\sin.A + \sin.B}{\sin.A - \sin.B} = \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(A-B)}$. . . . (26)

La même figure 2 *bis* servira encore à trouver la formule (27) : car les triangles semblables OTU, OSQ, donneront entre leurs côtés la relation,

TU : OT :: SQ : SO, c'est-à-dire $\text{tang.}\frac{1}{2}(A+B) : R :: \sin.A + \sin.B : SO.$

Pour voir ce que représente ce 4e terme, menons du centre CJ perpendiculaire à NO, nous aurons

$$JO = NJ = \cos.B \quad \text{et} \quad SJ = \cos.A$$

Or $SO = SJ + JO$, donc enfin $\frac{\sin.A + \sin.B}{\cos.A + \cos.B} = \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(A+B)}{R}$. . . (27)

Au moyen de considérations analogues, on retrouverait également les quatre formules suivantes (28), (29), (30), (31).

16. Jusqu'à présent, nous avons laissé le rayon en évidence, en le supposant quelconque. Généralement, pour plus de simplicité, on le fait égal à l'unité. Prenons deux arcs concentriques et de même amplitude AD, $\alpha\delta$, *fig.* 3 : les triangles semblables CDE, $C\delta\epsilon$, nous donneront :

$$\frac{\sin.AD}{AC} = \frac{\sin.\alpha\delta}{\alpha C}$$

et si nous supposons $\alpha C = 1$, AC étant quelconque, nous aurons $\sin.\alpha\delta = \frac{\sin.AD}{AC}$: ce qui indique que, dans les formules où le rayon a été supposé égal à l'unité, les lignes trigonométriques qui y entrent représentent le rapport qui existe entre les sinus, cosinus, etc., relatifs à un certain rayon et ce même rayon, ou, comme nous l'avons expliqué au § 2, les sinus, cosinus, etc., des angles.

CHAPITRE IV.

RELATIONS ENTRE LES SINUS ET COSINUS DES ANGLES SIMPLES ET MULTIPLES.

17. Reprenons les formules fondamentales (6) et (8) : elles deviennent, en y faisant $A = B$ et le rayon égal à l'unité :

$$\sin.2\,A = 2\sin.A \times \cos.A. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

$$\cos.2\,A = \cos.^2 A - \sin.^2 A. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Pour trouver ces relations géométriquement, prenons un arc $MR = 2A$, *fig. 2 ter;* MN sera son sinus. En joignant M. à l'extrémité Q du diamètre qui passe par R, nous formerons l'angle $MQR = A$, car il est moitié de MCR. Du point Q comme centre et d'un rayon CQ, décrivons l'arc CO, puis abaissons OP qui sera le sinus de A. Les triangles semblables MNQ, OPQ donnent

$$MN : OP :: MQ : OQ$$

ou $$\sin.2.\,A = \frac{\sin.A \times MQ}{R}$$

Il reste à faire voir que $MQ = 2.\,PQ = 2.\cos.\,A$. Pour cela, traçons la corde MR : elle termine un triangle MQR semblable à OPQ, car tous deux sont rectangles et ont un angle commun en Q : donc on peut écrire la proportion $MQ : PQ :: RQ : OQ$: d'ailleurs, RQ est double de $OQ = CQ$, puisque le premier est diamètre d'un cercle dont CQ est le rayon : donc

$$MP = 2.PQ = 2.\cos.A$$

et enfin $$\sin.2.\,A = \frac{2.\sin.A\,\cos.A}{R}$$

ou plus simplement $\sin.\,2\,A = 2\,\sin.\,A \times \cos.\,A$.

S'agit-il de la formule (33), on remarquera que dans le triangle rectangle RMQ, RM est moyen proportionnel entre RN et RQ (Legendre, *livre* III, *proposition* XXIII).

Mais $\overline{RM}^2 = RN \times RQ$ n'est autre chose que

$$4\sin.^2 A = 2(1 - \cos.2\,A)$$

puisque RQ est le diamètre ou le double du rayon et que

RN = RC — CN, c'est-à-dire que RN est égal au rayon diminué du cosinus de l'arc MR = 2A,

par conséquent $\cos.2A = 1 - 2\sin.^2 A = \cos.^2 A - \sin.^2 A = 2\cos.^2 A - 1.$ (33)

18. Si l'on veut avoir les sinus et cosinus de 3 A, on fait B = 2A dans (6) et (8) et l'on substitue les valeurs fournies par (32) et (33).

$$\sin.3A = \sin.A\cos.2A + \sin.2A\cos.A = \sin.A(1 - 2\sin.^2 A) + 2\sin.A\cos.^2 A = 3\sin.A(1 - \sin.^2 A) - \sin.^3 A \quad \sin.3A = 3.\sin.A - 4\sin.^3 A. \quad (34)$$

$$\cos.3A = \cos.A\cos.2A - \sin.A\sin.2A = \cos.A(2\cos.^2 A - 1) - 2.\sin.^2 A\cos.A = 2\cos.^3 A - \cos.A - 2(1 - \cos.^2 A)\cos.A \quad \cos.3A = 4\cos.^3 A - 3.\cos.A. \quad (35)$$

On peut encore, et plus simplement peut-être, arriver au même résultat par la méthode suivante. Dans la formule (10) on remplace A par 2 A et B par A : il vient alors

$$\sin.(2A + A) + \sin.(2A - A) = \sin.2A\cos.A$$

$$\sin.3A = 2\sin.2A\cos.A - \sin.A = 4\sin.A\cos.^2 A - \sin.A = 4\sin.A(1 - \sin.^2 A) - \sin.A = 3\sin.A - 4\sin.^3 A. \quad . \quad . \quad (34)$$

De même nous aurons en vertu de (12)

$$\cos.(2A + A) + \cos.A = 2\cos.2A\cos.A.$$

ou $\cos.3A = 2(2\cos.^2 A - 1)\cos.A - \cos.A = 4\cos.^3 A - 3\cos.A.$ . . . (35)

19. Pour 4 A, on peut remplacer A et B chacun par 2 A dans les formules (32) et (33) ou seulement B par 3 A dans (6) et (8), et l'on arrive à

$$\sin.4A = 2\sin.2A \times \cos.2A = 4\sin.A\cos.A(\cos.^2 A - \sin.^2 A) = 4\sin A\cos.^3 A - 4\cos.A\sin.^2 A. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

En éliminant successivement les valeurs de $\cos.^2 A$, ou $\sin.^2 A$ dans celle de cos. 2 A, on trouverait encore pour la valeur de sin. 4 A :

$$\sin.4A = 4\sin A \times \cos.A - 8\sin.^3 A\cos.A = 8\cos.^3 A\sin.A - 4.\cos.A\sin.A.$$

Quant au cosinus, nous aurons $\cos.4A = \cos.A\cos.3A - \sin.A\sin.3A.$

et $$\cos.4A = 4\cos.^4 A - 3\cos.^2 A - 3\sin.^2 A + 4\sin.^4 A = 4(\cos.^4 A + \sin.^4 A) - 3(\cos.^2 A + \sin^2 A)$$

Nous savons que $\overline{\sin.A}^2 = 1 - \overline{\cos.A}^2$

et par suite $\overline{\sin.A}^4 = 1 + \overline{\cos.A}^4 - 2\,\overline{\cos.A}^2$.

d'où $\cos.4\,A = 4\,(1 + 2\,\overline{\cos.A}^4 - 2\,\overline{\cos.A}^2) - 3 = 8\,\overline{\cos.A}^4 - 8\,\overline{\cos.A}^2 + 1.$ (37)

On trouve les mêmes valeurs de cos. 4 A et sin. 4 A au moyen de (10) et (12) dans lesquelles on substitue 2 A à A et à B.

En effet, il vient $\sin.4\,A + \sin.0 = 2\sin.2A\cos.2A$

$$= 4\sin.A\cos.A\,(\overline{\cos.A}^2 - \overline{\sin.A}^2) = 4\sin.A\,\overline{\cos.A}^3 - 4\cos.A\,\overline{\sin.A}^3$$

et $\cos.4\,A + \cos.0 = 2\,\overline{\cos.2A}^2 = 2\,(\overline{\cos.A}^2 - \overline{\sin.A}^2)^2 = 2\,\overline{\cos.A}^4 + 2\,\overline{\sin.A}^4 -$

$$- 4\,\overline{\sin.A}^2\,\overline{\cos.A}^2 = 2.\overline{\cos.A}^4 + 2\,(1 - 2\,\overline{\cos.A}^2 + \overline{\cos.A}^4) - 4\,\overline{\sin.A}^2\,\overline{\cos.A}^2$$

ou $\cos.4\,A = 4\,\overline{\cos.A}^4 - 4\,\overline{\cos.A}^2 - 4\,(1 - \overline{\cos.A}^2)\,\overline{\cos.A}^2 + 1 = 8\,\overline{\cos.A}^4 - 8\,\overline{\cos.A}^2 + 1.$

20. Cherchons le sinus et le cosinus d'un arc quintuple d'un autre, en fonction du sinus et du cosinus de ce dernier. Pour le sinus, prenons la formule (10) dans laquelle nous remplaçons A et B par 3 A et 2 A ; cela nous donne :

$$\sin.5\,A + \sin.A = 2\sin.3\,A\cos.2\,A$$

$$\sin.5\,A = 2(3\sin.A - 4\,\overline{\sin.A}^3)\,(\overline{\cos.A}^2 - \overline{\sin.A}^2) - \sin.A =$$

$$2(3\sin.A - 4\,\overline{\sin.A}^3)\,(1 - 2\sin.^2 A) - \sin.A$$

$$\sin.5\,A = 6\sin.A - 8\,\overline{\sin.A}^3 - 12\,\overline{\sin.A}^3 + 16\,\overline{\sin.A}^5 - \sin.A =$$

$$= 16\,\overline{\sin.A}^5 - 20\,\overline{\sin.A}^3 + 5\sin.A. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Quant au cosinus, nous trouverons de la même manière

$$\cos.5\,A = 2\cos.3\,A\cos.2\,A - \cos.A = 2\,(4\,\overline{\cos.A}^3 - 3\cos.A)\,(\overline{\cos.A}^2 - \overline{\sin.A}^2) - \cos.A$$

$$\cos.5\,A = 2\,(4\,\overline{\cos.A}^3 - 3\cos.A)\,(2\,\overline{\cos.A}^2 - 1) - \cos.A =$$

$$= 16\,\overline{\cos.A}^5 - 8\,\overline{\cos.A}^3 - 12\,\overline{\cos.A}^3 + 5\cos.A$$

et enfin $\cos.5\,A = 16\,\overline{\cos.A}^5 - 20\,\overline{\cos.A}^3 + 5\cos.A. \quad \ldots\ldots\ldots \quad$ (39)

On peut aussi trouver les lignes trigonométriques des arcs mul-

tiples quelconques en fonction de celles de l'arc simple, au moyen de la formule de Moivre, démontrée plus loin, § 73. On en déduit :

$$\sin.mA = m\sin.A\,\overline{\cos.A}^{m-1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\overline{\sin.A}^{3}\,\overline{\cos.A}^{m-3} +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5}\overline{\sin.A}^{5}\,\overline{\cos.A}^{m-5} -$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{2.3.4.5.6.7}\overline{\sin.A}^{7}\,\overline{\cos.A}^{m-7} + \text{etc.}$$

$$\cos.mA = \cos.A\,\frac{m(m-1)}{2}\overline{\sin.A}^{2}\,\overline{\cos.A}^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}\overline{\sin.A}^{4}\,\overline{\cos.A}^{m-4} -$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{2.3.4.5.6}\overline{\sin.A}^{6}.\,\overline{\cos.A}^{m-6} + \text{etc.}$$

En y faisant successivement $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7$, etc., on voit que tous les termes à partir du 2e, 3e, 4e, etc., dans le developpement du sinus et du 3e, 4e, 5e, etc., dans celui du cosinus, disparaîtront comme renfermant un facteur nul. Il en résultera donc

$$\sin.2A = 2\sin.A\cos.A$$

$$\cos.2A = \overline{\cos.A}^{2} - \overline{\sin.A}^{2}$$

$$\sin.3A = 3\sin.A\,\overline{\cos.A}^{2} - \overline{\sin.A}^{3} = 3\sin.A - 4\overline{\sin.A}^{3}.$$

$$\cos.3A = \overline{\cos.A}^{3} - 3\overline{\sin.A}^{2}\cos.A = 4\overline{\cos.A}^{3} - 3\cos.A$$

$$\sin.4A = 4\sin.A\,\overline{\cos.A}^{3} - 4\overline{\sin.A}^{3}\cos.A$$

$$\cos.4A = \overline{\cos.A}^{4} - 6\overline{\sin.A}^{2}\,\overline{\cos.A}^{2} + \overline{\sin.A}^{4} = 8\overline{\cos.A}^{4} - 8\overline{\cos.A}^{2} + 1.$$

$$\sin.5A = 5\sin.A\,\overline{\cos.A}^{4} - 10\overline{\sin.A}^{3}\,\overline{\cos.A}^{2} + \overline{\sin.A}^{5} = 16\overline{\sin.A}^{5} - 20\overline{\sin.A}^{3} + 5\sin.A.$$

$$\cos.5A = \overline{\cos.A}^{5} - 10\overline{\sin.A}^{2}\,\overline{\cos.A}^{3} + 5\overline{\sin.A}^{4}\cos.A = 16\overline{\cos.A}^{5} - 20\overline{\cos.A}^{3} + 5\cos.A$$

$$\sin.6A = 6\sin.A\,\overline{\cos.A}^{5} - 20\overline{\sin.A}^{3}\,\overline{\cos.A}^{3} + 6\overline{\sin.A}^{5}\cos.A.$$

$$\cos.6A = 31\overline{\cos.A}^{6} - 45\overline{\cos.A}^{4} + 15\overline{\cos.A}^{2}.$$

$$\sin.7A = 7\sin.A\,\overline{\cos.A}^{6} - 35\overline{\sin.A}^{3}\,\overline{\cos.A}^{4} + 21\overline{\sin.A}^{5}\,\overline{\cos.A}^{2} - \overline{\sin.A}^{7} =$$

$$= 7\sin.A - 56\overline{\sin.A}^{3} + 112\overline{\sin.A}^{5} - 64\overline{\sin.A}^{7}.$$

$$\cos.7A = 64\overline{\cos.A}^{7} - 112\overline{\cos.A}^{5} + 56\overline{\cos.A}^{3} - 7\cos.A.$$

Il existe une analogie frappante entre les sinus et cosinus d'un même multiple impair ; mais on ne peut obtenir un résultat semblable pour ceux des multiples pairs, parce que dans les développements des sinus, on ne peut faire disparaître les différentes puissances impaires du cosinus de l'arc simple, ou du moins, on obtiendrait un développement en série qui ne satisferait point au but que l'on se propose : en effet, on pourrait bien remplacer $\overline{\cos.}^3 A$ par $(1 - \overline{\sin.}^2 A)^{\frac{3}{2}}$, mais en développant, on trouverait :

$$\overline{\cos.}^3 A = 1 - \tfrac{3}{2}\,\overline{\sin.}^2 A + \tfrac{3}{8}\,\overline{\sin.}^4 A - \tfrac{1}{16}\,\overline{\sin.}^6 A + \tfrac{3}{128}\,\overline{\sin.}^8 A - \text{etc.}$$

et des séries convergentes analogues pour $\overline{\cos.}^5 A$, $\overline{\cos.}^7 A$, etc.

CHAPITRE V.

RELATIONS ENTRE LES TANGENTES DES SOMMES OU DIFFÉRENCES D'ANGLES ET CELLES DES ANGLES : ENTRE LES TANGENTES D'ANGLES MULTIPLES ET CELLE DE L'ANGLE SIMPLE.

21. Les formules (22) et (23) établissent les relations qui existent entre les tangentes des somme ou différence d'arcs et celles de ces arcs : quant à celle d'un arc double, on l'obtiendra en faisant $A = B$ dans (22), car il en résulte

$$\text{tang.}2A = \frac{2\,\text{tang.}A}{1 - \text{tang.}^2 A} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

S'il s'agit de la cotangente, nous trouvons, en raison de ce que $\text{cotang.} = \frac{1}{\text{tang.}}$

$$\text{cotang.}2A = \frac{1 - \overline{\text{tang.}}^2 A.}{2\,\text{tang.}A} = \frac{1}{2\,\text{tang.}A} - \tfrac{1}{2}\,\text{tang.}A = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\text{tang.}A} - \text{tang.}A\right). \quad (41)$$

ou encore $\text{cotang.}A - \text{tang.}A = 2\,\text{cotang.}2A.$ . . . . (41)

22. On serait arrivé à la même formule en remarquant que

$$\text{cotang.}A - \text{tang.}A = \frac{\cos.A}{\sin.A} - \frac{\sin.A}{\cos.A} = \frac{\overline{\cos.}^2 A - \overline{\sin.}^2 A}{\sin.A\cos.A} = \frac{2\cos.2A}{\sin.2A} =$$

$$2\,\text{cotang.}2A.$$

Si l'on voulait trouver l'équivalent de la somme d'une tangente et de la cotangente correspondante, au lieu de la différence fournie par (41), on aurait :

$$\text{cotang.}A+\text{tang.}A=\frac{\cos.A}{\sin.A}+\frac{\sin.A}{\cos.A}=\frac{\overline{\cos.}^2A+\overline{\sin.}^2A}{\sin.A\cos.A}=\frac{2}{2\sin.A\cos.A}=$$

$$\frac{2}{\sin.2A}=2\,\text{coséc.}2A. \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

23. La tangente de 3 A s'obtient en remplaçant B par 2 A dans (22), car alors il vient :

$$\text{tang.}(A+2A)=\frac{\text{tang.}2A+\text{tang.}A}{1-\text{tang.}2A\,\text{tang.}A}$$

$$\text{tang.}3A=\frac{\dfrac{2\,\text{tang.}A}{1-\text{tang}^2A}+\text{tang.}A}{1-\dfrac{2\,\text{tang.}A}{1-\overline{\text{tang.}}^2A}\cdot\text{tang.}A}=\frac{3\,\text{tang}\,A-\overline{\text{tang.}}^3A}{1-3\,\overline{\text{tang.}}^2A}. \quad \ldots \quad (43)$$

CHAPITRE VI.

RELATIONS ENTRE LES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES DE DEUX ANGLES DONT L'UN EST LA MOITIÉ DE L'AUTRE.

24. Les formules (32) et (33) deviennent, lorsqu'on y substitue A à 2 A.

$$\sin.A=2\sin.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}A. \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

$$\cos.A=\overline{\cos.}^2\tfrac{1}{2}A-\overline{\sin.}^2\tfrac{1}{2}A=1-2\,\overline{\sin.}^2\tfrac{1}{2}A=2\,\overline{\cos.}^2\tfrac{1}{2}A-1. \quad \ldots \quad (45)$$

de la dernière on tire

$$2\,\overline{\sin.}^2\tfrac{1}{2}A=1-\cos.A \quad \text{ou} \quad \sin.\tfrac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1-\cos.A}{2}}. \quad \ldots \quad (46)$$

$$2\,\overline{\cos.}^2\tfrac{1}{2}A=1+\cos.A \quad \text{ou} \quad \cos.\tfrac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1+\cos.A}{2}}. \quad \ldots \quad (47)$$

En les divisant l'une par l'autre, on trouve :

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{1-\cos.A}{1+\cos.A}} \quad (48) \qquad \text{cotang.}\tfrac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{1+\cos.A}{1-\cos.A}} \quad (49)$$

On peut aussi trouver les sinus et cosinus de $\frac{A}{2}$ en fonction du sinus de A : pour cela, on combine les formules

$$\overline{\sin.}^2\tfrac{1}{2}A + \overline{\cos.}^2\tfrac{1}{2}A = 1, \quad 2\sin.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}A = \sin.A$$

En les ajoutant et les retranchant successivement, il vient

$$(\sin.\tfrac{1}{2}A + \cos.\tfrac{1}{2}A)^2 = 1 + \sin.A, \quad (\sin.\tfrac{1}{2}A - \cos.\tfrac{1}{2}A)^2 = 1 - \sin.A$$

ou $\sin.\frac{1}{2}A + \cos.\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{1+\sin.A} \quad \sin.\frac{1}{2}A - \cos.\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{1-\sin.A}$

$$\sin.\tfrac{1}{2}A = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin.A} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin.A}. \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}A = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin.A} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin.A}. \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Ces deux formules multipliées l'une par l'autre reproduisent (44) comme cela doit être. En effet, le produit des deux seconds membres qui sont la somme et la différence de deux radicaux, est la différence des quantités qui en sont affectées. On a donc :

$$4\sin.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}A = 1 + \sin.A - (1 - \sin.A) = 2\sin.A$$

ou enfin $\sin.A = 2\sin.\frac{1}{2}A\cos.\frac{1}{2}A$

25. Aux expressions de cosinus A fournies par (45), on peut encore en joindre deux autres déduites de (48) et (49) et qui, comme elles, sont fonctions de l'angle moitié. En effet, en chassant les dénominateurs, et élevant au carré, il vient

$$(1+\cos.A)\,\overline{\text{tang.}}^2\tfrac{1}{2}A = 1 - \cos.A$$

$$\cos.A\,(1 + \overline{\text{tang.}}^2\tfrac{1}{2}A) = 1 - \overline{\text{tang.}}^2\tfrac{1}{2}A,$$

et enfin $\cos.A = \dfrac{1 - \overline{\text{tang.}}^2\frac{1}{2}A}{1 + \overline{\text{tang.}}^2\frac{1}{2}A}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$

de même $(1 - \cos.A)\,\overline{\text{cotang.}}^2\frac{1}{2}A = 1 + \cos.A$

$$\cos.A\,(1 + \overline{\text{cotang.}}^2\tfrac{1}{2}A) = -(1 - \overline{\text{cotang.}}^2\tfrac{1}{2}A)$$

et par suite $\cos.A = \dfrac{\overline{\text{cotang}}^2.\frac{1}{2}A - 1}{\overline{\text{cotang}}^2.\frac{1}{2}A + 1}$ . . . . (51)

26. Nous donnons ici encore, et pour la dernière fois, une démonstration synthétique de quelques-unes des formules ci-dessus, et c'est de (46) et de (47) qu'il s'agit.

Soit *agb*, *fig.* 2, l'arc que nous désignons par A et $bg = \frac{1}{2}A$; le rayon *Ca* étant égal à l'unité. Dans le triangle rectangle *abd*, on a

$$\overline{ab}^2 = \overline{bd}^2 + \overline{ad}^2 = \overline{\sin}^2.A + (1 - \cos.A)^2 =$$

$$\overline{\sin}^2.A + \overline{\cos}^2.A + 1 - 2\cos.A = (1 - \cos.A)$$

d'ailleurs la droite $ab = 2 \sin. \frac{1}{2} A$, donc :

$$\overline{ab}^2 \text{ ou } 4\,\overline{\sin}^2.\tfrac{1}{2}A = 2(1 - \cos.A) \quad \text{ou} \quad 2\,\overline{\sin}^2.\tfrac{1}{2}A = 1 - \cos.A. \quad . \quad (46)$$

Pour obtenir (47) on remplace $\overline{\sin}^2.\frac{1}{2}A$ par $1 - \overline{\cos}^2.\frac{1}{2}A$.

ce qui donne $2 - 2\,\overline{\cos}^2.\frac{1}{2}A = 1 - \cos.A.$

ou enfin $2\,\overline{\cos}^2.\frac{1}{2}A = 1 + \cos.A.$ . . . . (47)

27. Ces formules servent principalement à transformer certaines expressions en d'autres plus favorables à la suite des calculs : cependant, pour donner une idée de l'emploi que l'on en pourrait faire, supposons que l'on veuille tirer parti des formules (50) et (51) pour trouver les valeurs du sinus et du cosinus de 50^g, on y fera $A = 100^g$, d'où

$$\sin.A = 1, \quad \cos.A = o.$$

Alors $\sin.50^g = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ et $\cos.50^g = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$

Pour obtenir les sinus et cosinus de 25^g, nous supposerons $A = 50^g$, et les formules deviendront

$$\sin.25^g = \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}};\ \cos.25^g = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}$$

En opérant par logarithmes

$$\log.\sin.25^g = \tfrac{1}{2}\log.\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = \tfrac{1}{2}\left[\log.\left(1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) - \log.2\right]$$

de même $\log.\cos.25^g = \frac{1}{2}\left[\log.\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) - \log.2\right]$

CHAPITRE VII.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES (RECTANGLES ET OBLIQUANGLES).

28. Dans un triangle rectangle on a, en prenant $C\alpha = 1$, *fig.* 3, $\delta\varepsilon = \sin. C$, $C\varepsilon = \cos. C$, $\alpha\beta = \text{tang.}\ C$, et à cause de la similitude des triangles, $a : c : b :: 1\ \sin.C : \cos.C$, d'où $\frac{\sin.C}{\cos.C} = \frac{c}{b}$, $\frac{\sin.C}{1} = \frac{c}{a}$, $\frac{\cos.C}{1} = \frac{b}{a}$ c'est-à-dire $c = b\ \text{tang.}C$, $c = a \sin. C$, $b = a \cos. C$ et par suite $b = c\ \text{cotang.}\ C$; $a = c\ \text{coséc.}\ C$; $a = b\ \text{séc.}\ C$.

29. Si dans un triangle quelconque ABC, *fig.* 4, on abaisse la perpendiculaire BD, il sera décomposé en deux triangles rectangles qui donneront $BD = a \sin. C = c \sin. A$.

d'où

$$a : c :: \sin.A : \sin.C. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (52)$$

Cette propriété, dont jouissent les sinus, d'être proportionnels aux côtés opposés, peut encore se démontrer directement.

Soit ABC, *fig.* 5, un triangle auquel on circonscrit un cercle dont le centre est en O, point de rencontre des perpendiculaires élevées sur le milieu des côtés. De ce point comme centre et d'un rayon égal à l'unité, on décrit une nouvelle circonférence dans laquelle on inscrit un triangle A′B′C′ semblable à ABC : on a alors la proportion

$$BC : AC : AB :: B'C' : A'C' : A'B' :: \tfrac{1}{2} B'C' : \tfrac{1}{2} A'C' : \tfrac{1}{2} A'B'$$

mais $\qquad \tfrac{1}{2} B'C' = \sin. \tfrac{1}{2} B'OC' = \sin.A' = \sin.A$;

de même $\qquad \tfrac{1}{2} A'C' = \sin.B$ et $\tfrac{1}{2} A'B' = \sin.C$

donc enfin $\qquad BC : AC : AB :: \sin.A : \sin.B : \sin.C. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (52)$

Nous avons posé $\tfrac{1}{2} B'OC' = A'$: en effet, ces deux angles embrassent le même arc de cercle entre leurs côtés et le premier a son sommet au centre, tandis que celui de l'autre est situé sur la circonférence.

30. Si dans le triangle ABC, *fig.* 4, on désigne par h la hauteur et par x la portion AD de b, on a

$$a^2=(b-x)^2+h^2=b^2+x^2+h^2-2bx \quad \text{et puisque } c^2=x^2+h^2$$
$$a^2=b^2+c^2-2bx.$$

Mais le triangle rectangle ABD fournit $x=c\cos.A$.

donc enfin $a^2=b^2+c^2-2bc\cos.A$ ou $\cos.A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. . . . (53)

Si l'angle A était obtus, la formule resterait la même. La perpendiculaire tombant dans ce cas en dehors, on aurait :

$$a^2=(b+x)^2+h^2=b^2+x^2+h^2+2bx=b^2+c^2+2bx.$$

Dans ABD, $x=c\cos.(200-A)=-c\cos.A$, et, par conséquent

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos.A$$

Cette équation qui, en théorie, détermine l'une des quantités a, b, c et A en fonction des 3 autres, n'est pas d'un usage facile dans l'application. Les formules disposées pour l'emploi des logarithmes étant préférables, leur recherche va être le but des trois paragraphes suivants.

31. Si d'abord la résolution du triangle tend à déterminer un angle au moyen des 3 côtés, on peut combiner ensemble

$$\overline{\sin.A}^2=1-\overline{\cos.A}^2 \text{ et } \cos.A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \text{ on trouve}$$

$$\overline{\sin.A}^2=\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}=\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{[(b+c)^2-a^2](a^2-(b-c)^2]}{4b^2c^2}=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)}{4b^2c^2}$$

Si l'on représente le périmètre $a+b+c$ du triangle par $2p$,

$$\sin.A=\pm\frac{1}{2bc}\sqrt{2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)}=$$

$$\pm\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Cette formule peut servir à démontrer que les sinus des angles

sont proportionnels aux côtés opposés, car, en divisant les deux membres par a, le coefficient du radical devient $\frac{2}{abc}$, et le second membre se trouve symétrique par rapport à a, b, c.

Il est encore d'autres formules au moyen desquelles on arrive à trouver un angle en fonction des 3 côtés.

Prenons la formule (46), et, comme ci-dessus, introduisons la valeur de cos. A, il vient

$$2\,\overline{\sin.}^2\,\tfrac{1}{2}\,A = 1 - \cos.A = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc} =$$

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)\,(a+c-b)}{2bc}$$

Divisant par 2, extrayant la racine carrée et faisant $a+b+c=2p$.

$$\sin.\tfrac{1}{2}A = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(2p-2c)\,(2p-2b)}{bc}} = \pm\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}} \quad . \quad . \quad (55)$$

De même au moyen de (47)

$$\cos.\tfrac{1}{2}A = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2p\,(2p-2a)}{bc}} = \pm\sqrt{\frac{p\,(p-a)}{bc}}. \quad . \quad (56)$$

Le produit de (55) et (56) multiplié par 2 reproduit (54) comme cela doit être en vertu de (30).

Si, au contraire, on les divise l'une par l'autre, on trouve

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

32. Il pourrait arriver que la combinaison des quatre éléments a, b, c et A n'eût pas pour but de déterminer l'angle, mais l'un des côtés. Supposons que l'on veuille trouver a, côté opposé à l'angle donné ; on substitue à cosin. A son équivalent

$$1-2\,\overline{\sin.}^2\,\tfrac{1}{2}A \qquad \text{dans} \qquad a^2=b^2+c^2-2bc\cos.A$$

ce qui donne $a^2=b^2+c^2-2bc+4bc\,\overline{\sin.}^2\,\tfrac{1}{2}A = (b-c)^2+4bc\,\overline{\sin.}^2\,\tfrac{1}{2}A =$

$$(b-c)^2\left(1+\frac{4bc\,\overline{\sin.}^2\,\tfrac{1}{2}A}{(b-c)^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

$\frac{4bc\,\overline{\sin.}^2\frac{1}{2}A}{(b-c)^2}$ est essentiellement positif, puisque b et c sont des

quantités positives, et que les autres facteurs sont des carrés : on peut alors l'assimiler au carré d'une tangente et écrire

$$\text{tang. } \varphi = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} A}{b-c} \sqrt{b.c}$$

Cette formule donnera φ en fonction de quantités connues; puis substituant dans l'expression de a on aura :

$$a = (b-c) \sqrt{1 + \overline{\text{tang.}}^2 \varphi} = (b-c) \text{ séc. } \varphi.$$

On aurait pu de même remplacer cos. A par 2 cos. $\frac{1}{2}$ A — 1 et l'on serait arrivé à un résultat analogue. La quantité que l'on vient d'assimiler à une tangente se trouvant alors affectée du signe —, on l'aurait égalée au carré d'un sinus ou d'un cosinus, et le binôme $1 - \frac{4bc. \cos.^2 \frac{1}{2} A}{(b-c)^2}$ se serait trouvé remplacé par un cosinus ou un sinus au lieu d'une sécante.

On peut encore résoudre ainsi qu'il suit :
On sait que

$$\cos. A = \overline{\cos.}^2 \tfrac{1}{2} A - \overline{\sin.}^2 \tfrac{1}{2} A \text{ et } 1 = \overline{\cos.}^2 \tfrac{1}{2} A + \overline{\sin.}^2 \tfrac{1}{2} A.$$

Dans $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$ cos. A, on peut multiplier b^2+c^2 par l'équivalent de l'unité, et remplacer cos. A par la valeur indiquée ci-dessus, il en résulte

$$a^2 = (b^2+c^2)(\overline{\cos.}^2 \tfrac{1}{2} A + \overline{\sin.}^2 \tfrac{1}{2} A) - 2bc(\overline{\cos.}^2 \tfrac{1}{2} A - \overline{\sin.}^2 \tfrac{1}{2} A) =$$

$$(b-c)^2 \overline{\cos.}^2 \tfrac{1}{2} A + (b+c)^2 \overline{\sin.}^2 A = (b-c)^2 \overline{\cos.}^2 \tfrac{1}{2} A \left\{ 1 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 \overline{\text{tang.}}^2 \tfrac{1}{2} A \right\} \quad (59)$$

Si l'on fait

$$\frac{b+c}{b-c} \text{ tang. } \tfrac{1}{2} A = \text{tang. } \varphi, \quad \text{on a,} \quad a = (b-c) \cos. \tfrac{1}{2} A \text{ séc. } \varphi,$$

et le problème est résolu.

Enfin si l'on voulait b en fonction de a, c et A (la marche est la même si c est l'inconnue), on trouverait de suite C par la proportion des sinus : B, en retranchant A + C de 200^g, et enfin b en faisant usage encore de la proportion des sinus.

33. S'il s'agit de résoudre un triangle dans lequel on connait

deux côtés et l'angle compris, en désignant les données par a, b, C, on trouve au moyen de la proportion

$$\sin.A : \sin.B :: a : b, \quad \frac{\sin.A+\sin.B}{\sin.A-\sin.B}=\frac{a+b}{a-b},$$

ou en vertu de (26)

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A-B)=\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B)\,\frac{a-b}{a+b};$$

mais $A+B=200^g-C,$ et $\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B)=\text{cotang.}\tfrac{1}{2}C$

donc enfin $\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A-B)=\text{cotang.}\tfrac{1}{2}C\,\frac{a-b}{a+b}$. . . . . (60)

34. Pour résumer ce qui est relatif à la résolution des triangles, nous dirons qu'un triangle se compose de 3 côtés et 3 angles : qu'on peut le résoudre, lorsque l'on connaît 3 éléments, pourvu qu'il se trouve au moins un côté parmi eux. Examinons donc quelles sont les combinaisons 4 à 4 que l'on peut former avec les angles et les côtés.

1° Deux angles et les deux côtés opposés

A, B, a, b......A, C, a, c.....B, C, b, c.

La proportion (52) résout ces différents cas. Le 3ᵉ angle s'obtient en retranchant de 200ᵍ la somme des deux que l'on connaît : puis enfin, c'est encore (52) qui fournit le 3ᵉ côté.

2° Connaissant 2 côtés et l'angle compris, résoudre le triangle, les données sont

a, b, C......b, c, A......a, c, B.

Dans l'une quelconque de ces 3 combinaisons, la formule (60) donne le moyen de trouver la demi-différence des deux angles inconnus : d'ailleurs, on connaît leur demi-somme, qui égale 100ᵍ moins la moitié de l'angle donné ; donc on connaît les 3 angles. La proportion (52) donne ensuite le 3ᵉ côté.

3° Connaissant 2 angles et le côté compris. Cette circonstance est presque inutilement relatée, puisque la connaissance de deux angles entraîne de suite celle du 3ᵉ, et qu'alors au moyen de (52) on trouve les deux côtés.

4° Les 3 côtés étant donnés, il s'agit de déterminer les angles.

On peut pour cela employer l'une des formules (54), (55), (56) ou (57).

35. Cherchons l'expression de la surface d'un triangle en fonction des 3 côtés.

On sait que dans tout triangle ABC, *fig.* 4, en désignant par S la surface, on a

$$S = \tfrac{1}{2} bh; \quad \text{mais} \quad h = c \sin.A; \quad \text{donc} \quad S = \tfrac{1}{2} bc \sin.A,$$

et en vertu de (54)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

On arrive directement au même résultat par la méthode suivante dans laquelle on ne suppose pas connue la formule (54). Puisque déjà $S = \frac{1}{2} bh$, il reste à trouver h en fonction des côtés.

La figure 4 fait voir que

$$h^2 = c^2 - x^2 = (c+x)(c-x) \quad \text{et} \quad x = c.\cos.A$$

substituant dans cette dernière expression celle de cos. A fournie par la formule (53), on trouve $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c}$

qui, introduit dans la valeur de h^2, donne, après avoir réduit au même dénominateur,

$$h^2 = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4b^2} =$$

$$\frac{4}{4b^2}\Big[(b+c+a)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\Big]$$

représentant, comme plus haut, le demi-périmètre par p

$$h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

et enfin, en substituant dans l'expression de S,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

CHAPITRE VIII.

CONSTRUCTION DES TABLES DE SINUS, COSINUS, ETC.

36. On cherche une formule qui donne le sinus d'un arc quelconque en fonction des sinus d'arcs moindres.

On sait que

$\sin.(y+x)+\sin.(y-x)=2\sin.y\cos.x$ en faisant $y=(m+1)x$

il vient $\sin.(m+2)x+\sin.mx=2\cos.x\sin.(m+1)x$

ou $\sin.(m+2)x=2\cos.x\sin.(m+1)x-\sin.mx$. . . (62)

On donne ensuite à m toutes les valeurs possibles, et l'on obtient ainsi les sinus des arcs de toutes grandeurs : En effet, si l'on fait

$m=0$ on a $\sin.2x=2\cos.x\sin.x$ formule déjà connue.

$m=1$ $\sin.3x=2\cos.x\sin.2x-\sin.x$.

$m=2$ $\sin.4x=2\cos.x\sin.3x-\sin.2x$.

$m=3$ $\sin.5x=2\cos.x\sin.4x-\sin.3x$. ... etc.

On trouverait de même les valeurs des cosinus au moyen de

$$\cos.(y+x)+\cos.(y-x)=2\cos.y\cos.x.$$

Mais connaissant les sinus, on trouve les cosinus et les autres lignes trigonométriques au moyen de (1), (2), (3), (4), (5), qui les lient entre elles.

D'après cela, on voit qu'il est nécessaire de connaître d'abord la longueur d'un premier sinus. On sait que $\pi=3.1415925535$, etc., représente la demi-circonférence qui a l'unité pour rayon.

Il en résulte que $100^g=1,5707963$, etc.
$1^g=0,015707963$
$1''=0,00000157$

Nous allons faire voir que le sinus est toujours plus petit que l'arc et plus grand que l'arc diminué du quart de son cube, c'est-à-dire $A>\sin.A>A-\frac{A^3}{4}$. Il résultera de là que le sinus de

1″ ne différant de l'arc correspondant qu'au delà de la 15ᵉ décimale, on aura une exactitude bien suffisante en prenant l'un pour l'autre.

. Connaissant alors les sinus et cosinus de 1″, on trouvera ceux de 2″, etc.

37. Il reste donc à prouver ce que nous avons avancé ; et d'abord démontrons que l'arc est plus grand que le sinus et plus petit que la tangente. En effet, le triangle ATO, *fig.* 21, est plus grand que le secteur correspondant BTO ; celui-ci est à son tour plus grand que le triangle BTO.

Ainsi $\frac{1}{2}AT \times TO > \frac{1}{2}BT \times TO > \frac{1}{2}BS \times TO$ ou $AT > BT > SB$

ou enfin $\text{tang.} > \text{arc} > \text{sinus.}$

Cela posé, écrivons l'inégalité $\text{tang.}\frac{A}{2} > \frac{A}{2}$; multiplions de part et d'autre par $\overline{\text{cos.}}^2\frac{1}{2}A$, il vient

$$\text{sin.}\tfrac{1}{2}A\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}A > \frac{A}{2}\,\overline{\text{cos.}}^2\frac{A}{2}$$

Multiplions par 2 :

$$2\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}A\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}A \quad \text{ou} \quad \text{sin.}A > A\,\overline{\text{cos.}}^2\tfrac{1}{2}A$$

ou encore $\text{sin.}A > A\,(1 - \overline{\text{sin.}}^2\tfrac{1}{2}A)$

le sinus étant plus petit que l'arc, on aura à plus forte raison

$$\text{sin.}A > A\left(1 - \frac{A^2}{4}\right) \text{ ou } \text{sin.}A > A - \frac{A^3}{4} \text{ et enfin } A > \text{sin.}A > A - \frac{A^3}{4}$$

Au surplus, comme les logarithmes abrègent beaucoup les calculs, on a construit directement, par des méthodes dont nous allons donner quelques notions dans le chapitre suivant, des tables de logarithmes pour les nombres et pour les lignes trigonométriques.

CHAPITRE IX.

THÉORIE DES LOGARITHMES. — CONSTRUCTION DES TABLES DE LOGARITHMES DES NOMBRES NATURELS ET DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

38. Le logarithme d'un nombre est l'exposant de la puissance à laquelle il faut en élever un autre pour obtenir ce nombre, Ainsi dans $y = a^x$, x est le logarithme de y. Le logarithme vulgaire est celui dont la base est 10. 2 est le logarithme vulgaire de 100, puisque $100 = \overline{10}^2$.

La base a peut être un nombre quelconque, autre toutefois que l'unité, puisque *un* élevé à telle puissance qu'on voudra donne constamment l'unité.

Le logarithme de la base est toujours l'unité, car, pour que $a^x = a$, il faut que $x = 1$.

Le logarithme de l'unité est zéro dans tout système, et en effet :

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \quad \frac{a^x}{a^x} = a^{x-x} = a^0; \text{ mais } \frac{a^x}{a^x} = 1, \text{ donc } a^0 = 1$$

Soit $y = a^x$ ou $x = l.y$. Si $a > 1$, x croissant depuis zéro jusqu'à l'infini positif, le nombre y croîtra de l'unité à l'infini positif : si x décroît de zéro à $-\infty$, y décroît depuis l'unité jusqu'à zéro : car soit $x = -x'$ $(x' > 0)$ on a $y = a^x = a^{-x'} = \frac{1}{a^{x'}}$ et x devenant $-\infty$, x' devint $+\infty$, de sorte que y se réduit à zéro. C'est dans ce sens que l'on dit que le logarithme de zéro est l'infini négatif.

La somme des logarithmes de deux nombres est égale au logarithme du produit de ces deux nombres. En effet, prenons $p = a^{lp}$ et $q = a^{lq}$, nous aurons,

$$p \times q = a^{lp} \times a^{lq} = a^{lp+lq}, \quad \text{mais} \quad p \times q = a^{lpq} \quad \text{donc} \quad lp + lq = l.p \times q.$$

Nous voyons de même que $\frac{p}{q} = \frac{a^{lp}}{a^{lq}} = a^{lp-lq}$ et parce que $\frac{p}{q} = a^{l\frac{p}{q}}$

il résulte que $l\frac{p}{q} = lp - lq.$

Nous pouvons conclure que $lp^2 = 2lp,\ lp^3 = 3lp,$ etc.

en effet $lp^2 = lp \times p = lp + lp = 2lp$: $lp^3 = l(p \times p \times p) = lp + lp + lp = 3.lp,$ etc.

De même $l\sqrt{q} = \frac{1}{2}lq$; car $lp = l(\sqrt{p} \times \sqrt{p}) = 2l\sqrt{p}$ et $l\sqrt{p} = \frac{1}{2}lp.$

L'avantage des logarithmes vulgaires dont la base est 10 est que, connaissant le logarithme d'un nombre, on a celui d'un nombre 100, 1000, etc., fois plus grand en ajoutant 1, 2 unités, etc., au logarithme donné, et que de même, si l'on retranche 1, 2, etc., de ce logarithme, le résultat correspond à un nombre 10, 100, etc., fois plus petit.

39. Pour arriver à la construction des tables, on cherche d'abord à développer y ou a^x en série et, pour cela on remplace a par $1 + (a-1)$, on a alors, en se servant du développement du binôme de Newton (livre 2, chapitre IV, §§ 65, 66, 67).

$$(1)\quad a^x = [1 + (a-1)]^x = 1 + x(a-1) + \frac{x(x-1)}{2}(a-1)^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}(a-1)^3 +, \text{ etc.}$$

On voit qu'en ordonnant par rapport aux puissances de x, le développement sera de la forme

$$(2)\quad a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +;\ \text{etc.}$$

Il faut déterminer les coefficients A, B, C, D, etc. Pour cela, mettons x en facteur commun à tous les termes qui suivent l'unité dans le second membre de (1) et nous aurons

$$a^x = 1 + x\left[(a-1) + \frac{x-1}{2}(a-1)^2 + \frac{(x-1)(x-2)}{2.3}(a-1)^3 +, \text{ etc.}\right]$$

Si nous faisons $x = o$ dans les crochets, il y restera évidem-

ment les quantités qui doivent, dans le développement, former le coefficient de la première puissance de x

donc $$A = (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \tfrac{1}{4}(a-1)^4 +, \text{ etc.} \quad . \; . \quad (3)$$

Pour trouver B, C, etc., remarquons que pour élever $y = a^x$ à une puissance m, il faut multiplier l'exposant x par m, c'est-à-dire que $y^m = a^{mx}$. On pourrait donc, d'une part, remplacer dans la série x par mx, et de l'autre l'élever à la même puissance par les procédés ordinaires; égaler les deux résultats, puis entre eux, les coefficients des mêmes puissances de x (§ 70). Nous allons suivre cette marche, et comme le fait a lieu, quel que soit m, prenons le cas le plus simple, celui où $m = 2$. Il viendra d'abord en remplaçant x par $2x$, dans (2),

$$a^{2x} = 1 + 2Ax + 4Bx^2 + 8Cx^3 + 16Dx^4 + \text{etc.}$$

puis $$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +, \text{ etc.}$$

multiplié par $$\underline{a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + , \text{ etc.}}$$

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} 1+A & x+B & x^2+C & x^3+D & x^4+, \text{ etc.} \\ +A & +A^2 & +AB & +AC & \\ & +B & +AB & +B^2 & \\ & & +C & +AC & \\ & & & +D & \end{array}$$

c'est-à-dire

$$a^{2x} = 1 + 2Ax + (A^2 + 2B)\,x^2 + 2\,(AB + C)\,x^3 + (2AC + B^2 + 2D)\,x^4 +, \text{ etc.}$$

De là, en comparant les deux valeurs de a^{2x}, et égalant les coefficients des mêmes puissances de x,

$$4B = A^2 + 2B \qquad \text{d'où} \qquad B = \frac{A^2}{2}$$

$$8C = 2\,(AB + C) \quad C = \frac{AB}{3} \qquad \text{et} \qquad C = \frac{A^3}{2.3}$$

$$16.\ D = 2AC + B^2 + 2D;\ 14D = 2AC + B^2 = \frac{A^4}{3} + \frac{A^4}{4} = \frac{7A^4}{3.4}$$

et enfin $$D = \frac{A^4}{2.3.4}, \text{ etc.}$$

substituant il vient

$$y = a^x = 1 + Ax + \frac{A^2}{2}x^2 + \frac{A^3}{2.3}x^3 + \frac{A^4}{2.3.4}x^4 +, \text{ etc.} \quad . \; . \quad (4)$$

Dans le cas particulier où l'on fait $Ax = 1$ ou $x = \frac{1}{A}$, la formule se transforme en

$$a^{\frac{1}{A}} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \text{etc.} = 2{,}7182818, \text{ etc.}$$

Cette expression est incommensurable, c'est-à-dire que, plus grande que 2 et plus petite que 3, elle ne peut être représentée par aucune fraction composée d'un nombre fini de chiffres. En désignant ce nombre par e, on a

$$y = a^{\frac{1}{A}} = e, \qquad \text{ou} \qquad a = e^{A}.$$

L'exposant A est le logarithme de la base a d'un système, pris dans celui dont la base serait e. On le nomme le module et souvent on le désigne par M.

Lorsque $A = 1$, alors $a = e$, et la formule qui établit une relation entre un nombre et son logarithme devient la plus simple possible. Elle se réduit en effet à

$$y = a^{x} = e^{x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{2.3.4}x^4 +, \text{ etc.}$$

On a donc, pour cette raison, calculé d'abord dans la base e, une table de logarithmes connus sous les noms de *naturels, hyperboliques* ou *népériens*, puis on a passé de ceux-ci aux logarithmes vulgaires, par un procédé fort simple qui repose sur ce qui suit :

Soit $y = a^{ly}$: prenons les logarithmes des deux membres dans un autre système. En les indiquant par le symbole L, nous aurons

$$Ly = ly\, La \quad \text{d'où} \quad ly = \frac{Ly}{La}$$

Donc, pour passer du logarithme d'un nombre pris dans un système à celui de ce même nombre dans un second système, il faut diviser le premier logarithme par celui de la base nouvelle. Si nous faisons $y = e$, nous aurons $l.e = \frac{L.e}{L.a}$, mais si les logarithmes indiqués par L sont les naturels dont la base est e, alors $Le = 1$ et $l.e = \frac{1}{L.a}$. Nous pouvons écrire qu'en général

$$l\,y = \frac{Ly}{La} = le\, Ly = M.\, Ly.$$

Si donc on connaît le logarithme naturel ou hyperbolique d'un nombre y, il faut, pour avoir son logarithme vulgaire, diviser par le logarithme naturel de la base 10, ou, si on le connaît, multiplier par le logarithme vulgaire de e.

Cela posé, réunissons les équations

$$a^x = 1 + Ax + \frac{1}{2} A^2 x^2 + \frac{1}{2.3} A^3 x^3 +, \text{etc.}$$

$$a = e^A, \quad e = 2{,}7182818, \text{etc.}$$

$$\text{et } A = l.\,a = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 -, \text{etc.} \quad . \quad . \quad (3)$$

A est, comme nous venons de le voir, le logarithme hyperbolique de la base a, et sa valeur dépend évidemment de celle de a. Supposons qu'il s'agisse de déterminer A au moyen de (3) : il y a deux cas à considérer; $a - 1$ peut être plus grand ou plus petit que l'unité.

Si $a - 1 > 1$, la série est divergente, puisque les termes vont en augmentant, avec les exposants de $a - 1$: on ne pourra donc l'employer sans une modification préalable.

Si $a - 1 < 1$, les termes sont fractionnaires et diminuent sans cesse. Dans ce cas, on dit que la série est convergente.

Considérons le premier cas, et remarquons que de $a = e^A$, on déduit $\frac{1}{a} = e^{-A}$. On peut donc, sans apporter de perturbation dans la formule (3) y remplacer a par $\frac{1}{a}$ et A par $-$A, ce qui la transforme en

$$-A = \left(\frac{1}{a} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - 1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} - 1\right)^3 - \text{etc.}$$

ou en changeant les signes

$$A = \frac{a-1}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a}\right)^3 - \text{etc.}$$

$\frac{a-1}{a}$ étant une fraction, la série est devenue convergente.

Cette dernière formule peut servir à déterminer le module d'un système dont on se donne la base.

Si dans (3) nous faisons

$$a - 1 = z, \quad \text{d'où} \quad a = 1 + z$$

elle prend cette nouvelle forme

$$\text{A} = l.a = l\,(1 + z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \text{etc.} \ . \ . \quad (5)$$

Si l'on y faisait ensuite $a - 1 = -z$, ou $a = 1 - z$ elle donnerait

$$l\,(1 - z) = -z - \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 - \text{etc.} \ . \ . \ . \ . \ . \quad (6)$$

et en retranchant la seconde de la première, on aurait

$$\text{log.}\,(1 + z) - l\,(1 - z) = l\,\frac{1+z}{1-z} = 2\,(z + \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 + \text{etc.})$$

Dans $\frac{1+z}{1-z}$ le numérateur est plus grand que le dénominateur, et on peut ainsi assimiler ce nombre fractionnaire à $\frac{n+t}{n}$, d'où

$$n + nz = n + t - nz - nt \quad \text{et} \quad z = \frac{t}{2n+t}$$

Substituons cette valeur de z dans la dernière formule trouvée et nous aurons

$$(7)\ l\,(n + t) = ln + 2\left[\frac{t}{2n+t} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{t}{2n+t}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{t}{2n+t}\right)^5 + \text{etc.}\right]$$

Cette série, étant convergente, peut servir à la détermination des logarithmes hyperboliques des nombres. En suite de quoi, il ne reste plus qu'à les multiplier par le module de la base du système pour lequel on veut construire une table de logarithmes.

L'équation (4) indique que le développement d'un nombre y est de la forme

$$y = 1 + \text{A}\,ly + \tfrac{1}{2}\,\text{A}^2\,\overline{\text{log.}}^2\,y + \text{etc.}$$

et l'équation (3) sert à déterminer les coefficients A, A^2, etc., en fonction de la base a. S'il s'agit de calculer les tables ordinaires pour lesquelles $a = 10$, on fait d'abord dans (7) $n = 1$, $t = 1$, et l'on a

$$l.2 = 2\,(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\,(\tfrac{1}{3})^3 + \tfrac{1}{5})\,(\tfrac{1}{3})^5 + \text{etc.}) = 0{,}693147, \text{ etc.}$$

Pour avoir celui de 3, on pose $n = 2$ et $t = 1$

$$l.3 = l.2 + 2\left[\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{5}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{5}\right)^5 + \text{etc.}\right]$$

$$l.3 = 2\left[\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3}\left[\left(\tfrac{1}{3}\right)^3 + \left(\tfrac{1}{5}\right)^3\right] + \tfrac{1}{5}\left[\left(\tfrac{1}{3}\right)^5 + \left(\tfrac{1}{5}\right)^5\right] + \text{etc.}\right]$$

$$l.3 = \tfrac{16}{15} + \tfrac{304}{10125} + \tfrac{6736}{3796875} + \text{etc.}$$

ou $n = 1$, $t = 2$, ce qui donne

$$l.3 = 2\left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + \text{etc.}\right] = 1 + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{80} + \text{etc.}$$

et par l'une ou l'autre supposition, on arrive à

$$l.3 = 1{,}0986123, \text{ etc.}$$

Pour le logarithme de 4, on multiplie par 2 celui de 2. Celui de 5 s'obtient de la même manière que celui de 3 ; puis celui de 10 en multipliant ce dernier par 2. On trouve ainsi,

$$l.10 = 2{,}3025851.$$

Connaissant le logarithme de 10, on a facilement

$$M = Le = \frac{1}{l.\,a} = 0{,}4342944819, \text{ etc.}$$

C'est alors que pour avoir le logarithme d'un nombre quelconque, de 16, par exemple, on divise son logarithme naturel, qui est 2,772589, par celui de $10 = 2{,}3025851$ ou qu'on le multiplie par 0,43429, etc., et l'on trouve

$$\text{log. (tabulaire) } 16 = 1{,}2041200.$$

40. Nous ne pourrons indiquer ici que très-sommairement la marche que l'on emploierait pour construire des tables de logarithmes des lignes trigonométriques.

Nous avons besoin de supposer connues les formules suivantes, démontrées aux §§ 73, 74 et 75, livre II.

$$\sin.x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$

$$\text{cosin.}x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

Remplaçons x par l'un de ses multiples, que nous pouvons représenter par $n\,x$, il viendra

$$\sin.\,nx = nx - \frac{n^3\,x^3}{2.3} + \frac{n^5\,x^5}{2.3.4.5} + \text{etc.}$$

$$\cos.\,nx = 1 - \frac{n^2\,x^2}{2} + \frac{n^4\,x^4}{2.3.4} - \text{etc}$$

Dans cette dernière, faisons cos. $nx = 1 - z$, nous aurons, en nous servant de la formule (5) du paragraphe précédent

$$\log.\cos.\ nx = -\,\mathrm{M}\,(z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 + \text{etc.})$$

M est, comme nous l'avons vu, le nombre par lequel il faut multiplier un logarithme naturel pour le convertir en logarithme vulgaire.

Prenons la valeur de

$$z = 1 - \cos.\ nx = \frac{n^2x^2}{2} - \frac{n^4x^4}{2.3.4} + \frac{n^6x^6}{2.3.4.5.6} - \text{etc.}$$

et substituons la dans celle de log. cos. nx, qui devient ainsi

$$\log.\cos.\ nx = -\,\mathrm{M}\left[\frac{n^2x^2}{2} - \frac{n^4x^4}{2.3.4} + \frac{n^6x^6}{2.3.4.5.6} + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2}\left(\frac{n^4x^4}{4} - \frac{n^6x^6}{2.3.4} + \text{etc.}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{n^6x^6}{8} - \text{etc.}\right)\right]$$

ou en réduisant

$$\log.\cos.\ nx = -\,\mathrm{M}\frac{x^2}{2}n^2 - \mathrm{M}\frac{x^4}{3.4}n^4 - \mathrm{M}\frac{x^6}{3.3.5}n^6 - \text{etc.}$$

On sait que sécante × cosinus = 1, et qu'ainsi

$$\log.\ \text{séc.} = \log.1 - \log.\cos. = 0 - \log.\cos.$$

Si donc on change tous les signes dans l'expression du logarithme du cosinus, on aura

$$\log.\ \text{séc.}\ nx = \mathrm{M}\frac{x^2}{2}n^2 + \mathrm{M}\frac{x^4}{3.4}n^4 + \mathrm{M}\frac{x^6}{3.3.5}n^6 + \text{etc.}$$

S'il s'agissait de mettre ces formules en pratique, de trouver, par exemple les logarithmes des cosinus, on remarquerait qu'en supposant $x = 1''$, sa valeur comparée à celle du rayon pris pour unité est la très-petite fraction 0,00000157, et qu'ainsi, les puissances 2e, 4e, 6e, etc., des multiples nx décroissant avec une rapidité extrême, on aura une valeur très-rapprochée de log. cos. en s'en tenant aux premiers termes de la série. Il y aura néanmoins une limite passé laquelle il faudra négliger d'autant moins de termes que n augmentera davantage. Dans ce cas, il y a des modifications à introduire, qui sont trop longues et d'un ordre trop élevé pour trouver place ici.

Dans la valeur de log. cos. $n x$, on cherche les termes séparément et par logarithmes : puis, pour abréger, on calcule les facteurs constants $\frac{Mx^2}{2}$, $\frac{Mx^4}{3.4}$, $\frac{Mx^6}{3^2.5}$, etc., aux logarithmes desquels on ajoute le double, le triple, etc., du logarithme de n.

On trouverait, par une marche analogue, le développement du log. du sinus, et par suite celui de la cosécante : puis en retranchant le log. cosinus, de log. sinus, on aurait log. tangente. Enfin, puisque $\text{tang.} = \frac{1}{\text{cotang.}}$, le développement de log. cot. sera égal au signe près à celui de tangente.

On ne calcule les logarithmes de ces lignes que jusqu'à 50^g, parce que celles des arcs compris entre 50^g et 100^g sont liées aux premières par la relation des arcs complémentaires.

Les lignes trigonométriques des angles, qui sont des rapports ou des nombres abstraits, sont pour les sinus et cosinus, toujours plus petites que l'unité. Pour les tangentes et cotangentes, ces lignes trigonométriques ne deviennent plus grandes que l'unité que dans certaines limites d'angles. Les logarithmes des sinus et cosinus seront donc toujours négatifs, ou positifs avec une caractéristique négative. Il en sera de même, dans certains cas, pour les tangentes et cotangentes. Pour éviter ces caractéristiques négatives dont l'introduction eût été incommode pour l'impression des tables, on a augmenté de 10 les logarithmes des sinus et cosinus dans tous les cas, et ceux des tangentes et cotangentes dans certains cas.

CHAPITRE X.

ÉCHELLES LOGARITHMIQUES OU RÈGLES A CALCUL.

41. Depuis longtemps déjà l'on fait usage de règles qui, par l'addition ou la soustraction de quantités linéaires, produisent les mêmes résultats que les additions et soustractions logarithmiques. Leur emploi est toujours plus simple que celui des logarithmes, pour la recherche desquels il faut constamment feuilleter des tables souvent très-volumineuses : il est moins exact, mais il suffit souvent. C'est donc à celui qui doit faire certains calculs à se rendre compte d'avance de la précision qu'exigent les opérations dont il s'occupe.

42. Voici le principe sur lequel repose la construction de l'échelle logarithmique.

Une longueur arbitraire AB (*fig.* 1, planche XIX) étant prise pour unité logarithmique, représentera le logarithme de 10. Ceux de 2,3..... 8,9 pourront être indiqués par des fractions convenables de AB. D'ailleurs le logarithme de 1 étant zéro, on écrira 1 à côté de A, et la distance totale AB sera partagée en parties proportionnelles aux logarithmes des nombres dont la notation sera inscrite à côté. Il est donc bien entendu que les chiffres représentent la suite des nombres naturels, dont les distances correspondantes au point de départ A sont les logarithmes.

En ajoutant sur la même droite et bout à bout plusieurs échelles semblables, il est évident que les longueurs AC, AD, AE représenteront les logarithmes de 100, 1000, 10000, tandis que les subdivisions donneront, en prenant toujours A pour point de départ, les logarithmes de 20, 30, etc., 200, 300, etc., 2000, 3000, etc., suivant la partie de l'échelle à laquelle elles appartiennent.

On peut encore écrire à côté de A, B, C, D, la caractéristique qui convient aux logarithmes qui suivent chacune de ces lettres. Ce serait 0 auprès de A, 1 près de B, 2 près de C, etc.

S'il s'agit de trouver le produit de deux nombres ou, en d'autres termes, la somme de leurs logarithmes, ceux de 20 et 30, par exemple, on prendra, avec un compas, la distance de A à 20; on la portera à la suite de 30, et la pointe du compas aboutira à une division dont la distance à A sera le logarithme de 600.

Quelle que soit la longueur que l'on donne à l'échelle, il y aura toujours des produits qui ne pourront pas y figurer; ainsi 300×80 ne pourra pas être obtenu directement sur la *fig.* 1. On cherchera alors sur cette même figure 30×80, et le produit trouvé, 2400, devra être multiplié par 10. En principe général, on déplacera la virgule des facteurs de façon à pouvoir faire usage de la règle, et on rétablira l'exactitude du résultat en effectuant les opérations inverses à la fin du calcul.

Une échelle ainsi divisée est propre à exécuter toutes les opérations de l'arithmétique qui se réduisent, en définitive, à des additions et à des soustractions de logarithmes; mais son usage exige l'emploi d'un compas dont les pointes détruiraient promptement la division qui doit pourtant être bien nette, sous peine de rendre les opérations défectueuses.

43. On évite cet inconvénient par l'adjonction d'une seconde règle glissant dans la première au moyen d'une coulisse. Chacune de ces règles A, A' porte un système de graduations identiques représentant les logarithmes des nombres compris entre 1 et 100, nombres qui sont écrits sur les règles aux points correspondant aux extrémités des longueurs qui, comptées à partir de A ou A', représentent les logarithmes de ces nombres, *fig.* 2, planche XIX. Pour faire la multiplication de deux nombres, N et N', on fait glisser la coulisse A' jusqu'à ce que son extrémité A' soit à la hauteur de N ; puis on cherche le nombre N' sur la coulisse, et la lecture M correspondante de la règle donne le produit MN, car

$$\log. M = AM = AN + A'N' = \log. N + \log. N'.$$

Pour faire la division de deux nombres M et N', on cherche le nombre M sur la règle, et on met vis-à-vis, la lecture N' de la coulisse ; le nombre N de la règle répondant à l'origine A' de la coulisse, donne bien le quotient cherché, car

$$\log. N = AN = AM - A'N' = \log. M - \log. N'.$$

Les nombres M, N, N' peuvent avoir des valeurs quelconques, en sorte que le produit des deux derniers peut être plus grand que 10, quoique chacun d'eux puisse toujours être ramené à être < 10, par le déplacement de la virgule, s'il y a lieu, déplacement qui nécessite l'opération inverse sur le produit. C'est afin de parer à cet inconvénient que les divisions de chaque règle ont été poussées jusqu'à 100.

Rien n'est plus simple que d'avoir le carré d'un nombre, il suffit de faire $N = N'$, dans les opérations précédentes.

Mais il n'en est plus de même de l'extraction de la racine carrée. Pour y arriver, et l'on simplifie encore indirectement la recherche des carrés par le même moyen, on établit une nouvelle graduation sur le bord B de la règle. Sur cette ligne on porte les logarithmes ou longueurs de la première règle, en les doublant, et on inscrit vis-à-vis le nombre répondant aux logarithmes simples, en sorte que toute la règle sera occupée par les nombres allant de 1 à 10, tandis que les longueurs correspondantes à ces chiffres seront les doubles de leurs logarithmes, ou les logarithmes de leurs carrés. Comme les nombres simples sont eux-mêmes écrits sur la ligne supérieure A' de la règle, il s'ensuit

qu'une même longueur $AN = BN''$ portera indication de deux nombres N et N'', dont le second N'' sera tel que

$$BN'' = AN = 2 \log. N''$$

et comme $AN = \log. N$, il en résultera

$$\log. N = 2 \log. N'' \quad N = N''^2.$$

Les nombres de la ligne inférieure seront donc les racines carrées des nombres situés à la même hauteur, sur la ligne supérieure. Il suffira d'amener l'extrémité de la coulisse à la hauteur du nombre N dont on veut extraire la racine carrée, et de lire le nombre correspondant de la ligne inférieure.

Pour se servir de cette partie inférieure de la règle, afin d'avoir le carré d'un nombre, il suffit d'effectuer l'opération inverse, c'est-à-dire qu'il faudra amener l'extrémité A' de la coulisse à hauteur du nombre N' de la ligne des carrés, et de lire N sur la ligne des nombres simples.

La même ligne, dite des carrés, servira encore pour la formation d'un cube, ou l'extraction d'une racine cubique.

S'il s'agit d'abord de former le cube de N'', on mettra la coulisse dans la position indiquée par la figure; le nombre N en sera le carré, qu'il suffira de multiplier encore par N', résultat auquel on arrivera en ajoutant, à son logaritbme AN celui de N'' lu sur la coulisse, comme il a été indiqué pour la multiplication. L'opération n'est plus aussi simple s'il s'agit de l'extraction de la racine cubique.

Supposons qu'après avoir retourné la coulisse, comme l'indique la *fig.* 3, pl. XIX, on ait amené son origine A' vis-à-vis de M, nombre dont on veut avoir la racine cubique. Cherchons sur la coulisse et sur la ligne des carrés, dont les gradations vont alors en sens inverses, les deux divisions portant le même chiffre N''. En vertu de la construction de la ligne des carrés, on aura

$$BN'' = 2 \log. N'' = 2 A'N''$$

par suite $$A'N = AM = A'N'' + BN'' = 3. A'N''$$

ou $$\log. M = 3 \log. N'' \quad N'' = \sqrt[3]{M}.$$

Les puissances supérieures à la 3e et les extractions correspondantes de racines ne seraient pas faciles à trouver avec la règle à calcul, si ce n'est par opérations successives; mais cet instru-

ment n'est appelé à résoudre que des problèmes simples pour lesquels ces opérations ne sont d'aucun usage.

44. Supposons prolongées à gauche les divisions logarithmiques de la première règle des nombres. Les longueurs Ab' Ac', égales à Ab Ac (*fig.* 4) seront les logarithmes de 10, de 100 ou ceux de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, si l'on convient de les prendre négativement. On pourra ainsi avoir les logarithmes d'une série indéfinie de fractions. Mais toute ligne trigonométrique d'un angle n'est autre chose qu'une fraction.

Si, au lieu d'écrire en b' et c' les nombres $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, on inscrit les angles qui ont ces nombres pour sinus, par exemple, et si l'on agit de même pour toutes les divisions, on aura, à compter du point A, et en les prenant négativement, les logarithmes des sinus de tous les angles allant de 100^g à une valeur proche de 0^g : nous disons proche de 0^g, car lorsque les angles deviennent très-petits, leurs sinus s'approchent beaucoup de zéro et les logarithmes de ceux-ci tendent vers ∞ négatif.

Supposons qu'après avoir inscrit la suite naturelle des angles, par les valeurs calculées des logarithmes de leurs sinus, on veuille multiplier un nombre N par le sinus de α; il suffira de prendre

$$\log. N. \sin.\alpha = \log. N + \log. \sin.\alpha = AN - A\alpha = AN - N\alpha' = AN'$$

et le produit se trouvera sur la ligne des logarithmes des nombres, en N', vis-à-vis de α'.

La division se ferait par l'opération inverse. Cette manière d'opérer exigerait l'emploi d'un compas. Pour éviter cet inconvénient, supposons qu'on prenne AP = AQ longueur totale de la règle des nombres, et que mettant les divisions logarithmiques des sinus sur une coulisse, on fasse glisser AP en A'P, *fig.* 5, le logarithme du sinus de l'angle α placé à hauteur du point Q, sera égal à $-A'\alpha$ ou à $-AP$.

Cette disposition permet de trouver de suite le produit ou le quotient d'un nombre par un sinus.

En effet, soit $N \times \sin.\alpha$. Le logarithme du produit sera

$$\log. N + \log \sin.\alpha = AN - AP = PN'.$$

On connaîtra immédiatement N', si à côté de la ligne A'P du sinus, et partant de l'origine P on a établi une seconde ligne des logarithmes des nombres, pareille à AQ.

La division se fera par l'opération inverse, c'est-à-dire qu'après avoir tiré la coulisse jusqu'à ce que l'angle α soit marqué à l'extrémité Q, on cherchera, sur la ligne des logarithmes des nombres de la coulisse, l'indication du multiplicateur numérique, et le produit se trouvera vis-à-vis, sur la ligne du log. des nombres de la règle. Pour ne pas donner trop d'épaisseur à la coulisse, les divisions logarithmiques des sinus sont incrites sur l'envers de cette coulisse; de sorte que pour amener α en contact avec Q, on retourne sans dessus dessous tout l'appareil; puis le renversant dans la position directe, on cherche sur les deux lignes des logarithmes placées en regard, les nombres N et N'.

Ce que nous venons de dire peut s'appliquer également à une ligne des logarithmes des tangentes d'angles compris entre 50^g et 0; au-dessus de 50^g les logarithmes deviendraient positifs. On se contente d'inscrire sur le revers de la coulisse, et sur une ligne parallèle à celle des sinus, les angles compris entre 50^g et une petite limite inférieure, en regard des longueurs telles que $A'\alpha$ qui représentent les logarithmes de leurs tangentes. Cela suffit, car on sait que les lignes trigonométriques d'angles plns grandes que 50^g peuvent être facilement ramenées à celles d'angles plus petits que cette limite. Cette remarque s'applique *à fortiori*, aux sinus que la règle donne jusqu'à 100^g.

Les règles construites jusqu'à ce jour, l'ont été par rapport à la division sexagésimale, du moins en très-grande majorité.

45. Les sinus et tangentes d'angles proches de 0, dont les logarithmes auraient eu une valeur absolue trop grande, n'ont pas pu être inscrits sur les règles. Lorsqu'il y aura lieu de se servir de ces angles, on les regardera, sans grande erreur, comme se confondant avec leurs sinus ou leurs tangentes, et on les traitera comme des nombres abstraits, en se rappelant que $1^g = 0{,}0157$ en nombre, ce qui forcera à introduire ce facteur partout où figurera nn nombre de grades. Ainsi

$$N \times \sin.0^g{,}50 = N \times 0{,}5 \times 0{,}0157.$$

Si l'unité angulaire est la minute, on aura

$$N \times \sin.50' = N \times 50 \times 0{,}000157.$$

Nous terminerons en rappelant que la construction de ces

règles ne pouvant pas être parfaite, le bois qui sert à leur fabrication jouant toujours un peu, et les opérations graphiques étant entachées d'erreurs inévitables, il ne faut pas exiger d'elles des résultats très-exacts.

LIVRE II.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

BUT DE LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE, NOTIONS PRÉLIMINAIRES : PYRAMIDE SUPPLÉMENTAIRE : PROPRIÉTÉS D'UN TRIANGLE : CAS D'ÉGALITÉ : ÉGALITÉ DE SURFACE DES TRIANGLES SYMÉTRIQUES : SURFACE D'UN FUSEAU : SURFACE D'UN TRIANGLE EN FONCTION DE SES TROIS ANGLES.

46. La trigonométrie rectiligne a fait connaître ce que l'on entend par sinus, cosinus, tangente, etc., des angles ou des arcs de cercles qui les mesurent; quelles sont les lois qui lient ces lignes entre elles; les signes qu'elles prennent suivant l'amplitude des arcs auxquels elles appartiennent; les relations qui, dans un triangle, existent entre les lignes trigonométriques des angles et les côtés; de là, la résolution des triangles rectangles ou obliquangles, l'expression de leur surface, etc.

Le but de la trigonométrie sphérique est analogue. Elle s'occupe des triangles formés par des arcs de grands cercles, sur la surface de la sphère.

Les formules qu'elle enseigne sont d'un fréquent usage en géodésie et en astronomie.

47. Un triangle sphérique est une portion de la surface de la sphère comprise entre trois arcs de grands cercles. Pour trouver les relations qui existent entre ses angles et ses côtés, on considère la pyramide dont le centre de la sphère est le sommet et qui a pour arêtes les rayons aboutissant au sommet du triangle. Ses angles plans sont égaux aux côtés du triangle, c'est-à-dire mesurés par eux, et les angles dièdres sont précisément les mêmes que ceux du triangle : en effet, au sommet A, *fig.* 6, menons les tangentes $A\alpha$, $A\beta$: l'angle qu'elles forment entre elles est évidemment égal à l'angle A du triangle et comme elles sont

perpendiculaires au rayon AO, commune intersection des deux plans AOB, AOC, elles mesurent également l'angle qu'ils font entre eux.

48. Si par les sommets A, B, C (*fig.* 7), on mène 3 plans tangents à la sphère, ils forment une nouvelle pyramide que l'on nomme supplémentaire, parce que ses angles plans sont suppléments des angles dièdres de la première et réciproquement.

Ces trois plans tangents contenant les tangentes aux arcs de cercle, les points A', B', C', appartiendront aux intersections de ces plans pris deux à deux.

Comme trois plans ne peuvent se rencontrer qu'en un point, soit S', ce point qui pourra être considéré comme le sommet d'une pyramide dont les arêtes seront S'A', S'B', S'C', et dont les angles plans seront a', b', c'; quant à ses angles dièdres, ils ne seront autres que AB'C, CA'B, AC'B. En effet, S'B', intersection des deux plans tangents en A et C, tous deux perpendiculaires à ASC, sera perpendiculaire à ce plan, et par suite aux lignes AB' et CB' qu'il renferme.

La ligne S'C' sera de même perpendiculaire à AC' et BC'. En considérant les quadrilatères plans SAB'C et AB'S'C', on verra qu'ils renferment chacun deux angles droits, et que par conséquent les deux autres angles sont supplémentaires, c'est-à-dire que $B' = 200 - b$, $a' = 200 - A$.

On pourra donc écrire, en appelant A, B, C, a, b, c, les éléments de l'une, et A', B', C', a', b', c', ceux de l'autre.

$$a = 200^g - A',\ b = 200^g - B',\ c = 200^g - C',\ a' = 200 - A,\ b' = 200 - B,\ c' = 200 - C$$

49. Dans tout triangle sphérique, un côté est toujours plus petit que la somme des deux autres. Si $a + b = c$, la courbure étant la même pour tous les arcs de grands cercles, il y aura superposition : ainsi le tiangle se réduira à une ligne. En effet, par deux points de la sphère, on ne peut faire passer qu'un seul arc de grand cercle déterminé par le plan passant par ces deux points et par le centre. Si le centre se trouve sur la droite qui les unit, celle-ci devient un diamètre et peut être l'intersection commune à une infinité de plans méridiens. La surface comprise alors entre les arcs n'est plus un triangle, mais un fuseau. Le triangle serait plus impossible encore si $a + b < c$.

50. Pour faire voir que la somme des 3 côtés est moindre

qu'une circonférence, soit ABC le triangle et ABD, ACD, les deux demi-circonférences dont les côtés b et c font partie. Nous venons de voir que toujours $a < BD + CD$: ajoutant de part et d'autre $b + c$, il vient $a + b + c < b + c + BD + CD$. Le second membre de l'inégalité vaut une circonférence, donc $a + b + c < 400^g$.

Il est évident que $b + CD = 200^g$ et $c + BD = 200$, car les points A et D appartiennent à l'intersection des deux plans, et cette intersection est un diamètre qui partage en deux parties égales les circonférences auxquelles il appartient.

51. La somme des 3 angles est toujours plus grande que 200^g et plus petite que 600^g : en effet, au moyen de la pyramide supplémentaire, l'inégalité ci-dessus se transforme en celle-ci :

$$200 - A' + 200 - C' + 200 - B' < 400$$

$$600^g - (A' + B' + C') < 400 \quad \text{et enfin} \quad A' + B' + C' > 200.$$

Ce qui est démontré pour l'une des pyramides l'est également pour l'autre. Comme il est évident que chaque angle est plus petit que 200^g, il s'ensuit que la somme des 3 est moindre que 200^g.

52. Examinons actuellement les différents cas d'égalité des triangles. De même que les rectilignes, les triangles sphériques sont égaux entre eux, étant tracés sur une même sphère ou sur des sphères de rayons égaux, lorsqu'ils ont :

1° Les côtés homologues adjacents à 2 angles égaux, égaux;

2° Un angle égal compris entre des côtés égaux;

3° Les 3 côtés égaux;

4° Mais de plus, ils le sont encore, quand ils ont les trois angles respectivement égaux chacun à chacun, en supposant toujours qu'ils sont tracés sur des sphères de même dimension; sinon ils seraient seulement semblables.

1° $A = D$, $C = F$, $b = e$. Les côtés b, e (*fig.* 9) étant égaux en longueur et de même courbure, peuvent se superposer de manière que leurs extrémités coïncident; de plus, f s'appliquera sur c, puisque $A = D$; d se placera de même sur a, parce que $C = F$: ils se couperont donc en un même point, et par suite tous les côtés et les angles seront égaux.

2° $A = D$, $b = e$, $c = f$. L'angle D étant égal à l'angle A, les côtés adjacents pourront se superposer, et leurs extrémités coïncideront, parce qu'ils sont de même longueur. E tombera donc

en B et F en C. Les côtés a et d, qui joignent ces points, se confondront, et, dans ce cas encore, l'égalité des triangles est évidente.

3° Démontrons que les triangles sont égaux lorsque les 3 côtés le sont, c'est-à-dire qu'alors les angles le sont aussi; et pour cela envisageons les pyramides qui ont les triangles pour bases et leurs sommets aux centres des sphères.

Des points A et D (*fig.* 10) abaissons deux perpendiculaires sur les faces opposées et par ces lignes faisons passer des plans perpendiculaires aux deux arêtes qui aboutissent aux deux autres angles des triangles. Ils couperont les faces des pyramides suivant des lignes dont l'inclinaison entre elles mesurera les angles dièdres. Le problème est ainsi ramené à démontrer que

$$AGM = DIN \quad \text{et} \quad AHM = DKN.$$

Les points A et D étant deux sommets homologues des triangles, $AP = DO$ comme rayons de deux sphères égales. Les angles plans APG, DOI sont égaux puisqu'ils sont mesurés par des côtés de triangles donnés égaux : donc les triangles rectangles AGP, DOI sont égaux et fournissent $AG = DI$, $GP = OI$.

On trouverait de même, au moyen des triangles APH, DCK, que $AB = DK$, $PH = OK$.

Les quadrilatères PGMH, OINK seront égaux par la raison qu'ils ont les angles en P et en O égaux compris entre côtés égaux, et les angles G, H, L, K droits : nous aurons donc $GM = IN$, $MH = NK$. Si maintenant nous considérons les triangles AGM, DIN, nous voyons qu'ils sont rectangles en M et N, puisque AM et DN, normales aux deux faces opposées à D et A, sont perpendiculaires à toutes les droites passant par leurs pieds dans ces plans : ces triangles ont en outre les côtés $AG = ID$, $GM = IN$, donc ils sont égaux, donc $AGM = DIN$: et enfin les angles dièdres des pyramides ou les angles correspondants des triangles sphériques sont égaux aussi.

4° De là, et au moyen de la pyramide supplémentaire, on tire cette conséquence, que deux triangles sphériques sont égaux lorsque leurs angles le sont. Supposons en effet que l'on ait

$$A = D, \quad B = E, \quad C = F.$$

Substituons les valeurs de ces angles déduites des relations des pyramides directe et supplémentaire : il viendra

$$200 - a' = 200 - d', \quad 200 - b' = 200 - e', \quad 200 - c', = 200 - f'$$

et par suite $a' = d'$, $b' = e'$, $c' = f'$: donc les côtés des triangles qui servent de bases aux pyramides supplémentaires sont égaux, quand les angles des triangles donnés le sont. Par suite, les angles A', B', C' sont égaux à D', E', F' et enfin, en substituant à ces angles leurs équivalents

$200 - a = 200 - d$, etc. ou simplement $a = d,\ b = e,\ c = f.$

53. Deux triangles symétriques sont équivalents en surface. On dit que des triangles sont symétriques lorsqu'ils ont leurs côtés égaux, mais placés les uns par rapport aux autres, de telle sorte qu'ils ne peuvent pas se superposer. D'abord la démonstration précédente pouvant s'appliquer également à la circonstance particulière que nous considérons, il en résulte que ces triangles ont aussi les angles égaux. Cette conséquence se tirerait encore de ce qui suit. Pour mettre en évidence l'égalité de leurs surfaces, faisons passer un petit cercle par les 3 points A, B, C de l'un (*fig.* 11) et opérons de même par rapport au second triangle A'B'C'. Si, par les centres de ces petits cercles, on élève des perpendiculaires à leurs plans, elles perceront les sphères en des points P, P', qui seront les pôles de ces petits cercles et conséquemment à égale distance des sommets de triangles. Imaginons les arcs de grands cercles PA, PB, PC d'une part, et P'A', P'B', P'C' de l'autre, tous égaux entre eux. Ils divisent les triangles donnés, chacun en 3 triangles partiels, qui sont égaux et superposables : en effet, les triangles ABP, B'A'P' sont égaux comme ayant les 3 côtés égaux chacun à chacun : ils sont isocèles, donc les angles BAP, ABP, B'A'P', A'B'P' sont égaux. Dès lors nous pouvons placer ces deux triangles l'un sur l'autre, l'angle A'B'P' couvrant BAP. De la même manière, les triangles APC, A'P'C' : donc enfin deux triangles symétriques sont égaux en surface. Ajoutons que les deux angles en lesquels ont été décomposés chacun de ceux des triangles proposés, étant égaux, les angles homologues A et A', B et B', C et C' le sont aussi.

54. On démontre en géométrie élémentaire qu'un fuseau est mesuré par son angle. La surface du fuseau NPMQ (*fig.* 12) sera donc exprimée par

$$F(M) = C \times M$$

M étant son angle et C un coefficient constant, mais dépendant du genre d'unités employées dans l'expression de M.

Pour trouver la valeur de ce coefficient C, considérons un cas

particulier dans lequel la surface est connue, par exemple celui de la demi-sphère, qui n'est autre qu'un fuseau dont l'angle est égal à deux droits. On aura

$$F(2^{dr}) = C.\,2^{dr} = 2\pi r^2$$

d'où
$$C = \frac{\pi r^2}{1^{dr}}$$

mais π rapport de la demi-circonférence au rayon est égal à deux angles droits,

donc $C = 2r^2$ et $F(M) = 2r^2 M$.

Pour que cette formule soit homogène, il faut que le second membre qui représente une surface soit du 2e degré, et que par conséquent M soit un rapport.

55. Un angle n'est, en effet, qu'un rapport, celui de l'arc au rayon; mais si on exprimait ainsi les angles, l'idée qui en résulterait serait souvent confuse, et on a cherché à les exprimer en fonction d'une unité jouant pour les angles le rôle qui est joué par le mètre dans la mesure des longueurs. De là est née l'idée du grade, de la minute et de la seconde antésimales, comme celle du degré, de la minute et de la seconde sexagésimale.

On comprend de suite que les formules dans lesquelles entrent des angles ne peuvent pas être indépendantes du choix de l'expression de ces angles. Il est souvent indispensable de remplacer un angle que le problème a présenté sous la forme de rapport, par son expression en grades, en minutes ou en secondes, et *vice versâ*.

Soit $\frac{a}{r}$ un angle donné par un rapport.

Désignons par $1''$ le rapport qui mesure l'angle de $1''$ et proposons-nous de savoir combien l'angle $\frac{a}{r}$ contient de secondes. Il suffira de remarquer que l'angle $\frac{a}{r}$ contiendra autant de secondes que le rapport qui le mesure contiendra de fois le rapport qui mesure l'angle de $1''$. Il sera donc exprimé par un nombre de secondes égal à

$$\frac{a}{r} : 1'' = \frac{a}{r.1''} = \frac{a}{r \sin. 1''}$$

si on remarque que la seconde et son sinus sont assez peu différents pour pouvoir être confondus dans tous les calculs. La deuxième expression a l'avantage de rappeler qu'il s'agit d'un rapport.

Pour transformer un angle donné en rapport, en un nombre correspondant de secondes, il suffit donc de le diviser par le sinus de 1'.

Le même raisonnement indiquerait que pour obtenir ce même angle en grades ou en minutes, il faudrait diviser le rapport qui le représente par le rapport qui représente le grade ou la minute.

Réciproquement si l'on a besoin de passer de l'expression d'un angle donné en grades, minutes ou secondes, à son expression en rapport, il faudra multiplier par le rapport qui représente le grade, la minute ou la seconde.

56. Il est souvent utile de connaître la surface d'un triangle sphérique, entr'autres cas en géodésie. L'examen de la figure 13 fait voir que la demi-sphère est égale à la somme des trois fuseaux dont les angles sont ceux du triangle, diminuée de deux fois la surface de ce triangle ; ce qu'on peut écrire :

$$\tfrac{1}{2}\,\text{sph.} = F(A) + F(B) + F(C) - 2\,Tr.$$

Le paragraphe 54 nous a appris à connaître la surface d'un fuseau. Appliquons-en les principes au cas actuel, et nous aurons

$$2\pi r^2 = 2\,r^2\,(A+B+C) - 2\,T$$

$$T = r^2\,(A+B+C-\pi)$$

A, B, C sont exprimés en rapport, comme l'est, du reste, le double angle droit, par π.

La différence $A + B + C - \pi$ est ce qu'on appelle l'excès sphérique. Le plus habituellement les angles étant connus en grades, minutes ou secondes, l'excès sphérique est exprimé de la même manière.

Supposons que A'B'C' soient les nombres de grades contenus dans les angles A, B, C ; il faudra passer de la connaissance de ces nombres A' B' C' à celle des rapports A, B, C.

Mais nous savons par le paragraphe 55 que

$$A' = \frac{A}{\text{rapp. } 1^g} \quad B' = \frac{B}{1^g} \quad C' = \frac{C}{1^g}.$$

Il s'ensuit que $A+B+C=(A'+B'+C')\times 1^{g}$

et que la surface du triangle peut s'écrire

$$T=r^{2}\left(A'+B'+C'-\frac{\pi}{1^{g}}\right)\times 1^{g}.$$

Mais π renferme 200 fois le rapport qui représente le grade;

donc $$T=r^{2}\,1^{g}\,(A'+B'+C'-200)=r^{2}\,1^{g}\,\varepsilon$$

$\varepsilon=A'+B'+C'-200$ est ici l'excès sphérique exprimé en grades.

Les triangles géodésiques ont toujours de très-petits excès sphériques qui, pour cette cause, sont habituellement écrits en prenant la seconde pour unité.

Dans ce cas, l'expression de la surface sera

$$T=r^{2}\sin.1''\,\varepsilon''$$

expression à laquelle on arriverait directement, comme nous l'avons fait pour le cas précédent, ou que l'on peut déduire de ce cas, en remarquant que si au lieu de l'excès sphérique ε donné en grades, on met sa valeur en secondes ε'', qui est 10000 fois plus grande, dans l'expression

$$T=r^{2}\,1^{g}\,\varepsilon$$

il faudra diviser par 10000, ce qui donnera

$$T=r^{2}\,\frac{1^{g}}{10000}\,\varepsilon''=r^{2}\,1''\,\varepsilon''$$

$$T=r^{2}\sin.1''\,\varepsilon''.$$

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

57. Nous avons vu que trois des six éléments d'un triangle sphérique étant connus, on pouvait déterminer les trois autres. Cherchons donc les formules qui, établissant des relations entre quatre

éléments d'un triangle, permettent de déterminer l'un d'eux en fonction des autres. Il faut trouver les relations essentiellement distinctes qui existent entre les six éléments combinés quatre à quatre. Ces combinaisons, qui sont au nombre de quinze, se réduisent à 4 cas différents. (Nous verrons plus tard, à l'occasion du binôme de Newton, que le nombre de produits de m, quantités prises quatre à quatre, est égal à $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}$. Ici $m=6$, ce qui donne $\frac{360}{24}=15$.)

1° Deux angles et les deux côtés opposés

A. B. a. b... A. C. a. c... B. C. b. c.

2° Trois côtés et un angle

a. b. c. A... a. b. c. B... a. b. c. C.

3° Trois angles et un côté

A. B. C. a.... A. B. C. b.... A. B. C. c.

4° Deux angles et deux côtés

A. B. a. c.... A. B. b. c.... A. C. a. b.
A. C. c. b.... B. C. a. b.... B. C. a. c.

58. Pour trouver la formule qui lie entre eux deux angles et les côtés opposés, nous allons employer la pyramide directe et supposer ses trois faces rabattues sur le plan de l'une d'elles KOK' (*fig.* 14). Mettons en évidence tous les éléments développés dans ce plan. Considérons un point de l'arête dans l'espace, dont la projection sera M. La distance de ce point que nous supposons l'un des sommets du triangle, au centre O de la sphère, sera R ou l'unité. Par la perpendiculaire abaissée de ce sommet et aboutissant en M, imaginons deux plans respectivement perpendiculaires aux arêtes OK et OK'. Les traces MKG, MK'G' seront en même temps les rabattements des intersections des faces de la pyramide par ces plans ; si actuellement nous opérons un nouveau rabattement, celui des deux plans autour de leurs traces MG et MG', le sommet opposé à la face KOK viendra en C et en C' : les droites CK, C'K' seront égales à GK, G'K et les angles A et B seront la mesure des deux angles dièdres ou des angles correspondants du triangle : CM sera de même longueur que C'M, puisque tous

deux représentent la perpendiculaire abaissée d'abord sur la face KOK′.

Dans les triangles CMK, C′MK′, on a

$$CM = CK \sin.A \quad \text{et} \quad C'M = C'K' \sin.B.$$

Mais

$$CK = GK = GO \sin.b = R \sin.b, \qquad C'K' = G'K' = G'O \sin.a = R \sin.a$$

donc enfin $\quad R \sin.A \sin.b = R \sin.B \sin.a$

ou simplement $\quad \sin.A \sin.b = \sin.B \sin a \quad (1)$

ce qui nous apprend que, dans un triangle sphérique, les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés opposés. Cette relation, analogue à celle qui existe dans un triangle rectiligne, est toute préparée pour l'emploi des logarithmes.

59. 2° Pour trouver la relation entre trois côtés et un angle, nous nous servirons de la même figure, en y ajoutant les deux droites ML, KT parallèles à OK, MK′. Nous allons, pour simplifier et comme nous ferons à l'avenir, supposer que OG et OG′ rayons de la sphère sur laquelle est tracé le triangle, sont égaux à l'unité. Nous avons, dans la démonstration précédente, négligé cette convention pour faire voir que la formule a lieu, quel que soit le rayon. Dans ce cas, $OK = \cos.a$.

Décomposant cette ligne en ses deux parties OT et TK′, nous trouverons dans le triangle OTK rectangle en T, que $OT = OK \cos.c$, mais $OK = \cos.b$, donc $OT = \cos b \cos.c$. Ensuite, puisque $TK = LM$ comme parallèles comprises entre parallèles, nous pouvons écrire, en remarquant encore que les angles MKL, KOT, sont égaux, comme compris entre des lignes respectivement perpendiculaires

$TK' = KM \sin.c$; $\quad$ mais $\quad KM = KC \cos.A = GK \cos.A = \sin.b \cos.A.$

donc $\quad TK' = \sin.b \sin.c \cos.A$

et enfin $\quad \cos.a = \cos.b \cos.c + \sin.b \sin.c \cos.A \quad \ldots\ldots \quad (2)$

60. 3° Cette formule donnera de suite la relation entre trois angles et en côté au moyen de la pyramide supplémentaire : car en substituant à A, *a*, *b*, *c* leurs valeurs, il viendra

$$\cos.(200 - A') = \cos.(200 - B')\cos.(200 - C') + \sin.(200 - B')\sin.(200 - C')\cos.(200 - a')$$

Les cosinus des angles supplémentaires sont égaux et de signes contraires, tandis que les sinus, égaux aussi, sont de même signe : donc en supprimant les accents,

$$-\cos.A = \cos.B \cos.C - \sin.B \sin.C \cos.a. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

61. 4° Il reste à résoudre le 4e cas, dans lequel il faut combiner deux angles et deux côtés, l'un opposé, l'autre adjacent : A, B, b, c, par exemple.

C'est encore au moyen de la figure 14 que nous allons trouver la formule.

Pour cela, considérons le triangle OKT, dans lequel

$$KT = OK \sin.c \quad \text{ou} \quad KT = \cos.b \sin.c$$

puisque OG représentant le rayon de la sphère, le triangle OKG fournit bien $OK = \cos.b$.

Décomposons actuellement KT en ses deux parties KL et LT, que nous allons apprécier en fonction des quantités qui doivent être mises en évidence et combinées entre elles pour résoudre le problème.

$$KL = KM. \cos.c = KC. \cos.A \cos.c = \sin.b. \cos.c. \cos.A$$

$$LT = MK' = C'K'. \cos.B = \sin.a. \cos.B$$

donc $\quad KT \quad \text{ou} \quad \cos.b \sin.c = \sin.b. \cos.c. \cos.A + \sin.A. \cos.B$

ou, en divisant le tout par $\sin.b$,

$$\cot.b \sin.c = \cos.c. \cos.A + \frac{\sin.a}{\sin.b} \cos.B$$

Ne devant laisser en évidence que b, c, A, B, il faut éliminer $\sin.a$ au moyen de sa valeur $\sin.b \frac{\sin.A}{\sin.B}$ ce qui donne pour relation finale entre les données

$$\cot.b. \sin.c = \cos.c. \cos.A + \sin.A \cot.B. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Cela peut encore se déduire de la formule (2) ou plutôt de $\cos.b = \cos.a. \cos.c + \sin.a. \sin.c \cos.B$, dans laquelle on introduit A et l'on élimine a ; substituons-y, pour $\cos.a$, sa valeur

$$\cos.b. \cos.c + \sin.b \sin.c. \cos.A$$

et pour $\sin.a$, son équivalent $\sin.b\frac{\sin.A}{\sin.B}$ il viendra successivement

$$\cos.b = \cos.b.\ \overline{\cos}^2.c + \sin.b.\ \sin.c.\ \cos.c.\ \cos.A + \sin.a.\ \sin.c.\ \cos.B$$

$$\cos.b\ \overline{\sin}^2.c = \sin.b.\ \sin.c.\ \cos c.\ \cos.A + \sin.a.\ \sin.c.\ \cos.B$$

divisant tout par $\sin.c$,

$$\cos.b.\ \sin.c = \sin.b.\ \cos.c.\ \cos.A + \sin.a.\ \cos.B$$

ou $$\cos.b.\ \sin.c = \sin.b.\ \cos.c.\ \cos.A + \sin.b.\ \sin.A\ \cot.B$$

et enfin $$\cot.b\ \sin.c = \cos.c.\ \cos.A + \sin.A.\ \cot.B \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

Telles sont les quatre formules générales propres à la résolution des triangles sphériques. La première seule n'a pas à subir de transformation pour être résolue par logarithmes. Les autres doivent, dans la pratique, être modifiées ou remplacées par de nouvelles, suivant les circonstances particulières qui se présentent.

62. Modifions les formules générales pour le cas où le triangle à résoudre est rectangle.

Puisque la somme des trois angles d'un triangle sphérique est comprise entre 200^g et 600^g, il s'ensuit qu'un triangle peut avoir un, deux et même trois angles droits ; mais nous n'aurons à nous occuper que du premier cas. En effet, s'il est bi-rectangle, les côtés opposés aux angles droits sont égaux entre eux et au quart de la circonférence : sa surface est la moitié de celle du fuseau dont l'angle dièdre est mesuré par le troisième côté, puisque

$S = r^2(A + B + C) - \pi r^2$ se modifie en $S = r^2(A + \frac{1}{2}\pi r + \frac{1}{2}\pi r) - \pi r^2 = A r^2$

Si, parmi les éléments connus d'un tel triangle, il n'entre pas l'angle A ou le côté a qui en est la mesure, le problème est indéterminé, c'est-à-dire qu'une foule de solutions satisferont à la condition des deux angles droits auxquels sont opposés deux quarts de circonférence.

Si le triangle est tri-rectangle, les trois côtés sont égaux au quart de la circonférence. Quant à sa surface, elle devient

$$S = r(\tfrac{1}{2}\pi r + \tfrac{1}{2}\pi r + \tfrac{1}{2}\pi r) - \pi r^2 \quad \text{ou} \quad S = \tfrac{1}{2}\pi r^2;$$

mais $4\pi r^2$ exprime la surface de la sphère entière, donc celle du triangle en est le huitième.

En supposant $A = 100^g$ on a $\sin.A = 1$, $\cos.A = 0$,

la première formule devient

$$\sin.a \sin.B = \sin.b \quad \text{ou} \quad \sin.a = \frac{\sin.b}{\sin.B}$$

c'est-à-dire que le sinus de l'hypothénuse est égal au rapport de ceux de l'un des côtés de l'angle droit et de l'angle opposé.

La deuxième se réduit à $\cos.a = \cos.b \cos.c.$

Elle indique que le cosinus de l'hypothénuse égale le produit de ceux des deux autres côtés.

La troisième devient $\cos.a = \text{cotang.}B \text{ cotang.}C.$

La quatrième enfin $\text{cotang.}a = \text{cosin.}B \text{ cotang.}c.$

Ces quatre formules ne sont pas les seules que l'on puisse déduire des quatre ou du moins des troisième et quatrième. Il est indifférent que, dans la première, ce soit A ou B qui vaille 100^g, puisqu'elle est symétrique par rapport à ces deux angles. La seconde ne renfermant que A, n'éprouvera aucune modification dans l'hypothèse de B ou C droits.

Supposons actuellement $B = 100^g$, l'équation (3) deviendra

$\cos.A = \sin.C \cos.a$ et l'équation (4) $\text{cotang } a \sin c = \text{cotang.}A.$

Pour les pouvoir comprendre dans les mêmes notations que les précédentes où a représente l'hypothénuse et A l'angle droit, changeons dans les deux dernières A en B, a en b, et écrivons

$$\cos.B = \sin.C \cos.b \quad \text{et} \quad \text{cotang.}b \sin.c = \text{cotang.}B.$$

Il est inutile de supposer $C = 100^g$, puisque la troisième équation fondamentale est symétrique par rapport à B et C, et que C n'entre pas dans la quatrième.

Rapprochant ces formules, nous avons donc pour la résolution des triangles rectangles :

1 $\sin.a \times \sin.B = \sin.b.$	4 $\text{cotang.}a = \cos.B \times \text{cotang.}c.$
2 $\cos.a = \cos b \times \cos.c.$	5 $\cos.B = \sin.C \times \cos.b.$
3 $\cos.a = \cot.B \times \cot.C.$	6 $\text{cotang } b \sin c = \text{cotang.}B.$

Nous remarquons que, composées de facteurs seulement, elles sont favorables à l'emploi des logarithmes. C'est par ce motif que nous nous en servirons bientôt pour trouver de nouvelles formules relatives à la résolution des triangles obliquangles.

CHAPITRE III.

RECHERCHE DES FORMULES PROPRES A LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES A L'AIDE DES LOGARITHMES.

63. Les formules générales réduisent à quatre cas distincts les quinze combinaisons que produisent quatre à quatre les six éléments d'un triangle. La question n'est plus aussi restreinte, lorsqu'il s'agit de la résolution réelle et pratique : quand on veut faire usage des logarithmes qui, comme on le sait, abrègent et facilitent beaucoup les calculs,

1° La formule (1) résout indistinctement le problème, quelle que soit l'inconnue a, b, A ou B.

2° Le second cas (a, b, c et A) donne naissance à quatre problèmes : l'angle en fonction des trois côtés ; le côté opposé à l'angle en fonction de cet angle et des deux autres côtés ; enfin l'un ou l'autre de ces deux côtés en fonction des trois autres quantités.

Résolvons le premier et pour cela reprenons la formule (2) de laquelle nous tirons

$$\cos.A = \frac{\cos.a - \cos.b \times \cos c}{\sin.b \times \sin.c}. \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Il s'agit de réduire le numérateur du second membre à n'être composé que de facteurs. L'artifice de calcul que l'on emploie consiste à ajouter l'unité aux deux membres de l'équation, ce qui donne, en réduisant au même dénominateur

$$1 + \cos.A = \frac{\sin.b \sin c + \cos.a - \cos.b \cos c}{\sin.b \sin.c} = \frac{\cos.a - \cos.(b+c)}{\sin.b \sin.c}$$

la trigonométrie rectiligne nous a donné

$$1 + \cos.A = 2\cos.^2 \tfrac{1}{2} A \quad \text{et} \quad \cos.q - \cos.p = 2 \sin.\tfrac{1}{2}(p+q) \sin.\tfrac{1}{2}(p-q)$$

donc en comparant q à a et p à $b+c$

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin.\frac{1}{2}(a+b+c) \sin.\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin.b \sin.c}$$

Cette formule résout le problème. On trouve de même en retranchant de l'unité les deux membres de (7)

$$1 - \cos.A = 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\cos(b-c) - \cos.a}{\sin.b \sin.c} =$$

$$\frac{2 \sin.\frac{1}{2}(a+b-c) \sin.\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin.b \times \sin.c}.$$

En divisant $\sin.^2 \frac{1}{2}$ A par $\cos.^2 \frac{1}{2}$ A et extrayant la racine carrée, on trouve

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(a+b-c)\sin.\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin.\frac{1}{2}(a+b+c)\sin.\frac{1}{2}(b+c-a)}}.$$

Il semblerait qu'il y a surabondance dans la recherche de trois formules qui amènent à un même résultat, la détermination de A, si l'on ne remarquait qu'il faut passer par les deux premières pour arriver à la troisième, et que celle-ci est préférable aux autres, parce qu'elle convient, quelle que soit l'amplitude de l'angle. Si l'on se reporte à la marche que suivent les sinus et cosinus des arcs, on observe que ces derniers étant très-petits, les sinus varient rapidement, tandis que les cosinus successifs sont sensiblement les mêmes : c'est le contraire pour les arcs voisins de 100ᵍ. Dans le premier cas, on ne saurait employer les cosinus dont la différence n'est sensible à la septième décimale du logarithme que pour une variation assez notable de l'arc. Dans le second cas, c'est l'emploi du sinus qu'il faut rejeter, tandis que les tangentes croissant de plus en plus rapidement de 0 à 100ᵍ conviennent toujours.

On pourrait encore alléguer, comme motif de la préférence accordée à la formule qui détermine un angle par sa tangente, que les logarithmes des quatre sinus qui entrent sous le radical serviront également, si l'on veut, à trouver chacun des trois angles du triangle, en permutant ensemble trois d'entre eux, c'est-à-dire en les faisant passer alternativement au numérateur et au dénominateur.

64. Malgré la préférence que nous accordons à la formule qui détermine un angle par sa tangente, il nous paraît convenable, pour compléter le sujet qui nous occupe en ce moment, d'indiquer la formule qui donnerait l'angle A lui-même par son sinus,

Pour y arriver, nous trouvons successivement

$$\overline{\sin.}^2 A = 1 - \overline{\cos.}^2 A = 1 - \left(\frac{\cos.a - \cos.b \times \cos.c}{\sin.b \times \sin.c}\right)^2 =$$

$$\left(1 - \frac{\cos.a - \cos.b \times \cos.c}{\sin.b \times \sin.c}\right)\left(1 + \frac{\cos.a - \cos.b \times \cos.c}{\sin.b \times \sin.c}\right)$$

$$\overline{\sin.}^2 A = \frac{(\sin.b \times \sin.c + \cos.b \times \cos.c - \cos.a)\,(\sin.b \times \sin.c - \cos.b \times \cos.c + \cos.a}{\overline{\sin.}^2 b \times \overline{\sin.}^2 c}$$

$$= \frac{[\cos.(b-c) - \cos.a)\,(\cos.a - \cos.(b+c)]}{\overline{\sin.}^2 b \times \overline{\sin.}^2 c} =$$

$$\frac{4 \sin.\tfrac{1}{2}(a+b-c)\sin.\tfrac{1}{2}(a+c-b)\sin.\tfrac{1}{2}(b+c-a)\sin.\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{\overline{\sin.}^2 b \times \overline{\sin.}^2 c}$$

et enfin $$\sin.A = \frac{2}{\sin.b \times \sin.c} \times$$

$$\sqrt{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b-c)\sin.\tfrac{1}{2}(a+c-b)\sin.\tfrac{1}{2}(b+c-a)\sin.\tfrac{1}{2}(a+b+c)})$$

Cette formule aurait pu également se trouver en fonction des valeurs de sin. $\frac{1}{2}$ A et cosin. $\frac{1}{2}$ A, et d'après ce que l'on sait que

$$\sin.A = 2\sin.\tfrac{1}{2}A \cosin.\tfrac{1}{2}A$$

Si l'on divisait de part et d'autre par sin. a, le second membre devenant symétrique par rapport à a, b, c, il en résulterait que le rapport entre les sinus d'un angle et du côté opposé étant constant, on aurait $\frac{\sin A}{\sin.a} = \frac{\sin.B}{\sin.b} = \frac{\sin.C}{\sin.c}$ ce qui a été précédemment démontré.

65. Passons à la détermination de a en fonction de b, c et A, et pour cela, imaginons par le sommet B (*fig.* 15) un arc BD perpendiculaire au côté b : désignons-le par x et par y la partie AD de b. Le triangle proposé se trouve ainsi partagé en deux autres rectangles qui vont nous permettre l'emploi des formules qui leur sont relatives. La formule 2 nous donne ici

$$\cos.a = \cos.x \cos.(b-y) \quad \text{et} \quad \cos.c = \cos.x \times \cos.y$$

tirant la valeur de cos. x de la seconde pour la substituer dans la première, celle-ci se change en

$$\cos.a = \cos.c \,\frac{\cos.(b-y)}{\cos.y}$$

Pour déterminer y, nous avons, en vertu de la formule 4

$$\text{cotang}\,c = \text{cotang}.y \cos.A \quad \text{ou} \quad \text{tang}.y = \text{tang}.c \,\text{cosin}.A$$

c et A faisant partie des données du problème, y se trouve déterminé par sa tangente, et peut être introduit dans l'autre équation, qui donne ainsi a en fonction de b, c et A.

L'ensemble de ces deux équations fournira de même b en fonction de a, c, A, puisque la seconde donnant toujours y, la première peut s'écrire sous la forme

$$\cos.(b-y)=\frac{\cos.a\,\cos.y}{\cos.c}$$

Enfin, on pourra encore les employer pour obtenir c, en permutant b et c : ce qui revient à supposer que la perpendiculaire a été abaissée du sommet C au lieu de B.

66. Vient ensuite la combinaison de a, b, A et C qui donne aussi naissance à quatre problèmes différents

A en fonction de $a,b,$C	b. . . . . $a,$A,C
C. . . . . . . $a,b,$A	a. . . . . $b,$A,C

La formule $\underline{6}$ des triangles rectangles donne dans BDA (*fig.* 15)

$$\text{cotang.A}=\text{cotang.}x\,\sin.y \quad \text{et dans BDC,} \quad \text{cotang.C}=\text{cotang.}x\,\sin.(b-y)$$

La valeur de cotang.x tirée de cette dernière et introduite dans la précédente la ramène à

$$\text{cotang.A}=\text{cotang.C}\,\frac{\sin.y}{\sin.(b-y)}$$

Nous avons d'ailleurs dans BDC, en vertu de l'équation $\underline{4}$

$$\text{cotang.}a=\cos.\text{C}\;\text{cotang.}(b-y).$$

De celle-ci on tire $b-y$ et conséquemment y, on a donc ainsi A.

Ces deux équations servent également à trouver b, connaissant a, A, C, car de la seconde on tire $b-y$ en fonction de quantités connues : on substitue cette valeur dans la première et l'on trouve b, puisque l'on a y et $b-y$.

Pour les troisième et quatrième combinaisons, abaissons de l'angle C la perpendiculaire CD$'$ ou x' sur le côté c, et désignons par y' l'angle BCD$'$. Nous aurons, en vertu de $\underline{4}$, dans BCD$'$,

$$\text{cotang.}a=\text{cotang.}x'\cos.y' \quad \text{et dans ACD}' \quad \text{cotang.}b=\text{cotang.}x'\cos.(c+y')$$

d'où
$$\text{cotang.}a=\text{cotang.}b\,\frac{\cos.y'}{\cos.(\text{C}+y')}$$

Le triangle ACD$'$ fournit encore en vertu de $\underline{3}$,

$$\cos.b=\text{cotang.A}\;\text{cotang.}(\text{C}+y')$$

Si c'est a que l'on cherche, on tire de cette formule C$+y'$, et

puisque C est une des données du problème, on connaît y', puis on substitue y' et $C + y'$ dans la première formule. Si enfin C est l'inconnue, la seconde donne $C + y'$ que l'on introduit dans la première. Celle-ci résolue par rapport à y' permet d'en retrancher la valeur de $C + y'$ et donne C.

67. Il ne nous reste enfin, pour avoir passé tout en revue, qu'à nous occuper des quatre combinaisons d'un côté a et des trois angles A, B, C. Nous allons, pour cela, reprendre les formules qui lient entre eux trois côtés et un angle, et les transformer au moyen de la pyramide supplémentaire. Ces formules qui lui sont applicables, aussi bien qu'à la pyramide directe, sont dans ce cas :

$$\cos.a' = \cos.c' \frac{\cos.(b'-y)}{\cos.y}, \quad \cot.c' \operatorname{tang}.y = \cos.A'$$

$$\operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}A' = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(a'+b'-c')\sin\frac{1}{2}(a'+c'-b')}{\sin.\frac{1}{2}(a'+b'+c')\sin.\frac{1}{2}(b'+c'-a')}}$$

Nous savons que

$$A' = 200 - a;\ a' = 200 - A;\ b' = 200 - B;\ c' = 200 - C,$$

il s'ensuit que

$$\operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}A' = \operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}(200 - a) = \operatorname{tang}.\left(100 - \frac{a}{2}\right) = \operatorname{cotang}.\tfrac{1}{2}a$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}(a'+b'-c') = \sin.\tfrac{1}{2}[200 - (A+B-C)] =$$

$$\sin.\left(100 - \frac{A+B-C}{2}\right) = \operatorname{cosin}.\tfrac{1}{2}(A+B-C)$$

de même
$$\sin.\tfrac{1}{2}(a'+c'-b') = \cos.\tfrac{1}{2}(A+C-B)$$
$$\sin.\tfrac{1}{2}(b'+c'-a') = \cos.\tfrac{1}{2}(B+C-A)$$

et
$$\sin.\tfrac{1}{2}(a'+b'+c') = \sin.\left(300 - \frac{A+B+C}{2}\right) = +\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C)$$

Ici nous devons faire une observation relative au signe + que nous plaçons devant $\cos.\frac{1}{2}(A + B + C)$. Les sinus des angles qui dépassent 200^g sont négatifs ; mais $A + B + > 200$ d'où il résulte que $300 - \frac{1}{2}(A + B + C) < 200^g$ et qu'ainsi le sinus doit être positif.

Effectuons actuellement les substitutions, et il viendra

$$\operatorname{cotang}.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)\cos.\frac{1}{2}(A+C-B)}{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}}$$

Quant aux deux autres formules, elles deviennent

$$\cos.(200-A)=\cos.(200-C)\frac{\cos.(200-B-y)}{\cos.y}$$

et $$\cot.(200-C)=\cot.y\cos.(200-a)$$

d'où $$-\cos.A=\cos.C\frac{\cos.(B+y)}{\cos.y} \quad \text{et} \quad \cot.C=\cot.y\cos.a$$

68. Il existe encore quatre formules remarquables par leur élégance et leur symétrie, qui sont aussi employées dans certaines circonstances que nous allons énoncer. Ce sont les analogies de Neper. Elles servent : 1° dans les cas où connaissant deux côtés a b et l'angle compris C, on veut déterminer A et B ; 2° lorsque l'on connaît A, B, c et que l'on cherche a et b.

Dans le premier cas, pour trouver les trois éléments inconnus du triangle, on chercherait d'abord A au moyen de deux formules de la première combinaison de la troisième série : puis, au moyen de A, a, b, on trouverait B ; et enfin c en fonction de C, A, a par la proportion des quatre sinus. Les formules dont nous allons nous occuper déterminent à la fois A et B par leur demi-somme et leur demi-différence. Reprenons

$$(2)\quad \cos.a=\cos.b\times\cos.c+\sin.b\times\sin.c\times\cos.A$$

et ses homologues

$$\cos.b=\cos.a\times\cos.c+\sin.a\times\sin.c\times\cos.B$$
$$\cos.c=\cos.a\times\cos.b+\sin a\times\sin.b\times\cos.C$$

On trouve successivement, en substituant dans la première la valeur du cos. c fournie par la troisième et effectuant les réductions

$$\cos.a=\cos.a\times\overline{\cos.b}^2+\sin.a\times\cos.b\times\sin.b\cos.C+\sin.b\sin.c\cos.A$$

$$\cos a(1-\overline{\cos.b}^2)=\cos.a\sin.^2b=\sin.a\cos.b\sin.b\cos.C+\sin.b\sin.c\cos.A$$

$$(\alpha).\ \ .\ \ .\ \ .\quad \cos.A\sin.c=\cos.a\sin.b-\sin.a\cos.b\cos.C$$

En combinant la seconde et la troisième on trouve de même

$$(\beta).\ \ .\ \ .\ \ .\quad \cos.B\sin.c=\cos.b\sin.a-\cos.b\sin.a\cos.C$$

et en ajoutant

$$(\alpha)\ \text{et}\ (\beta)\quad \sin.c(\cos.A+\cos.B)=\cos.a\sin.b+\sin.a\cos.b-\cos.C(\cos.a\sin.b+\cos.b\sin.a)$$

ce qui revient à

$$(\gamma) \ldots \quad \sin.c(\cos.A+\cos.B)=(1-\cos.C)\sin.(a+b)$$

De $\sin.c \sin.A = \sin.a \sin.C$ et $\sin.c \sin.B = \sin.b \sin.C$

on tire en les ajoutant et les retranchant

$$\sin.c(\sin.A+\sin.B)=\sin.C(\sin.a+\sin.b) \ldots \quad (\delta)$$

$$\sin.c(\sin.A-\sin.B)=\sin.C(\sin.a-\sin.c) \ldots \quad (\varepsilon)$$

Divisons (δ) par (γ), puis (ε) par (γ), et nous aurons

$$\frac{\sin.A+\sin.B}{\cos.A+\cos.B}=\frac{\sin.C(\sin.a+\sin.b)}{(1-\cos.C)(\sin.(a+b)}$$

$$\frac{\sin.A-\sin.B}{\cos.A+\cos.B}=\frac{\sin.C(\sin.a-\sin.b)}{(1-\cos.C)\sin.(a+b)}$$

Les formules (16) et (18) de la trigonométrie rectiligne transforment les premiers membres de ces deux équations en tang. $\frac{1}{2}(A+B)$ et tang. $\frac{1}{2}(A-B)$. D'autre part, nous pouvons, pour simplifier les seconds membres, remarquer que

$$\sin.C=2\sin.\tfrac{1}{2}C\cos.\tfrac{1}{2}C \quad \text{et} \quad 1-\cos.C=2\sin.^2\tfrac{1}{2}C,$$

ce qui donne, en remplaçant en même temps, les somme ou différence de sinus de a et b qui entrent aux numérateurs

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{2\sin.\frac{1}{2}C\cos.\frac{1}{2}C\times 2\sin.\frac{1}{2}(a+b)\cos.\frac{1}{2}(a-b)}{2\sin.^2\frac{1}{2}C\times\sin.(a+b)}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{2\sin.\frac{1}{2}C\cos.\frac{1}{2}C\times 2\sin.\frac{1}{2}(a-b)\cos.\frac{1}{2}(a+b)}{2\sin.^2\frac{1}{2}C\times\sin.(a+b)}$$

Mais sin. $(a+b)$ peut aussi être remplacé par

$$2\sin.\tfrac{1}{2}(a+b)\cos.\tfrac{1}{2}(a+b)$$

donc, en faisant cette substitution et toutes les réductions

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B)=\cot.\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos.\frac{1}{2}(a-b)}{\cos.\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A-B)\cot.\tfrac{1}{2}C=\frac{\sin.\frac{1}{2}(a-b)}{\sin.\frac{1}{2}(a+b)}$$

L'emploi de la pyramide supplémentaire donne les deux autres formules analogues

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A+B)=\text{tang}.\tfrac{1}{2}[400-(a'+b')]=\text{tang}.[200-\tfrac{1}{2}(a'+b')]=-\text{tang}.\tfrac{1}{2}(a'+b')$$

$$\text{cotang}\,\tfrac{1}{2}C=\text{cot}.\tfrac{1}{2}(200-c')=\text{cot}.(100-\tfrac{1}{2}c')=\text{tang}.\tfrac{1}{2}c'$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}(a-b)=\cos.\tfrac{1}{2}(B'-A')=\cos.\tfrac{1}{2}[-(A'-B')]=\cos.\tfrac{1}{2}(A'-B')$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}(a+b)=\cos.[200-\tfrac{1}{2}(A'+B')]=-\cos.\tfrac{1}{2}(A'+B')$$

Substituantdans la formule tang. $\frac{1}{2}(A+B)=$ etc., etsupprimant les accents

$$\text{tang}.\tfrac{1}{2}(a+b)=\text{tang}.\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos.\frac{1}{2}(A-B)}{\cos.\frac{1}{2}(A+B)}$$

On trouverait de même

$$\text{tang}.\tfrac{1}{2}(a-b)=\text{tang}.\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin.\frac{1}{2}(A+B)}$$

Telles sont les quatre formules connues sous le nom d'analogies de Neper.

69. TABLEAU DES FORMULES PROPRES A LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

Formules générales.

A.B.a.b	(1).	$\sin.A\sin.b=\sin.B\sin.a$.
a.b.c.A	(2).	$\cos.a=\cos.b\times\cos.c+\sin.b\times\sin.c\times\cos.A$.
A.B.C.a	(3). . .	$-\cos A=\cos.B\times\cos.C-\sin.B\times\sin.C\times\cos.a$.
A.B.a.c	(4).	$\cot.a\sin.c=\cos.c\times\cos.B+\sin.B\times\cot.A$.

Formules relatives aux triangles rectangles.

1 $\sin.a\times\sin B=\sin.b$	4 $\cot.a=\cos.B\times\cot.c$
2 $\cos.a=\cos.b\times\cos.c$	5 $\cos.B=\sin.C\times\cos.b$
3 $\cos a=\cot.B\times\cot.C$	6 $\cot.b\times\sin.c=\cot.B.$

Formules qui résolvent tous les cas que présentent les triangles sphériques.

a, b, A, B
- a.... b. A.B
- b....a. A.B
- A....a.b. B
- B....a.b.A

$\sin.A\times\sin.b=\sin.B\sin.a$

a, b, c. A
- a.... b.c. A
- b.... a c. A
- c.. . a. b. A

$\cos.a=\cos c\,\dfrac{\cos.(b-y)}{\cos y}$ $\quad$ $\text{cotang}.c=\text{cotang}.y\cos.A$

A ... a.b.c $\quad$ $\text{tang}.\frac{1}{2}A=\sqrt{\dfrac{\sin.\frac{1}{2}(a+b-c)\sin.\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin.\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}}$

5

a, b, A, C	A....$a.b.$C b.... a.A.C	$\text{tang.A} = \text{tang.C}\dfrac{\sin.(b-y)}{\sin.y}\text{tang.}(b-y) = \text{tang.}a \times \cos.C$
	a.... b.A C	$\text{tang.A} = \text{tang.B} \times \dfrac{\cos.(C+y')}{\cos.y'}$
	C.... $a.b$.A	$\text{tang.}(C+y') = \text{tang.A}\cos.b.$
a, A, B, C	A.... a.B.C B.... a.A.C	$-\cos.A = \cos.C\dfrac{\cos.(B+y)}{\cos.y}$
	C.... a.A.B	$\text{cotang.C} = \text{cotang.}y \cos a$
	a.... A.B.C	$\text{cotang.}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\dfrac{\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}}$

Analogies de Neper.

A et B.... $a.b$.C

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B) = \text{cotang.}\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos.\frac{1}{2}(a-b)}{\cos.\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A-B) = \text{cotang.}\tfrac{1}{2}C\,\frac{\sin.\frac{1}{2}(a-b)}{\sin.\frac{1}{2}(a+b)}$$

a et b.... c.A.B.

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(a+b) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos.\frac{1}{2}(A-B)}{\cos.\frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(a-b) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin.\frac{1}{2}(A+B)}$$

70. Il est une méthode de résolution des triangles sphériques qui n'exige pas comme la précédente l'emploi d'inconnues auxiliaires. Nous allons exposer succinctement cette méthode qui aura l'avantage de familiariser avec un genre de considérations qu'il est utile de connaître.

Les quatre analogies de Neper, jointes aux trois formules

$$\frac{\sin.A}{\sin.a} = \frac{\sin.B}{\sin.b} = \frac{\sin.C}{\sin.c}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(a+b-c)\sin.\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin.\frac{1}{2}(a+b+c)\sin.\frac{1}{2}(b+c-a)}}$$

$$\text{cotang.}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)\cos.\frac{1}{2}(A+C-B)}{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}}$$

permettent de résoudre tous les triangles sphériques.

Les quatre cas d'égalité précédemment indiqués, dans chacun desquels figurent trois éléments des triangles indiquent qu'un triangle n'est défini que lorsqu'on donne trois de ses six éléments.

On verra plus loin que ces six éléments peuvent être combinés trois à trois de façon à donner 20 combinaisons différentes ; mais la similitude des rôles joués par chaque côté et de ceux joués par chaque angle réduisent ces 20 cas à six essentiellement distincts.

Ces six cas se résument de la manière suivante :

1° a, b, c. . . . . . . 2° $a\,b$ A. . . . . 3° $a\,b$ C
3° A B C. . . . . . . 4° A B a. . . . . 5° A. B. a

Passons-les successivement en revue :

1° *Résolution du triangle dont les trois côtés sont connus.* — Chacun des angles sera déterminé successivement par la formule

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(a+b-c)\,\sin.\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin.\frac{1}{2}(a+b+c)\,\sin.\frac{1}{2}(b+c-a)}}$$

Le signe $+$ du radical conviendra seul, car chaque angle devant être $< 200^g$, la tangente de sa moitié devra être positive.

La valeur numérique de la tangente qu'on trouvera ainsi répondra à deux angles différant de 200^g, mais dont un seul conviendra, puisque, $A < 100^g$.

2° *Résolution du triangle dont on connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.*— Les données étant $a\ b$ A, on trouvera d'abord B par la proportion des quatre sinus

$$\sin.B = \frac{\sin.b.\ \sin.A}{\sin.a}$$

A la valeur de sinus B fournie par cette équation, répondront deux valeurs de B supplémentaires l'une de l'autre, convenables également toutes deux, quant à présent du moins.

Pour déterminer le troisième angle C, on se servira d'une des analogies de Néper,

$$\cot.\tfrac{1}{2}\,C = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B)\ \frac{\cos.\frac{1}{2}(a+b)}{\cos.\frac{1}{2}(a-b)}$$

dans laquelle on substituera, outre les données, successivement les deux valeurs trouvées pour B. Chacune d'elles donnera une valeur correspondante de cot. $\frac{1}{2}$ C ; mais observons que $\frac{1}{2}\,C < 100^g$ doit avoir une cotangente positive. Il pourra se faire que les substitutions des deux valeurs de B, conduisant pour cot. $\frac{1}{2}$ C,

soit à deux valeurs positives, soit à une seule positive, soit à deux négatives, donnent lieu à deux solutions, à une seule ou à aucune.

Enfin, la dernière inconnue c sera déterminée par la formule

$$\sin.c = \frac{\sin.C.\ \sin.a}{\sin.A}$$

qui fournira autant de valeurs pour $\sin.c$ qu'on en aura trouvé pour C, c'est-à-dire, 2, 1 ou 0.

Chaque sinus ainsi trouvé répondra à deux angles supplémentaires satisfaisant également à la condition $c < 200^g$. Cependant un seul de ces angles contiendra un triangle. Pour s'en assurer, il faut retourner à l'analogie

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,c = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\,(a-b)\,\frac{\sin.\frac{1}{2}(A+B)}{\sin.\frac{1}{2}(A-B)}$$

ou à son analogue.

Cette formule fait voir que chaque valeur de B n'en donne qu'une seule de $\text{tang.}\frac{1}{2}\,c$ et comme $\frac{1}{2}\,c < 100^g$, il n'y a lieu de prendre qu'un seul angle.

Quand rien n'aura pu faire connaître à l'avance la valeur approchée de c, il faudra agir comme nous venons de l'indiquer en dernier lieu, quoique l'application de la formule des quatre sinus soit plus simple que celle de l'analogie.

En résumé, le cas actuel pourra fournir deux solutions, une seule ou aucune.

3° *Résolution du triangle dont deux cotés et l'angle compris sont donnés.* — On connaît a, b, C. Les analogies de Neper feront connaître $\text{tang.}\frac{1}{2}(A+B)$ et $\text{tang.}\frac{1}{2}(A-B)$, et par suite les deux angles $\frac{1}{2}(A+B)$ et $\frac{1}{2}(A-B)$. Les tangentes répondent, à la vérité, à deux angles différant entre eux de 200^g, mais observons que chaque angle étant compris entre o et 200^g

$$0 < \tfrac{1}{2}(A+B) < 200^g. \quad -100^g < \tfrac{1}{2}(A-B) < 100^g$$

ce qui précisera celles des valeurs convenables pour $\frac{1}{2}(A+B)$ et $\frac{1}{2}(A-B)$.

La dernière inconnue c sera donnée par

$$\sin.c = \frac{\sin.C\ \sin.a}{\sin.A}$$

La valeur de $\sin.c$ ainsi trouvée répondra à deux angles sup-

plémentaires paraissant convenir également, mais dont un seul pourtant appartiendra au triangle. Pour s'en assurer, il faudrait, comme dans le cas précédent, retourner à l'analogie de Neper

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}c = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(a-b)\,\frac{\sin.\frac{1}{2}(A+B)}{\sin.\frac{1}{2}(A-B)}$$

qui pour un seul système de valeurs de A et B, n'en donne qu'une de c.

En résumé, ce troisième cas ne donne lieu qu'à une seule solution.

Il nous resterait trois cas à examiner, ce sont ceux analogues aux trois que nous avons étudiés, dans lesquels les côtés remplaçent les angles, et réciproquement.

La grande analogie des rôles joués par les côtés et par les angles fait que la marche à suivre serait identiquement la même. Aussi, sans les examiner en détail, nous indiquerons seulement les résultats auxquels conduiraient ces trois derniers cas.

4° *Les trois angles connus* — A, B, C. — Ne donne lieu qu'à une solution.

5° *Deux angles et le côté opposé à l'un d'eux* — A, B, a. — Peut fournir deux solutions, une seule ou aucune.

6° *Deux angles et le côté compris* — A, B, c. — Ne donne qu'une solution.

Observons que les 1er, 3e, 4e et 6e cas, qui ne donnent lieu qu'à une seule solution, sont précisément ceux d'égalité des triangles sphériques, ce qui confirme l'existence de ces cas d'égalité. Quant au 2e et au 5e, ils peuvent quelquefois donner naissance à l'égalité, ce qui a lieu lorsque les données sont telles qu'elles ne fournissent qu'une seule solution ; mais cette égalité n'existe pas nécessairement lorsque deux solutions sont possibles.

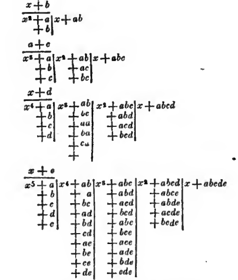
CHAPITRE IV.

BINÔME DE NEWTON. — DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.

71. *Binôme de Newton.* — Les quantités binômes sont les plus simples après les monômes : cependant, si l'on voulait former leurs diverses puissances par des multiplications successives, on ne parviendrait qu'à des résultats particuliers pour chaque puis-

sance, et l'on ne saisirait pas facilement la loi des coefficients numériques de ces résultats. En réfléchissant aux procédés de la multiplication, on reconnaîtra que les coefficients numériques naissent des réductions qu'entraîne l'égalité des facteurs, et qu'en empêchant ces réductions d'avoir lieu, on rendra la composition des produits plus évidente.

Pour obtenir ce résultat, il suffit de donner d'abord à tous les binômes, des seconds termes différents : Prenons $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, etc., et opérons les multiplications successives.



En s'arrêtant ici, on peut déjà remarquer que

1° Le nombre des termes du produit est plus grand d'une unité que celui des facteurs ;

2° L'exposant de x va en diminuant successivement d'une unité depuis le nombre des facteurs jusqu'à zéro ;

3° Les coefficients de x dans chaque terme suivent une marche inverse, c'est-à-dire que les produits, qui les composent, augmentent depuis la puissance zéro dans le premier terme, de manière que tous sont de même puissance ;

4° Les coefficients des termes également distants des extrêmes sont composés d'un même nombre de termes ;

5° Enfin, le coefficient du premier terme est l'unité : celui du second, la somme de tous les seconds termes des binômes ; celui du troisième, la somme de leurs différents produits, deux à deux ; celui du quatrième, la somme de leurs produits trois à trois, etc., et enfin le dernier terme du développement est le produit de tous.

La forme de ce développement obtenu ici par voie de multiplication jusqu'à la cinquième puissance de x est la même pour un degré quelconque ; on pourrait le déduire par analogie de ce qui précède, mais il est très-simple de démontrer qu'ayant lieu pour un nombre m de facteurs, il est vrai encore pour $m+1$.

Pour abréger, écrivons le développement sous la forme

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots\ldots + Xx + Y$$

et multiplions-le par $x+l$, nous aurons

$$x^{m+1} \left.\begin{array}{l} +A \\ +l \end{array}\right| x^m \left.\begin{array}{l} +B \\ +Al \end{array}\right| x^{m-1} \left.\begin{array}{l} +C \\ +Bl \end{array}\right| x^{m-2} + \ldots\ldots \left.\begin{array}{l} +X \\ +Vl \end{array}\right| x^2 \left.\begin{array}{l} +Y \\ +Xl \end{array}\right| x + Yl.$$

1° Si A est la somme de m lettres, $A+l$ représente évidemment celle de $m+1$, et par conséquent la forme assignée au coefficient du second terme est vérifiée.

2° Si B indique la somme des produits deux à deux de m seconds termes a, b, c, etc., $B+lA$ exprime aussi celle des produits deux à deux des $m+1$ termes.

3° Il en est de même pour tous les autres coefficients des diverses puissances de x, et enfin lY est le produit de tous les seconds termes de $m+1$ facteurs.

En généralisant, on peut dire que le coefficient N d'un terme dont le rang est $n+1$, est le produit des seconds termes n à n.

Pour passer actuellement au développement de la puissance d'un binôme, il suffit de faire $a=b=c=d=$ etc., et les résultats obtenus plus haut par la multiplication de 2, 3, 4, 5 binômes entre eux se transformeront en puissances 2e, 3e, 4e, etc., de $x+a$ et seront

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$
$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$
$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10\,a^2x^3 + 10\,a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

Les coefficients numériques représentent le nombre de produits différents deux à deux, trois à trois, etc., que l'on peut faire avec un nombre de lettres marqué par la puissance du binôme,

avec m lettres, si l'exposant de la puissance est m. Pour trouver ces coefficients, indépendamment des multiplications partielles que nous avons effectuées, prenons une des m lettres pour la placer à côté des $m-1$ autres ; elle aura fourni $m-1$ produits de deux lettres : on peut en faire autant pour chacune, et l'on aura ainsi $m(m-1)$ produits ou plutôt arrangements de deux lettres. Pour avoir le nombre des arrangements trois à trois, on prend un de ceux de deux lettres, puis on le porte à côté des $m-2$ restantes ; le nombre des arrangements trois à trois est donc $m(m-1)(m-2)$. Pour savoir combien m lettres en peuvent fournir p à p, on prend chacun des arrangements $p-1$ à $p-1$, et on l'écrit à côté de chacune des $(m-p+1)$ autres lettres. D'après ce que nous venons de voir, le nombre des arrangements $p-1$ à $p-1$ est exprimé par $m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-p+2)$. Donc celui des arrangements p à p est

$$m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-p+2)(m-p+1)$$

Mais il s'agissait d'avoir le nombre des produits différents ; il faut donc diviser par le nombre d'arrangements que l'on peut faire avec p lettres combinées toutes ensemble, car le produit est toujours le même, quel que soit l'ordre des facteurs.

Pour le trouver, il suffit de faire $p=m$ dans l'expression générale trouvée plus haut, ce qui donne

$$p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-p+2)(p-p+1)$$

ou, ce qui revient au même

$$1\times2\times3\ldots\ldots(p-2(p-1)p.$$

Le nombre des produits différents que l'on peut obtenir avec m lettres est donc

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-p+2)(m-p+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(p-2)(p-1)p}$$

Rien de plus facile que d'écrire actuellement le développement d'une puissance m d'un binôme, en donnant successivement à p différentes valeurs dans le coefficient du terme général.

Pour avoir le coefficient du troisième terme, faisons $p=2$, il vient $\frac{m(m-1)}{1.2}$.

Pour le quatrième terme

$$p=3 \qquad \text{d'où } \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$

Donc

$$(x+a)^m = x^m + m.a.x^{m-1} + m\frac{m-1}{2}a^2x^{m-2} + m\frac{(m-1)(m-2)}{2.3}a^3x^{m-3} + \text{etc.} \quad (1)$$

Pour en retenir plus facilement la forme, il est bon d'observer que le coefficient d'un terme quelconque se compose du coefficient du terme précédent multiplié par l'exposant de x dans ce terme, et divisé par le chiffre qui indique son rang dans la série. Ainsi, en se rappelant seulement que le développement $(x+a)^m$ commence par x^m, tont le reste s'en déduit.

72. La marche que nous venons de suivre fait assez voir que la démonstration ne se rapporte encore qu'au cas où l'exposant est entier et positif. Il s'agit actuellement de généraliser et de démontrer que l'exposant étant fractionnaire ou négatif, le développement affecte toujours la même forme. En divisant par x^m les deux membres de la formule (1), elle devient

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^m = 1 + m\frac{a}{x} + m\frac{m-1}{2}\frac{a^2}{x^2} + m\frac{(m-1)(m-2)}{2.3}\frac{a^3}{x^3} + \text{etc.}$$

et en représentant $\frac{a}{x}$ par z

$$(1+z)^m = 1 + mz + m\frac{m-1}{2}z^2 + m\frac{(m-1)(m-2)}{2.3}z^3 + \text{etc.} \ldots \quad (2)$$

Si nous vérifions la formule (2) pour tous les cas, (1) le sera aussi.

Dans la série qui forme le second membre de (2), z ne change pas, c'est m que nous rendons variable ; nous pouvons donc dire qu'elle est fonction de m, et écrire

$$f(m) = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2}z^2 + \text{etc.}$$

Quand m est entier et positif, nous savons déjà de quelle forme est cette fonction ; c'est $f(m) = (1+z)^m$. Observons actuellement que quels que soient m et n, le produit de $f(m)$ par $f(n)$ sera toujours $f(m+n)$. Effectuant, on trouve en effet

$$(3) \ldots\ldots \quad f(m) = 1 + mz + m\frac{m-1}{2}z^2 + \ldots\ldots + z^m$$

$$(4) \ldots\ldots \quad f(n) = 1 + nz + n\frac{n-1}{2}z^2 + \ldots\ldots + z^n$$

$$f(m)f(z) = 1 + \left.\begin{matrix} m \\ +n \end{matrix}\right| z + \left.\begin{matrix} m\frac{m-1}{2} \\ +n\frac{n-1}{2} \\ +mn \end{matrix}\right| z^2 + \ldots\ldots + z^{m+n}$$

Le coefficient du troisième terme peut s'écrire sous la forme

$$\frac{m(m-1)+2mn+n(n-1)}{2}=\frac{m(m+n-1)+n(m+n-1)}{2}=$$

$$\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}$$

Le coefficient du 4e terme en z^3 de $f(m+n)$ est

$$\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{2.3}$$

Celui du 4e terme, en z^3 aussi, dans le produit de $f(m)$ par $f(n)$ est

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}+\frac{mn(m-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}+\frac{3.mn(m+n-2)}{2.3}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$$

Si l'on fait les multiplications et réductions convenables dans ces deux quatrièmes termes, on arrive au même résultat

$$m^3+n^3+3mn(m+n)-3(m^2+n^2)-6mn+2(m+n)$$

donc $$f(m)f(n)=1+(m+n)z+\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}z^2+\ldots z^{m+n}$$

Et l'on voit que le second membre se peut déduire de (3) en changeant m en $m+n$. Donc enfin $f(m)f(n)=f(m+n)$. Si l'on remplace n par $n+p$, on aura de même $f(m)f(n)f(p)=f(m+n+p)$ et ainsi de suite. Supposons que l'on répète cette opération pour un nombre a de fonctions semblables, et que de plus $m=n=p=$ etc., on aura $[f(m)]^a=f(ma)$.

a est essentiellement entier et positif, mais m est toujours quelconque : on peut faire $m=\frac{b}{a}$, il viendra alors $\left[f\left(\frac{b}{a}\right)\right]^a=(fb)=(1+z)^b$: car b est entier et positif. Extrayant la racine a des deux membres, $f\left(\frac{b}{a}\right)=(1+z)^{\frac{b}{a}}$.

Nous avons d'ailleurs posé comme point de départ

$$f(m) \text{ ou } f\left(\frac{b}{a}\right)=1+\frac{b}{a}z+\frac{\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}-1\right)}{2}z^2+\text{etc.}$$

Donc enfin

$$(1+z)^{\frac{b}{a}} = 1 + \frac{b}{a} z + \frac{\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a} - 1\right)}{2} z^2 + \text{etc.}$$

Supposons maintenant que m soit négatif et égal à $-n$, on aura

$f(m+n) = f(m)\,f(n)$ transformé en $f(-n)\,f(n) = f(n-n) = f(0)$

or de la formule

$f(m') = 1 + m'z + \ldots + z^{m'}$, on tire $f(m') = 1$ en faisant $m' = 0$.

donc

$$f(-z)\,f(z) = 1 \quad \text{ou} \quad f(-n) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{(1+z)^n} = (1+z)^{-n}$$

Il est ainsi démontré que, quel que soit m, on sera en droit d'écrire

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 + \text{etc.}$$

Il est cependant nécessaire de faire quelques restrictions provenant du mode de démonstration employé pour les deux exposants négatif ou fractionnaire. Cette démonstration repose sur l'essai de la multiplication de $f(m)$ par $f(n)$, essai qui s'est effectué en considérant les premiers termes seulement. Il n'a plus été question du nombre de termes du développement et de l'ordre des puissances de z. Si m est l'exposant entier de la puissance, il y a $m+1$ termes, et le dernier renferme z^m. Mais, lorsque m devient négatif ou fractionnaire, les exposants des puissances de z augmentent toujours de l'unité et n'atteindront par conséquent jamais m. Le nombre des termes deviendra infini, dans l'un comme dans l'autre cas.

La série formée par le développement n'aura donc de signification utile que lorsque les termes iront en diminuant, ou lorsque z sera petit, et elle ne deviendra même d'un usage commode que lorsque z sera très-petit. Supposons qu'il en soit ainsi et voyons comment on pourra utiliser les premiers termes du développement, dans les cas qui se présentent le plus habituellement.

Lorsque z sera très-petit, ses puissances supérieures à la première deviendront négligeables, quelle que soit du reste la na-

ture de l'exposant m, en sorte qu'on pourra se contenter de prendre

$$(1+z)^m = 1 + mz.$$

Ainsi $$(1,00008)^7 = 1,00056.$$

$$\sqrt[4]{1,00008} = 1,00002 \qquad (1,00008)^{\frac{7}{4}} = 1,00014$$

résultats formés à simple vue.

On formerait également d'une manière très-simple

$$\frac{1}{(1,00008)^7} = (1,00008)^{-7} = 1 - 7.0,00008 = 0,99944$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{(1,00008)}} = (1,00008)^{-\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4}.0,0008 = 0,99998.$$

On rencontre souvent une expression de la forme $\frac{A}{1 \pm \alpha}$ qu'il est avantageux de transformer en un produit. On arrive très-simplement à ce résultat, en multipliant haut et bas par $1 \mp \alpha$, ce qui donne, en supposant α très-petit

$$\frac{A(1 \mp \alpha)}{(1 \pm \alpha)(1 \mp \alpha)} = A\frac{1 \mp \alpha}{1 - \alpha^2} = A(1 \mp \alpha)$$

en négligeant α^2 au dénominateur.

La loi du développement du binôme conduit à ce même résultat en permettant une approximation plus grande, si elle est nécessaire. En effet

$$\frac{A}{1 \pm \alpha} = A(1 \pm \alpha)^{-1} = A\left\{1 \mp \alpha + \alpha^2 \ldots \right\}$$

expression d'où l'on tire $\frac{A}{1 \pm \alpha} = A(1 \mp \alpha)$, si α est suffisamment petit.

73. *Développement en séries des sinus et cosinus en fonction de l'angle.* — Nous aurons souvent besoin du développement en séries du sinus et du cosinus en fonction de l'angle. Pour en trouver la forme, il est nécessaire de faire voir d'abord que

$$(\cos A + \sqrt{-1}\,\sin . A)^m = \cos . mA + \sqrt{-1}\,\sin . mA.$$

Pour cela effectuons le produit de

$$\cos . A + \sqrt{-1}\,\sin . A$$

par $\cos.B + \sqrt{-1}\sin.B$, ce qui donne

$$\cos.A\cos.B + \sqrt{-1}(\sin.A\cos.B + \sin.B\cos.A) - \sin.A\sin.B = \cos.(A+B) + \sqrt{-1}[\sin.(A+B)]$$

Si $A = B$, alors

$$(\cos.A + \sqrt{-1}\sin.A)^2 = \cos.2A + \sqrt{-1}\sin.2A.$$

Il est facile de voir que cette propriété continue à se vérifier pour les autres puissances. En effet, faisons $2A = P$ et multiplions

$$\cos.P + \sqrt{-1}\sin.P \quad \text{par} \quad \cos.C + \sqrt{-1}\sin.C.$$

Il viendra, comme plus haut

$$\cos.(P+C) + \sqrt{-1}\sin.(P+C)$$

puis en faisant $A = C$ et rétablissant $2A$ au lieu de P

$$(\cos.A + \sqrt{-1}\sin.A)^3 = \cos.3A + \sqrt{-1}\sin.3A.$$

Démontré pour le carré et le cube, on peut, en généralisant, écrire

$$(\cos.A + \sqrt{-1}\sin.A)^m = \cos.mA + \sqrt{-1}\sin.mA.$$

Telle est la formule de Moivre, de laquelle nous allons déduire les séries que nous nous sommes proposé de trouver. Si nous développons la puissance m du premier membre suivant la formule du binôme de Newton, il s'ensuivra que

$$\cos.mA + \sqrt{-1}\sin.mA = \cos.^m A + m\sqrt{-1}\sin.A\cos.^{m-1}A - \frac{m(m-1)}{2}\sin.^2 A\cos.^{m-2}A - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\sqrt{-1}\sin.^3 A\cos.^{m-3}A + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\sin.^4 A\cos.^{m-4}A + \text{etc.}$$

Toute équation telle que celle-ci, renfermant des quantités réelles et des quantités imaginaires, ne peut exister qu'autant que les quantités réelles sont égales entre elles, et qu'il en est de même des quantités imaginaires.

Ainsi, pour que $m + n\sqrt{-1} = p + q\sqrt{-1}$ soit vrai, il faut que $m = p$ et $n = q$, puisque l'on en tire $m - p = (q - n)\sqrt{-1}$ ou en élevant au carré $(m-p)^2 = -(q-n)^2$. Des carrés sont toujours positifs : cette équation dernière renfermera donc une absurdité toutes les fois que l'on n'aura pas $m = p$, $n = q$.

D'après ce principe, cos.mA doit égaler tous les termes réels du second membre, et sin.mA tous ceux qui sont affectés du signe $\sqrt{-1}$. Cela nous donne donc

$$\cos.mA = \cos.^{m}A - \frac{m(m-1)}{2}\sin.^{2}A\cos.^{m-2}A + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\sin.^{4}A\cos.^{m-4}A - \text{etc.}$$

$$\sin.mA = m\sin.A\cos.^{m-1}A - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\sin.^{3}A\cos.^{m-3}A + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}\sin.^{5}A\cos.^{m-5}A - \text{etc}$$

Nous pouvons ici remplacer sin.A par son équivalent cos.A, tang.A. La raison qui nous conduit à cette transformation est que la somme des exposants du sinus et du cosinus étant la même pour tous les termes, tous ensuite contiendront cos.^{m}A qui pourra être mis en facteur commun.

$$\cos.mA = \cos.^{m}A\left(1 - \frac{m(m-1)}{2}\tan g.^{2}A + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\tan g.^{4}A - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3.4.5\,6}\tan g.^{6}A + \text{etc.}\right)$$

$$\sin.mA = \cos.^{m}A\left(m\tan g.A - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\tan g.^{3}A + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4\,5}\tan g.^{5}A - \text{etc.}\right)$$

Or, n'ayant pas jusqu'ici assigné de valeur particulière à A, nous pouvons faire $mA = x$ ou $m = \frac{x}{A}$: substituant dans les formules, elles deviennent

$$\cos.x = \cos.^{\frac{x}{A}}A\left(1 - \frac{\frac{x}{A}\left(\frac{x}{A}-1\right)}{2}\tan g.^{2}A + \frac{\frac{x}{A}\left(\frac{x}{A}-1\right)\left(\frac{x}{A}-2\right)\left(\frac{x}{A}-3\right)}{1.2.3.4}\tan g.^{4}A - \text{etc.}\right)$$

$$\sin.x = \cos.^{\frac{x}{A}}A\left(\frac{x}{A}\tan g.A - \frac{\frac{x}{A}\left(\frac{x}{A}-1\right)\left(\frac{x}{A}-2\right)}{1.2.3}\tan g.^{3}A + \frac{\frac{x}{A}\left(\frac{x}{A}-1\right)\left(\frac{x}{A}-2\right)\left(\frac{x}{A}-3\right)\left(\frac{x}{A}-4\right)}{1.2.3.4.5}\tan g.^{5}A - \text{etc.}\right)$$

Réduisons les facteurs des coefficients de tous les termes au même dénominateur et nous aurons

$$\cos.x = \cos.^{\frac{x}{A}} A \left(1 - \frac{x(x-A)}{2}\frac{\text{tang.}^2 A}{A^2} + \frac{x(x-A)(x-2A)(x-3A)}{2.3.4}\frac{\text{tang.}^4 A}{A^4} - \text{etc.}\right)$$

$$\sin.x = \cos.^{\frac{x}{A}} A \left(x\frac{\text{tang.} A}{A} - \frac{x(x-A)(x-2A)}{2.3}\frac{\text{tang.}^3 A}{A^3} + \frac{x(x-A)(x-2A)(x-3A)(x-4A)}{2.3.4.5}\frac{\text{tang.}^5 A}{A^5} - \text{etc.}\right)$$

Ces deux formules doivent avoir lieu, quel que soit A; nous pouvons ainsi lui donner une valeur particulière, sans ôter à x sa généralité : supposons donc $A = 0$ et voyons ce que devient le rapport de la tangente à l'arc.

On a vu, dans la trigonométrie rectiligne (37) que $\frac{\text{tang.}}{\text{arc}} > 1$ et $\frac{\sin.}{\text{arc}} < 1$. Cette dernière inégalité peut, en remplaçant sinus par son équivalent cosinus $\times$ tangente, se mettre sous la forme arc $>$ cosinus $\times$ tangente ou $\frac{\text{tang.}}{\text{arc}} < \frac{1}{\text{cosinus}}$. Cela a lieu quelle que soit la valeur de l'arc : au moment où il devient nul, le cosinus est égal à l'unité ; les deux limites se confondent, et pour que ce que nous venons de trouver ait encore lieu, il faut que $\frac{\text{tang.}0^{\circ}}{\text{arc.}0^{\circ}} = 1$.

Cela posé, les formules qui développent sinus et cosinus deviennent

$$\sin.x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$

et

$$\text{cosinus} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

74. Nous plaçons ici une démonstration des mêmes formules par le calcul différentiel, afin que l'on puisse comparer les méthodes.

Remarquons que le développement d'un sinus ne peut contenir de terme indépendant de l'angle, puisque celui-ci étant nul, son sinus l'est aussi, et qu'il entre en terme qui est l'unité dans

le développement du cosinus, par la raison que l'angle étant égal à zéro, le cosinus est l'unité. Nous pourrons donc écrire

$$(1) \qquad \sin.x = Ax^{a} + Bx^{b} + Cx^{c} + \text{etc.},$$

$$(2) \qquad \text{cosinus}\, x = 1 + A'x^{a'} + B'x^{b'} + C'x^{c'} + \text{etc.}$$

différenciant ces deux équations, il vient

$$\cos.x\, dx = aAx^{a-1}\, dx + bBx^{b-1}\, dx + cCx^{c-1}\, dx + \text{etc.}$$

$$-\sin.x\, dx = a'A'x^{a'-1}\, dx + b'B'x^{b'-1}\, dx + c'C'x^{c'-1}\, dx + \text{etc.}$$

et en divisant de part et d'autre par dx

$$(3) \qquad \cos.x = aAx^{a-1} + bBx^{b-1} + cCx^{c-1} + \text{etc.}$$

$$(4) \qquad -\sin.x = a'A'x^{a'-1} + b'B'x^{b'-1} + c'C'x^{c'-1} + \text{etc.}$$

Nous pouvons égaler les valeurs de sinus x fournies par (1) et (4) de même que celles de cosinus déduites de (2) et (3), ce qui donne

$$Ax^{a} + Bx^{b} + Cx^{c} + \text{etc.} = -a'A'x^{a'-1} - b'B'x^{b'-1} - c'C'x^{c'-1} - \text{etc.}$$

$$1 + A'x^{a'} + B'x^{b'} + C'x^{c'} + \text{etc.} = aAx^{a-1} + bBx^{b-1} + cCx^{c-1} + \text{etc.}$$

Pour satisfaire à la condition d'égalité qu'indiquent ces équations, il faut exprimer que les coefficients et exposants de x dans les termes de même rang sont égaux entre eux. Il faut donc, en nous occupant d'abord des exposants, que

$$a = a' - 1,\; b = b' - 1,\; c = c' - 1,\; a - 1 = 0,\; b - 1 = a',\; c - 1 = b',$$

d'où $\quad a = 1,\; b = 3,\; c = 5,\; a' = 2,\; b' = 4,\; c' = 6,$ etc.

Égalons actuellement les coefficients, nous aurons successivement

$$A = -a'A',\, B = -b'B',\, C = -c'C', \text{etc.},\; 1 = aA,\; A' = bB,\; B' = cC,\; C' = dD, \text{ etc.}$$

d'où il suit que

$$A = 1;\; A' = -\frac{A}{2} = -\frac{1}{2};\; B = \frac{A'}{b} = -\frac{1}{1\;3};\; B' = -\frac{B}{b'} = +\frac{1}{2.3.4};$$

$$C = \frac{B'}{c} = +\frac{1}{2\;3.4.5};\; C' = -\frac{C}{c'} = -\frac{1}{2.3.4.5.6}$$

et enfin en substituant dans (1) et (2)

$$\sin.x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$

$$\text{cosin.}x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

75. Après avoir indiqué la méthode précédente, pour donner une idée des ressources qu'offre le calcul différentiel, nous donnons encore une démonstration par celle des coefficients indéterminés, comme exemple d'un procédé usité en beaucoup de circonstances, et que nous avons déjà employé dans la construction des tables de logarithmes.

Pour développer sinus x, observons, d'abord comme plus haut, qu'il ne doit pas y avoir dans la série de terme indépendant de l'arc, puisque le sinus devient nul en même temps que l'arc Dans le cosinus, au contraire, le premier terme est l'unité, puisque $x = 0$ donne cosin. $= 1$. De plus, le développement du sinus ne doit contenir que des puissances impaires de x, et celui du cosinus que des puissances paires, par la raison que, pour des arcs égaux et de signes contraires, les sinus sont aussi égaux et de signes contraires et les cosinus égaux et de même signe.

Les développements seront donc de la forme

(1) $\sin.x = Ax + Cx^3 + Ex^5 + \text{etc.}$ (2) $\cos.x = 1 + Bx^2 + Dx^4 + \text{etc.}$

Ils formeraient, réunis, la série complète

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{etc.}$$

En cherchant les valeurs des coefficients A, B, C, etc., leurs signes seront en même temps déterminés, et nous serons assurés que toutes les puissances de x entreront dans les deux développements, si nous ne trouvons aucun de ces coefficients égal à zéro.

Prenons les deux formules

$$\sin.(x+h) = \sin x \cos.h + \sin.h \,\text{cosin.}x.$$
$$\cos.(x+h) = \cos.x \cos.h - \sin.x \sin.h$$

et substituons les valeurs de sin.x et cos.x fournies par les formules (1) et (2), ainsi que celles de sin.h et cos.h, que donnent les mêmes formules, en y mettant h au lieu de x : il vient alors

(3) $\sin.(x+h) = (Ax + Cx^3 + Ex^5 + \text{etc.})(1 + Bh^2 + Dh^4 + \text{etc.}) + (Ah + Ch^3 + Eh^5 + \text{etc.})(1 + Bx^2 + Dx^4 + \text{etc.})$

$$(4)\qquad \cos.(x+h) = (1+Bx^2+Dx^4+\text{etc.})\,(1+Bh^2+Dh^4+\text{etc.}) - (Ax+Cx^3+Ex^5+\text{etc.})\,(Ah+Ch^3+Eh^5+\text{etc.})$$

Si dans (1) et (2) on remplace x par $x+h$, on trouve

$$(5)\qquad \sin.(x+h) = A(x+h)+C(x+h)^3+E(x+h)^5+\text{etc.}$$

$$(6)\qquad \cos.(x+h) = 1+B(x+h)^2+D(x+h)^4+F(x+h)^6+\text{etc.}$$

Les équations (3) et (5) fournissent deux expressions différentes de la même quantité sin. $(x+h)$: nous pouvons donc égaler entre eux les seconds membres et en faire autant de (4) et (6) : il vient alors en développant les différentes puissances du binôme $x+h$ et ordonnant par rapport à h

$$\left.\begin{array}{ll} Ax & +\ A \\ +Cx^3 & +\ 3Cx^2 \\ +Ex^5 & +\ 5Ex^4 \\ +\text{etc.} & +\ \text{etc.} \end{array}\right| h + \text{etc.} \ldots = \ldots\ldots \left.\begin{array}{ll} Ax & +\ A \\ +Cx^3 & +\ ABx^2 \\ +Ex^5 & +\ ADx^4 \\ +\text{etc.} & +\ \text{etc.} \end{array}\right| h + \text{etc.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1 & +\ 2Bx \\ +Bx^2 & +\ 4Dx^3 \\ +Dx^4 & +\ 6Fx^4 \\ +\text{etc.} & +\ \text{etc.} \end{array}\right| h + \text{etc.} \ldots = \ldots\ldots \left.\begin{array}{ll} 1 & -\ A^2x \\ +Bx^2 & -\ ACx^3 \\ +Dx^4 & -\ AEx^5 \\ +\text{etc.} & -\ \text{etc.} \end{array}\right| h + \text{etc.}$$

Lorsque deux polynômes égaux contiennent les mêmes puissances d'une quantité, il est nécessaire que les coefficients correspondants soient égaux entre eux, si cette quantité peut avoir des valeurs quelconques : en effet, prenons une équation de la forme

$$A' + B'y + C'y^2 + \text{etc.} = A'' + B''y + C''y^2 + \text{etc.}$$

dans laquelle y seul est variable : quand $y = 0$, on a $A' = A''$. Retranchons ces deux quantités égales des deux membres et divisons le tout par y, il en résulte

$$B' + C'y + \text{etc.} = B''y + C''y + \text{etc.}$$

ce qui exige encore que $B' = B''$. Il en est de même pour C' et C'', ainsi que pour tous les coefficients qui suivent. Il en résulte donc, en égalant les coefficients de la première puissance de h, que

$$A + 3Cx^2 + 5Ex^4 + \text{etc.} = A + ABx^2 + ADx^4 + \text{etc.}$$

et $$2Bx + 4Dx^3 + 6Fx^5 + \text{etc.} = -(A^2x + ACx^3 + AEx^5 + \text{etc.}$$

et, par la même raison

$$2B = -A^2;\ 3C = AB;\ 4D = -AC;\ 5E = AD, \text{ etc.}$$

d'où enfin

$$B=\frac{-A^2}{2};\ C=\frac{AB}{3}=\frac{-A^3}{2.3};\ D=\frac{-AC}{4}=\frac{+A^4}{2.3.4};\ E=\frac{AD}{5}=\frac{+A^5}{2.3.4.5},\ \text{etc.}$$

Substituons ces expressions dans les séries qui représentent $\sin x$ et $\cos.x$

$$\sin.x=Ax-\frac{A^3}{2.3}x^3+\frac{A^5}{2.3.4.5}x^5-\text{etc.}$$

$$\cos.x=1-\frac{A^2}{2}x^2+\frac{A^4}{2.3.4}x^4-\text{etc.}$$

Pour déterminer A, divisons les deux membres de la première formule par x, ce qui donnera

$$\frac{\sin.x}{x}=A-\frac{A^3}{2.3}x^2+\text{etc.}$$

et comme elle doit être vraie, quelle que soit la valeur de x, elle doit être satisfaite encore lorsque $x=0$, et, dans ce cas, elle se réduit à $\frac{\sin.0}{0}=A$. Nous avons trouvé, à la fin du paragraphe 73, que $\frac{\sin.0}{0}=1$, donc $A=1$ et les formules se réduisent à

$$\sin.x=x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}-\frac{x^7}{2.3.4.5.6.7}+\text{etc.}$$

$$\cos.x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^6}{2.3.4.5.6}+\text{etc.}$$

Ces deux séries ne donnent le développement rigoureux des sinus et cosinus en fonction de l'angle qu'autant qu'on prend tous les termes qui sont en nombre infini. Elles ne pourront évidemment être employées qu'autant qu'on pourra se borner à prendre un petit nombre de termes, ce qui n'aura lieu que lorsque l'angle sera très-petit.

76. *Application des théorèmes de Taylor et de Maclaurin. — Séries diverses.* — Le calcul différentiel, dont il a été donné un exemple direct au § 74, donne les moyens d'arriver promptement aux développements de séries quelconques. Quoique ce genre de calcul soit étranger au plus grand nombre des personnes qui auront à chercher des renseignements dans cet ouvrage, nous allons exposer succinctement la marche générale à suivre. Ceux qui n'en pourront pas suivre les détails trouveront du moins l'indication

de séries autres que celles des sinus et cosinus, séries dont on peut avoir besoin, même alors qu'on n'en saurait pas découvri la marche soi-même.

Le calcul différentiel est riche des deux théorèmes de Taylor et de Maclaurin; le premier se résume dans la formule

$$f(x+h)=y+y'\frac{h}{1}+y''\frac{h^2}{1.2}+y'''\frac{h^3}{1.2.3}+\cdots\cdots$$

dans laquelle y représente $f(x)$, et y', y'', y'''.... sont les dérivées première, seconde, troisième....., ou les coefficients différentiels du 1er ordre, du 2e ordre.... de $f(x)$.

Le théorème de Maclaurin, qui n'est qu'une conséquence de celui de Taylor, se résume de même par la formule

$$f(x)=f(o)+\frac{x}{1}f'(o)+\frac{x^2}{1.2}f''(o)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(o)+\cdots\cdots$$

$f(o)$, $f'(o)$, $f''(o)$.... étant les valeurs particulières de la fonction considérée $f(x)$, et de ses dérivées première, seconde, troisième..... lorsqu'on y introduit l'hypothèse $x=o$.

L'usage de ces deux théorèmes conduit rapidement aux principales séries en usage.

Développement du sinus. — Appliquons le théorème de Maclaurin

$f(x)=\sin.x$ donne immédiatement par la différentiation

$$f'(x)=\cos.x,\quad f''(x)=-\sin.x,\quad f'''(x)=-\cos x.\ \ldots\ldots$$

L'hypothèse $x=o$ conduit à

$$f(o)=\sin.o=o,\quad f'(o)=1,\quad f''(o)=o,\quad f'''(o)=-1,$$
$$f''''(o)=o,\quad f^{v}(o)=1.\ \ldots\ldots$$

La substitution dans la formule de Maclaurin donne de suite

$$\sin.x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\cdots\cdots$$

Développement du cosinus. — On a successivement

$$f(x)=\cos.x,\ f'(x)=-\sin.x,\ f''(x)=-\cos.x,\ f'''(x)=\sin.x,\ f''''(x)=\cos.x$$
$$f(o)=1,\ f'(o),\ f''(o)=-1,\ f'''(o)=o,\ f''''(o)=1.\ \ldots\ldots$$

et la substitution donne

$$\cos.x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}\cdots\cdots\cdots$$

Développement de la tangente. — L'application du même théorème de Maclaurin donne

$$f(x)=\text{tang}.x,\quad f'(x)=\frac{1}{\cos.^2 x},\quad f''(x)=\frac{2\sin.x}{\cos.^3 x},$$

$$f'''(x)=\frac{2\cos.^2 x+6\sin.^2 x}{\cos.^4 x}\cdots\cdots$$

L'hypothèse $x=o$ conduit à

$$f(o)=o,\ f'(o)=1,\ f''(o)=o,\ f'''(o)=2,\ f''''(o)=8.\ \ldots$$

qui, substitués, donnent

$$\text{tang}\ x=x+\frac{x^3}{1.3}+\frac{x^5}{1.3.5}+\frac{x^7}{1.3.5.7}\cdots\cdots$$

Développement de l'exponentielle e^x. — Toutes les dérivées sont égales à la fonction elle-même

$$f(x)=e^x=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots\cdots$$

L'hypothèse $x=o$ donne alors

$$f(o)=f'(o)=f''(o)=\ldots.=1$$

et l'application de la formule de Maclaurin donne

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}$$

Développement de l'exponentielle a^x. — On a successivement

$$f(x)=a^x,\ f'(x)=a^x\log.a,\ f''(x)=a^x\log.^2 a,\ f'''(x)=a^x\log.^3 a.\ \ldots$$

le logarithme de a étant pris dans la base e.

L'introduction de $x=o$ dans ces diverses dérivées donne

$$f(o)=1,\ f'(o)=\log.a,\ f''(o)=\log.^2 a,\ f'''(o)=\log.^3 a.\ \ldots$$

et la substitution conduit de suite à

$$a^x=1+x\log.a+\frac{x^2}{1.2}\log.^2 a+\frac{x^3}{1.2.3}\log.^3 a+\cdots\cdots$$

Développement du logarithme en fonction du nombre. — Le théorème de Maclaurin conduit à un résultat dans lequel les termes sont l'infini positif et l'infini négatif, ce qui ne fait rien

connaître. Il faut remonter à l'emploi du théorème de Taylor, dont nous transcrivons de nouveau l'expression algébrique,

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{1.2}+f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}\cdot\ldots\ldots$$

Au lieu d'y supposer $x=o$, ce qui conduirait au théorème de Maclaurin, posons $x=1$, nous aurons

$$f(1+h)=f'(1)+f(1)\frac{h}{1}+f''(1)\frac{h^2}{1.2}+f'''(1)\frac{h^3}{1.2.3}\cdot\ldots\ldots$$

Le cas à traiter actuellement est celui de la fonction logarithmique népérienne; cherchons-en les dérivées successives.

$$f(x)=\log.x,\ f'(x)=\frac{1}{x},\ f''(x)=-\frac{1}{x^2},\ f'''(x)=\frac{2}{x^3},\ f^{IV}(x)=-\frac{2.3}{x^4}\cdot\ldots\ldots$$

L'introduction de l'hypothèse $x=1$ donne à ces dérivées les valeurs particulières

$$f(1)=o,\ f'(1)=1,\ f''(1)=-1,\ f'''(1)=2,\ f^{IV}(1)=-2.3.\ \ldots\ldots$$

dont la substitution dans $f(1+h)$ donne

$$f(1+h)=\log.(1+h)=h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4}\cdot\ldots\ldots$$

Le changement de signe de h donnerait

$$\log.(1-h)=-h-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4}\cdot\ldots\ldots$$

Le développement d'un logarithme pris dans la base a se déduira des précédents en multipliant par le module M, qui représente le logarithme de e pris sur cette base a.

$$\log.(1\pm h)=\left\{\pm h-\frac{h^2}{2}\pm\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4}\cdot\ldots\ldots\right\}\times M$$

Nous sommes arrivés à cette même formule par des considérations différentes, au paragraphe 39, qui traite de la construction des tables de logarithmes.

Développement du binôme. — Pour bien faire comprendre l'extrême facilité offerte dans certains cas par le théorème de Taylor, nous retrouverons en quelques mots la loi du développement du binôme de Newton

Soit $f(x) = x^m$; la formule de Taylor

$$f(x + h = f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

donnera, par la substitution des valeurs

$$f(x) = x^m, \; f'(x) = mx^{m-1}, \; f''(x) = m(m-1)x^{m-2} \ldots\ldots$$

le développement

$$f(x + h) = (x + h)^m = x^m + mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}h^2x^{m-2} +, \text{etc.}$$

LIVRE III.

TOPOGRAPHIE.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS GÉNÉRALES.

77. La topographie étant la description d'une portion de la surface de la terre, doit se composer de problèmes graphiques dont la géométrie descriptive donne la solution au moyen de deux projections. C'est ainsi, à quelques modifications près, que l'on procède en topographie. On sait qu'en général, pour décrire un corps, on projette ses différents points et arêtes sur un plan vertical et sur un plan horizontal, puis qu'ensuite, si l'on veut reproduire ce corps ou en construire un semblable, on emploie les ordonnées déterminées par ces projections, ou des lignes qui leur sont proportionnelles. Telle est la méthode usitée pour la construction des plans en relief. Sur le polygone formé par la projection horizontale et à chacun de ses points principaux, on élève des verticales égales en hauteur aux distances respectives des projections verticales de ces points à la ligne de terre, et l'on réunit ensuite tous les sommets de ces ordonnées par une matière solide. Nous n'entendons parler ici que des reliefs d'une petite étendue, tels que ceux en plâtre qui sont employés pour modèles. Ceux en grand, qui autrefois étaient construits en carton, le sont aujourd'hui en bois. Les procédés très-ingénieux que l'on emploie sont des opérations pratiques étrangères à notre sujet.

Quand on ne construit pas de relief, quand on s'en tient aux plans, on veut qu'ils parlent clairement aux yeux, pour que ceux-ci puissent instantanément saisir l'ensemble du terrain et de toutes ses formes. Les deux projections, dans ce cas, ne conviennent pas. Pour parer à cet inconvénient, on est conduit à supprimer la projection verticale, en indiquant par des chiffres inscrits sur le plan les hauteurs relatives des points principaux. Ce moyen, déjà préférable aux deux projections, ne répond pas

encore d'une manière assez satisfaisante au but que l'on veut atteindre, puisque la réunion de ces cotes ne ferait pas saisir au premier coup d'œil les accidents divers du terrain. Le seul moyen est d'imaginer tracé sur la terre un système de lignes dont les inflexions projetées horizontalement indiquent celles du sol.

Cette manière de procéder appartient à une théorie particulière, très en usage pour le tracé des plans de fortification. Nous lui consacrerons plus loin un chapitre spécial.

Toute surface peut être engendrée de plusieurs manières : ainsi, un cône peut l'être par une génératrice passant par le sommet et s'appuyant constamment sur la courbe qui lui sert de base, ou par cette courbe s'élevant et décroissant sans cesse, jusqu'à ce qu'arrivée au sommet elle se réduise à un point. Dans cette dernière hypothèse, on peut n'avoir égard qu'à celles de ces courbes qui sont à égales distances, et qui peuvent être considérées comme des sections du cône par des plans équidistants. Une demi-sphère sera engendrée par un quart de cercle s'appuyant sur une circonférence, et passant par son pôle, ou par cette circonférence s'élevant parallèlement à elle-même et décroissant de rayon jusqu'à ce que, réduite à un point, elle se confonde avec ce pôle. De là naît l'idée des deux moyens adoptés pour rendre les formes du terrain, et dont l'un emploie les lignes de plus grande pente et l'autre les courbes horizontales. Parmi tous les systèmes que l'on pourrait imaginer, ces deux offrent une assez grande simplicité.

78. La ligne de plus grande pente est caractérisée par les propriétés suivantes :

1° De toutes les lignes partant du même point et tracées sur le terrain, c'est elle qui fait le plus grand angle avec l'horizon : ceci résulte de sa définition ;

2° Elle est perpendiculaire aux intersections de la surface par les plans horizontaux passant par ses extrémités ;

3° Sa projection est perpendiculaire à celles des intersections et par conséquent est la plus courte distance entre ces lignes.

Pour le démontrer, soit AB, *fig.* 17, une ligne de plus grande pente terminée aux courbes que produisent les sections faites par deux plans horizontaux : P est la projection de A sur le plan inférieur et PB celle de AB. Prenons sur la tangente, à l'élément de la courbe passant par B, deux points M et N voisins et également distants de B, puis joignons M et N avec P. En comparant les

triangles AMP, ANP et APB, on voit qu'ils sont tous trois rectangles en P, et ont un côté commun AP. Les deux premiers donnent tang. AMP $=\frac{AP}{MP}$, tang. ANP$=\frac{AP}{NP}$; le troisième fournit tang. ABP$=\frac{AP}{PB}$. Les numérateurs étant les mêmes, il faut, puisque l'angle ABP est plus grand que les autres, que le dénominateur PB soit plus petit que les dénominateurs MP, NP, et qu'ainsi PB étant la plus courte distance du point P à la ligne MN, lui soit perpendiculaire. De là résulte que les triangles rectangles MPB, NPB, sont égaux : car PB est commun, et MB, NB, sont égaux par construction : donc MP$=$NP. De même les triangles rectangles AMP, ANP, sont égaux, et par suite leurs hypothénuses AM et AN sont égales. Il s'ensuit que les triangles AMB, ANB, sont égaux, puisqu'ils ont un côté commun et les autres égaux : donc les angles homologues et par conséquent ceux en B sont égaux : donc enfin ces derniers sont droits. Ces lignes sont des obliques également écartées de AB qui, par suite, est perpendiculaire à MN : donc enfin les différentes propriétés énoncées se trouvent démontrées.

Cette démonstration a supposé implicitement que le terrain renferme entièrement les lignes AB, AM, AN, c'est-à-dire qu'il est plan. Cette hypothèse est toujours réalisée, si l'on opère sur deux courbes MN, M'N', assez rapprochées pour que la surface du terrain se confonde avec celle du plan tangent.

Ce que nous avons dit plus haut s'appliquera donc à chaque élément de la ligne de plus grande pente, de sorte que, partant normalement à la première courbe, elle arrivera normalement à la seconde, en s'infléchissant par degrés insensibles, de manière à être toujours perpendiculaire aux courbes que l'on pourrait imaginer entre les deux principales, en les faisant participer à la fois aux formes de celles-ci.

Lors donc que les courbes ne seront pas parallèles, c'est-à-dire droites ou circulaires concentriques, les projections des lignes de plus grande pente ne seront pas rectilignes.

Si l'on employait des lignes de plus grande pente continues depuis le sommet jusqu'en bas, elles seraient le plus généralement des courbes à double courbure, tandis que les sections horizontales sont des courbes planes. De plus, si l'on était parvenu à déterminer sur le terrain un assez grand nombre de ces lignes de plus grande pente ou normales, on ne serait encore pas dispensé de tracer des courbes horizontales, quand on

voudrait avoir les cotes de certains points déterminés. Il faudrait d'abord qu'une de ces lignes de plus grande pente AB, A'B', *fig.* 18, fût cotée dans toute sa longueur, et, si M est le point dont on voudrait connaître la hauteur au-dessus du plan de repère, il serait nécessaire de faire passer par ce point une courbe horizontale ME jusqu'à la ligne A'B', et CD serait la cote de M.

Le système des courbes n'offre pas le même inconvénient : tous les points appartenant à chacune d'elles auront même cote, et, si l'on adopte un écartement constant entre tous les plans coupants, les courbes n'auront pas besoin d'être cotées. De plus, leur rapprochement ou écartement en projection annoncera que la pente est plus ou moins rapide. Supposons qu'un plan vertical coupe cet ensemble de courbes, on construira facilement le profil résultant de cette intersection, en marquant au-dessus de la ligne de terre MN, *fig.* 19, les traces de tous les plans horizontaux équidistants, et y projetant les points des courbes correspondantes. Le profil du terrain sera la ligne qui unira ces points. Si l'équidistance est assez petite pour que l'on puisse considérer les éléments du profil comme des lignes droites, on aura une suite de petits triangles rectangles dans lesquels les côtés verticaux de l'angle droit seront tous égaux, les hypothénuses représenteront les lignes du terrain, les côtés horizontaux en seront les projections, et dans lesquels la pente du terrain, étant proportionnelle au rapport des deux côtés de l'angle droit, sera en raison inverse de la base, puisque la hauteur est constante.

Si l'on a besoin de connaître la cote d'un point M, *fig.* 20, placé entre deux courbes auxquelles appartiennent A et B, on l'obtiendra au moyen des deux triangles semblables ABC, AMN. La quantité MN ainsi obtenue sera ajoutée à la cote du point A ou de la courbe inférieure.

Plus tard (chap. II, § 202), en nous occupant de la manière de figurer le terrain, nous verrons comment on a combiné ces deux systèmes : ce que nous venons d'exposer suffit en ce moment pour donner une première idée de ces méthodes.

79. Le problème de la topographie se compose, comme nous venons de le voir, de deux parties distinctes : 1° la projection de tous les points de la surface constitue ce que l'on nomme *la levée du plan ;* 2° la connaissance des ordonnées de tous ces points. C'est ce qui se désigne sous le nom de *figuré du terrain.*

Le plan de repère que l'on choisit pour y établir la projection

orthogonale est le plan tangent à la surface de la sphère au point milieu de la portion que l'on veut décrire. Il faut entendre par surface de la terre celle des eaux de la mer prise entre leurs plus grande et plus petite élévations.

Nous avons dit que nous projetions tous les points de la surface à représenter sur le plan horizontal : ainsi BTB', *fig.* 21, étant cette surface, elle se projettera en ATA', et la calotte sphérique sera représentée sur le plan de projection par la surface du cercle dont AT=AT' est le rayon : c'est-à-dire que la projection altérera les dimensions de la surface projetée. C'est d'ailleurs ce qui arrive toujours lorsque la projection et la surface ne sont pas parallèles.

80. D'un autre côté, la surface de la sphère n'étant pas développable ne pourra jamais être représentée sur un plan d'une manière exacte. Il faut donc voir jusqu'à quel point, dans la pratique, on peut prendre la projection pour la surface projetée : ce qui fixera la limite des levées topographiques. En d'autres termes, ce que nous cherchons, c'est dans quelles limites le plan tangent en un point du globe peut, sans erreur sensible, être considéré comme se confondant avec la surface. Soit O le centre du globe, T le point de tangence : la différence entre TA et SB, ou entre la tangente et le sinus, sera plus grande que celle qui existe entre l'arc et la tangente. Si nous supposons l'arc BTB' égal à 1°, le logarithme de la tangente de sa moitié BT ou 0°.50' sera 7,8950988, et celui du sinus correspondant 7.8950854. Les deux nombres auxquels appartiennent ces logarithmes sont 0,00785414 et 0,00785390, dont la différence est 24 cent millionièmes du rayon pris pour unité. Pour ramener cette différence au rayon du globe, qui a six millions de mètres environ, il faut multiplier 24 par $\frac{6}{100}$, ce qui donne $\frac{144}{100}$= 1^{m},44. La différence entre la double tangente AA' et le double sinus sera ainsi 2^{m},88, et par conséquent celle de l'arc à la tangente sera plus petite que ce nombre. Il s'ensuit qu'en prenant le cercle dont AT est le rayon, pour la projection de la calotte sphérique dont la corde est BB' et qui a 1° ou 10 myriamètres de diamètre, on ne commet pas une erreur de 3^{m} sur la dimension totale. Cette quantité est bien au-dessous des erreurs inévitables dans les opérations de la levée d'un terrain d'une aussi vaste étendue. L'arc BTB' étant de 1° ou 100000 mètres représente en effet 20 lieues moyennes, et la surface correspondante est de 314.

81. La projection que nous nous proposons de construire sera une figure semblable à celle qui serait projetée sur le plan tangent à la surface de la sphère. Elle sera le résultat de la rencontre de tous les rayons qui aboutissent aux points remarquables du terrain, par un plan *aa'* parallèle à AA', ou tangent à une sphère concentrique à la terre. Le rapport entre OT et O*t*, qui sera aussi celui des côtés homologues sur le globe et sur la projection *aa'*, sera l'échelle du plan. Il est évident que l'on pourra obtenir une infinité de projections semblables, mais différentes de dimensions, en faisant varier la longueur de O*t*.

Si l'on mesure un côté du terrain, et son homologue sur le papier, avec la même unité de mesure, on trouve deux nombres dont le rapport fournit une fraction qui indique l'échelle du plan. Toutes les fois qu'il est possible de la réduire à n'avoir que l'unité pour numérateur, on le fait pour la simplifier. Si, par exemple, $\frac{1}{100}$ est cette fraction réduite, on en conclura qu'un côté du plan est la centième partie de son homologue sur le terrain, et l'on dira que le plan est au centième ou à l'échelle de $\frac{1}{100}$. La surface du plan sera 10000 fois moindre que celle qu'elle représente.

82. Par extension, on a donné le nom d'échelles aux figures géométriques qui font connaître les longueurs des lignes du terrain au moyen de leurs homologues sur le plan ou réciproquement. Il ne sera peut-être pas inutile de donner les moyens de construire l'échelle graphique d'une carte, quel que soit le rapport que l'on assigne entre la levée et le terrain, et quelle que soit aussi l'unité de mesure employée.

Nous prendrons de suite un exemple numérique pour que la méthode paraisse plus claire. Supposons que l'unité de mesure soit le mètre, et que l'échelle proposée soit $\frac{1}{2000}$. Il serait trop inexact de chercher la longueur du mètre sur la carte, et de la porter 10 fois, 100 fois, etc., de suite, pour avoir les dizaines, centaines, etc., de mètres.

Cherchons donc directement les longueurs qui représentent ces groupes. Du rapport $\frac{1}{2000}$ nous concluons que 1^m sur le papier équivaut à 2000^m sur le terrain, et qu'ainsi, $0^m,001$ vaut 2^m; $0^m,005$ vaut 10^m et $0^m,05$ vaut 100 mètres.

Telles sont donc les dimensions des dizaines et centaines de mètres.

Traçons onze lignes parallèles, horizontales et équidistantes (leur écartement est arbitraire, pourvu qu'il soit uniforme). Por-

tons 10 fois $0^m,005$ de A en E, *fig.* 22, puis 0,05 autant de fois vers B que nous voulons que l'échelle contienne de centaines. Élevons par les points A, E, B, et toutes les centaines, des perpendiculaires jusqu'à la rencontre de CD : unissons enfin par des transversales les dizaines de la ligne supérieure à celles de la ligne inférieure, les 1er, 2e, 3e, etc., 9e du haut, avec les 2e, 3e..... 10e du bas. L'échelle alors est terminée. Les transversales complètent une suite de triangles rectangles semblables, dans lesquels les côtés homologues horizontaux représentent 1, 2, 3, etc., mètres, comme il est facile de s'en assurer au moyen d'une proportion. On pourra donc évaluer une longueur prise sur la carte avec le compas : car, supposons qu'elle excède un peu la centaine de mètres, on posera l'une des pointes du compas sur la verticale 100, puis on la fera glisser dessus jusqu'à ce que l'autre tombe sur une division exacte en h, par exemple : alors on aura $hk = 100^m + 20 + 5 = 125^m$.

On se sert plus habituellement, pour les dessins topographiques, d'échelles simples représentées par la seule ligne CD de la figure 22. Les positions des points ne sont presque toujours déterminées sur la projection qu'avec une certaine approximation représentant la limite des longueurs appréciables à l'œil (voir au § 89). Il n'y a donc pas lieu de chercher à connaître les longueurs de la planimétrie avec une approximation plus grande que cette limite, et l'œil y parvient immédiatement quand, aidé d'un compas, on cherche à apprécier la partie supplémentaire donnée par une fraction des plus petites divisions placées à l'extrême gauche de la ligne CD.

On peut réduire facilement toutes les échelles anciennes à la forme d'une fraction ayant l'unité pour numérateur. Celle de Cassini est de 1 ligne pour 100 toises : en réduisant 100 t. on trouve 86400 lignes, et l'on peut l'écrire sous la forme $\frac{1}{86400}$.

S'il s'agissait de 6 lignes pour cent toises, ce serait $\frac{6}{86400}$ ou $\frac{1}{14400}$.

Si l'échelle était de 1 pouce pour 100 toises, on écrirait $\frac{1}{7200}$.

83. La différence d'échelles des plans les a fait classer en topographie, corographie et géographie.

Les cartes topographiques construites à de grandes échelles donnent beaucoup de détails. Les cartes géographiques sont celles qui indiquent seulement les points principaux de la surface du globe. Les cartes corographiques forment l'intermédiaire entre les deux genres précédents.

Une ancienne locution les classe encore en cartes à grand point et à petit point, suivant qu'elles renferment beaucoup ou peu de détails.

A cette classification il faut ajouter les cartes hydrographiques ou marines qui représentent des portions de la mer et des côtes avec des sondes indiquant la profondeur des eaux.

84. Les échelles décimales sont les seules usitées maintenant. On peut, sans prétendre le faire d'une manière absolue, les ranger ainsi qu'il suit :

$\frac{1}{2000}$ ou $\frac{1}{2500}$ pour les levées de places fortes, villes, routes, canaux, fortifications de campagne et, en général, pour tous les plans spéciaux ;

$\frac{1}{5000}$ principalement pour réduire et réunir les matériaux levés à la précédente échelle, ou pour tracer des projets ;

$\frac{1}{10000}$ pour les levées de la topographie complète d'un pays de médiocre étendue, des campements, des marches des armées, et pour servir de base aux reliefs construits pour l'étude du terrain ;

$\frac{1}{20000}$ pour les levées de très-grande surface, les reconnaissances levées de champ de bataille et pour les réductions de la précédente ;

$\frac{1}{40000}$. Cette échelle est employée dans les travaux de la nouvelle carte de France, pour y ajouter, aux réductions du cadastre, les détails modifiés ou omis et pour y figurer le relief du terrain.

$\frac{1}{80000}$. Celle-ci est adoptée pour la gravure de la carte de France. Le 200000e, le 500000e, le millionième et le deux millionième sont affectés aux cartes corographiques et géographiques.

CHAPITRE II.

CANEVAS TOPOGRAPHIQUE.

85. Reprenons la construction de la projection horizontale de tous les points du terrain. On peut les imaginer liés entre eux par des droites, de manière à former une suite de triangles, et l'on conçoit que, l'un de ces triangles étant donné, on pourra construire les autres de proche en proche.

Cette division complète du terrain en triangles nécessitant une trop grande quantité d'angles, et des côtés trop petits parfois, la détermination de ces éléments deviendrait très-pénible et souvent

impraticable. On se contente d'en concevoir un certain nombre dont la forme et les dimensions soient favorables à leur calcul et à leur tracé, et aux côtés desquels viennent se rattacher, par des ordonnées perpendiculaires à ces côtés, tous les points de détail qui n'ont pas servi de sommets. Ces triangles formés par des lignes fictives composent un canevas dont l'exécution doit être la première opération d'une levée topographique, et qui est achevé lorsqu'on a multiplié les côtés de manière à pouvoir y rattacher tous les détails sans erreur sensible au compas, ce qui dépend de l'échelle.

86. Le côté duquel on part, et que l'on nomme la *base*, doit être pris d'une longueur convenable relativement à la grandeur des triangles que l'on veut construire, et doit être mesuré avec soin. On choisit pour cela, sur un terrain uni, une ligne des extrémités de laquelle on découvre un grand nombre de points. On la mesure avec une chaîne tendue horizontalement, ou mieux avec des règles placées bout à bout, établies horizontalement à l'aide d'un niveau d'eau ou à perpendicule, et dont on connaît exactement la longueur. Si l'on n'a pas de niveau, ou que l'inclinaison du terrain l'exige, on mesure la base inclinée et l'on calcule de combien elle diffère de sa projection.

Si AB, *fig.* 23, représente la base mesurée et AC sa projection, avec laquelle elle fait un angle α, on a $AC = AB \cos.\alpha$ ou $AB - AC = AB(1 - \cos.\alpha) = 2AB \sin.^2 \frac{1}{2}\alpha$ (§ 24). (Voir *au livre V, où l'on traite de la mesure des bases géodésiques, les avantages attachés à cette dernière transformation.*)

87. La base étant mesurée, on procède à l'observation des angles; mais on voit ici que la forme des triangles n'est pas une chose indifférente : car, s'il y a dans un triangle un angle très-aigu, tel que C, *fig.* 24, une légère erreur sur la mesure de l'angle B produira une différence CC′ très-sensible sur le côté opposé AC. Il suit de là que la forme équilatérale est préférable à toute autre, car la meilleure intersection est celle de deux lignes qui forment un angle droit, et l'un des angles d'un triangle ne peut satisfaire à cette condition qu'au détriment des deux autres.

88. Quant à la longueur des côtés, elle dépend de l'étendue du plan, de l'échelle adoptée et de la précision de l'instrument avec lequel on mesure les angles. Cette dernière considération est très-importante, et mérite que nous nous y arrêtions quelques instants. Soit $CC' = E$, *fig.* 24, l'erreur produite sur le côté AC

par l'erreur angulaire β commise dans l'estimation de l'angle B, et désignons par K le côté BC. Il est évident que E est fonction de β et de K.

Pour déterminer la relation qui existe entre ces trois quantités, abaissons CD perpendiculaire sur BC′ prolongé, et nous aurons $CD = K \text{ tang. } \beta$; mais CC′ oblique par rapport à CD est plus grand que cette ligne, donc $E > K \text{ tang. } \beta$ ou $K < \frac{E}{\text{tang.} \beta}$. Si E représente la limite des erreurs qui, eu égard à l'échelle, ne sont d'aucune influence sur la projection, on voit, par la seconde inégalité ci-dessus, que K doit toujours rester plus petit que $\frac{E}{\text{tang.} \beta}$.

Si la nature des opérations exigeait que la dimension des côtés restât dans de certaines limites; qu'ils fussent d'une longueur moyenne K donnée, on déterminerait β au moyen de la troisième inégalité : on saurait par là au-dessous de quelle quantité angulaire doit rester l'erreur β, et par suite, quel instrument on doit employer pour atteindre ce but.

Si enfin, la longueur moyenne K étant obligatoire, on n'avait pas le choix de l'instrument; si l'on n'en avait qu'un seul à sa disposition et dont on connût le degré de précision β, la première inégalité indiquerait que les côtés de triangles, par suite des circonstances particulières que nous supposons, seront affectés d'une erreur au moins égale à $K \text{ tang.} \beta$. On saurait aussi quel degré de confiance on pourrait accorder au résultat, ou, si l'on veut encore, quelle échelle il faudrait employer pour que l'erreur E devînt insensible.

89. Pour bien nous rendre compte de ce que nous représentons par E et pour sentir de quelle influence est l'échelle du plan, observons d'abord que la cinquième partie d'un millimètre pouvant être considérée comme la limite des longueurs appréciables sur le papier, nous devons faire en sorte que l'erreur E réduite à l'échelle ne soit pas plus grande que $\frac{1^m}{5000}$ ou $0^m,0002$: c'est ce qui arrivera lorsque nous aurons fait $E = \frac{M^m}{5000}$, M représentant le dénominateur de la fraction dont le numérateur est l'unité, et qui exprime l'échelle. En effet, pour réduire l'erreur E ou $\frac{M^m}{5000}$ à cette échelle, nous devons multiplier par $\frac{1}{M}$, ce qui nous donne précisément

$\frac{1^m}{5000}$, puisque M est facteur commun aux deux termes de la fraction. Voyons quelles valeurs prendront E et K en raison des échelles. Supposons celle de $\frac{1}{1000}$: alors

$$\ldots\ldots E = \frac{1000^m}{5000} = \frac{1^m}{5} \text{ et } \ldots\ldots K < \frac{1^m}{5 \text{ tang.B}}$$

Pour l'échelle de $\frac{1}{10000}$

$$\ldots\ldots E = \frac{10000^m}{5000} = 2^m. \ldots\ldots K < \frac{2^m}{\text{tang. B}}$$

Si l'on opère à $\frac{1}{40000}$

$$\ldots\ldots E = 8^m. \ldots\ldots\ldots\ldots K < \frac{8^m}{\text{tang. B}}$$

S'il s'agissait de continuer une levée faite à une ancienne échelle, à celle de 6 lignes pour 100 toises qui correspond à $\frac{1}{14400}$, on aurait $E = \frac{14400^m}{5000} = 2^m,880$ et l'on conclurait encore le maximum correspondant de K. Supposous, pour fixer les idées, que l'instrument dont on doit faire usage ne donne les angles qu'à 25′ près, on aura :

$$2^m88 > K \text{ tang.} 0^g.25 \text{ ou } K < \frac{2^m88}{\text{tang.} 0^g25}$$

$$\begin{aligned} \text{log. } 2{,}88 &= 04479329 \\ \text{C}^t \text{ log. tang.} 25' &= 12.4059379 \\ \hline & 12{,}8538708 \end{aligned}$$

Ce logarithme, après avoir supprimé 10 à la caractéristique, correspond à 714^m. Telle est donc la plus grande dimension que puissent avoir les côtés pour que l'erreur angulaire ne produise pas d'effet sensible sur le tracé des projections des côtés.

Les considérations précédentes ont donné le maximum de longueur des côtés à employer dans la confection du canevas. Quant au minimum, il n'y en a pas d'autre que celui qui résulterait de l'augmentation du travail. Les opérations de la levée de détail pouvant conduire ensuite à employer des côtés égaux ou à peu près à ceux qui résulteraient de la jonction des points les plus rapprochés du canevas, quoique ces côtés n'aient pas été employés dans la confection de celui-ci, il y a lieu d'assigner aux distances comprises entre ces points les plus rapprochés un maximum égal à celui que comportera l'emploi de l'instrument qui sera employé à la levée de détail.

90. Les triangles étant disposés en vertu de ces différentes con-

sidérations, et d'après une reconnaissance préalable du terrain, on mesure les angles. Les instruments le plus en usage se divisent en deux classes : les premiers sont la planchette et l'alidade, dont l'emploi combiné donne le moyen de tracer les angles immédiatement et sans en connaître la graduation : on les nomme goniographes ; dans cette première classe on doit ranger encore le sextant graphique dont nous donnerons la description en parlant des instruments à réflexion. Dans la seconde catégorie sont rangés les goniomètres, c'est-à-dire les instruments qui expriment l'amplitude des angles : ce sont le graphomètre, la boussole et le sextant gradué ; ne nous occupant ici que des opérations graphiques, nous ne devons employer que les instruments qui donnent les angles réduits à l'horizon.

On se transporte successivement aux sommets de chacun des triangles désignés et l'on y recueille tous les angles qui y aboutissent ; ces angles construits immédiatement donnent le tracé complet du canevas. Il ne faut pas oublier de déterminer en même temps autant de points que possible de ceux qui ne doivent pas servir de station, en dirigeant sur chacun d'eux des rayons de trois points au moins (afin qu'il y ait vérification), de manière qu'ensuite tous les détails se rattachent à des points assez rapprochés pour que les erreurs, s'il y en a, deviennent insensibles.

91. Nous avons dit qu'après avoir mesuré exactement la base, nous partions de ses extrémités pour construire le canevas des triangles : mais A B étant cette base représentée sur le papier et à l'échelle par *a b*, nous ne pourrons construire, à l'aide d'un goniographe, sur cette ligne, un triangle *abc* semblable à ABC, qu'autant que nous ferons coïncider successivement *a* avec la verticale de A, *b* avec celle de B, et que *ab* sera dans le plan vertical de AB. C'est en cela que consiste l'*orientation* du plan. Il est nécessaire que *a* coïncide avec A, lorsque de ce point on veut tracer l'angle immédiatement. Sans cela, il suffit pour l'orientation que *ab* soit parallèle au plan vertical de AB et que *a* et *b* soient disposés semblablement à A et B. On dira donc qu'une levée est orientée lorsque la ligne qui unit les deux projections est parallèle au plan vertical passant par les deux points homologues du terrain, ces points étant d'ailleurs disposés de la même manière.

La première chose à faire, en arrivant aux sommets A, B, C, etc., sera d'orienter le plan. On pourrait aussi satisfaire à cette con-

dition, quand bien même les points donnés seraient inaccessibles. Dans ce cas, on prendrait un point J, *fig.* 25, à peu près dans la direction AB; on ferait placer un jalon J′ sur l'alignement JB; on irait en J et l'on verrait si J, J′, A, sont en ligne droite : sinon on changerait J, puis par suite J′, de position, et ainsi de suite jusqu'à ce que les quatre points fussent en ligne droite, après quoi l'on pourrait stationner en J ou en J′ et orienter son papier. On parvient au même résultat à l'aide de l'alidade. Plus tard, après avoir décrit cet instrument et la planchette, nous verrons comment on s'y prend.

92. On est généralement dans l'usage d'orienter par rapport à la méridienne, et par conséquent de tracer cette ligne sur les levées topographiques. Nous allons indiquer plusieurs manières d'atteindre ce but.

On peut tracer la méridienne au moyen des hauteurs correspondantes du soleil, et le problème se réduit à avoir l'angle que fait un côté du canevas avec la méridienne.

Soient AB un côté sur le terrain, et *ab*, *fig.* 26, sa projection provisoire : on orientera la feuille de papier suivant ces lignes; on élèvera sur le plan disposé horizontalement un style vertical terminé par une plaque de fer noircie, percée d'un petit trou à son centre *m* et disposée de manière à recevoir à peu près perpendiculairement le rayon du midi : on projettera le centre *m* en *m′* au moyen d'un fil à plomb; du point *m′* comme centre, on décrira plusieurs circonférences *no′n′*, *po″p′*, etc.; on observera la marche du soleil un peu avant et un peu après midi; on divisera en deux parties égales chacune des portions de circonférences interceptées par la courbe produite par le spectre solaire; les points milieux *o*,*o′*,*o″*, etc., et *m′*, appartiendront à la méridienne. Si l'opération a été faite avec soin, ils seront exactement en ligne droite; sinon, il faudra prendre pour trace du méridien la droite qui passera le mieux possible par ces points.

Ceci est fondé sur ce que le soleil décrit sensiblement un parallèle à l'équateur, surtout pendant le temps que dure l'observation. Soit en effet *m′*, *fig.* 27, le point de station, S, S′, S″, S‴, les positions correspondantes du soleil avant et après midi. Les rayons S*p*, S″*p′*, S′*n*, S‴*n′*, feront des angles respectivement égaux avec le méridien : par conséquent les arcs *no′*, *n′o′*, seront égaux ainsi que *po″*, *p′o″*. Ce genre d'opposition est plus exact

vers les solstices qu'à toute autre époque de l'année, parce qu'alors la variation en déclinaison est la plus petite.

93. S'il était nécessaire, pour avoir plus de précision, de tenir compte de la variation diurne du soleil, on opérerait ainsi qu'il suit : soit R, *fig.* 28, le point de station, on s'oriente sur RP, dont la trace *rp* sur le papier doit servir de ligne de repère.

On observe, avec la lunette d'une alidade garnie d'un verre noirci, le lever L et le coucher C du soleil le même jour, et l'on marque les projections de ces directions sur le papier.

Par la raison indiquée au paragraphe précédent, et abstraction faite de la déclinaison, le méridien devrait partager l'angle LRC en deux parties égales. Soit donc R*m* la ligne qui satisfait à cette condition. Pour la durée d'un jour, la déclinaison ayant varié, l'angle que fait la vraie méridienne avec RC est plus petit que celui qu'elle fait avec RL. (Nous supposons que le soleil se dirige du solstice d'été à celui d'hiver, et, d'après la figure, que l'opération est postérieure à l'équinoxe d'automne.)

La ligne R*m* est donc un peu trop orientale ; mais, si l'on combine le coucher C avec le lever L' du lendemain plus tardif que celui de la veille, la ligne R*m'* qui partagera en deux parties égales l'angle CRL' sera, par une raison contraire, trop occidentale. Donc, en prenant un direction moyenne RM, elle sera très-sensiblement la méridienne.

Cette seconde méthode n'est pas encore rigoureusement exacte, parce que la variation en déclinaison n'est pas constante ; mais l'erreur qui en résulte est bien au-dessous des erreurs habituelles de la topographie. Son plus grand défaut vient de la difficulté de son emploi : elle est en effet fondée sur l'observation du lever et du coucher ou autrement dit de l'astre au moment où il est à l'horizon, moment qui ne peut être reconnu que lorsque l'on observe dans une île éloignée des côtes. Si l'on voulait rendre cette méthode théorique réellement applicable, il faudrait la combiner avec la précédente en déterminant par celle-ci la branche *p' n'*, *fig.* 26, des ombres du style, relatives à la matinée suivante, et continuant à opérer comme sur la *fig.* 28.

La première méthode exposée, fondée sur l'hypothèse de la constance de la déclinaison solaire, pendant la durée de l'opération, nous semble du reste bien suffisante pour les usages de la topographie qui, en définitive, n'a pas besoin, pour opérer, de connaître la direction du méridien.

Quand, par l'une ou l'autre méthode, on a obtenu la projection de la méridienne sur le papier, il faut mesurer l'angle qu'elle fait avec l'un des côtés du cadre; faire sur *rp*, *fig.* 29, un angle égal, et quand ensuite on aura tourné le plan de manière que cette nouvelle direction soit dans le plan vertical de RP, alors le côté du cadre dont il vient d'être mention sera dirigé suivant le méridien du lieu.

CHAPITRE III.

DIFFÉRENTS MODES DE LEVER.

94. Un triangle, dans lequel on connaît d'avance un côté, peut être construit de trois manières :

1° En observant les angles adjacents au côté connu, ou mieux les trois, pour qu'il y ait vérification ;

2° En observant un angle et mesurant un côté ;

3° Enfin en mesurant les deux autres côtés.

Ces trois manières de procéder donnent naissance à trois méthodes distinctes :

1° Levées au goniomètre ou au goniographe seulement ;

2° Levées dans lesquelles à l'emploi de cet instrument on ajoute celui de la chaîne ;

3° Levées pour lesquelles on se sert de la chaîne seule.

Nous allons passer en revue ces trois méthodes, et donner en même temps la description et indiquer l'usage des instruments dont on se sert.

95. *Planchette et alidade.* Nous ne séparerons pas ces deux instruments, qui ne peuvent servir que simultanément, et nous n'entrerons pas dans de longs détails descriptifs de construction, persuadé qu'ils fatiguent le lecteur et lui apprennent beaucoup moins que la simple vue de l'instrument.

Relativement à la *planchette*, nous nous bornerons à dire qu'elle se compose de trois parties distinctes : la table sur laquelle on colle le papier; le genou, dont le mécanisme permet de mettre la table dans un plan horizontal, puis de la faire mouvoir dans ce plan ; enfin le trépied, qui est la réunion de trois pieds fixés par des charnières à une tige solide qui supporte le genou.

Cet instrument n'est soumis à aucune vérification : il sera d'autant plus parfait qu'il réunira la légèreté à la solidité. Il ne faut pourtant pas balancer à sacrifier la première condition à la seconde, car les désorientations produites par le peu de stabilité de la planchette jettent dans de grands embarras et occasionnent parfois une perte de temps considérable.

L'alidade est un instrument au moyen duquel on trouve, sur un plan, la trace d'un autre plan perpendiculaire au premier. Elle se compose d'une règle de cuivre AB (*fig.* 30) de trois ou quatre décimètres de longueur, d'une lunette CD pouvant pivoter autour d'un axe E parallèle au plan de la règle, perpendiculaire à sa longueur et qui lui est attachée par une tige EF.

La lunette est composée d'un objectif D, d'un oculaire C avec son tirage, et d'un réticule *rr'* garni aussi de son tirage ; de telle sorte qu'on peut amener d'abord le réticule un peu en deçà du foyer de l'oculaire, puis tirer ou rentrer ensemble l'oculaire et le réticule jusqu'à ce que celui-ci soit précisément au foyer de l'objectif (Livre IV, § 280).

Pour opérer exactement avec l'alidade, il faut que la ligne tracée au crayon le long de la règle sur le papier tendu sur la planchette soit la trace du plan vertical passant par le rayon visuel déterminé par l'axe optique. Il est donc nécessaire, avant d'en faire usage, de s'assurer : 1° que l'axe optique de la lunette est perpendiculaire à l'axe de rotation, pour pouvoir décrire, dans le mouvement qu'on lui imprime, un plan et non une surface conique ; 2° que ce plan (dit de collimation) passe par celui des deux côtés de la règle que l'on nomme ligne de foi. Ces différentes conditions exigent que l'axe de rotation soit parallèle au plan de la règle et perpendiculaire à la ligne de foi.

Pour s'assurer qu'il en est ainsi, on vise un point éloigné V, *fig.* 31. On trace au crayon, sur le papier, la ligne déterminée par la règle AB ; on fait tourner la lunette de 200° autour de son axe optique CD, après toutefois avoir démonté la vis qui la retenait ; puis, dans cette nouvelle position, les extrémités E, E' de la douille traversée par l'axe de rotation ont pris la position l'une de l'autre : l'angle DOE vient en E'OD', et alors, si l'on ne trouve plus V à la croisée des fils, l'angle DOD' est le double de la correction qui se fait au moyen du réticule. Deux petites vis, placées à droite et à gauche, permettent, en serrant l'une et en desserrant l'autre, de lui donner un mouvement de translation du côté qui convient pour détruire l'erreur. On s'assure en même

temps de la verticalité de l'un des fils, en examinant si, la lunette levée ou abaissée, l'objet V est toujours masqué par le fil, ou bien en le dirigeant sur l'arête d'un bâtiment. C'est encore au moyen du réticule, et en le tournant autour de l'axe optique, que l'on effectue cette seconde correction.

Si la construction de l'instrument le permet, ce qu'il y a de plus simple à faire est de retourner, après la première ligne tracée, l'alidade bout pour bout, puis de ramener vers soi l'oculaire qui, dans ce mouvement, aurait été transporté à la place qu'occupait l'objectif : le reste de l'opération comme ci-dessus.

Pour mettre l'axe optique perpendiculaire à l'axe de rotation, il faudrait, lorsqu'après le retournement on ne trouve plus le point visé à la croisée des fils, faire marcher ce réticule de la moitié de la distance qui le sépare de l'image de l'objet. Cela exige un tâtonnement que l'on abrége beaucoup en opérant de la manière suivante. On vise le même objet dans les deux positions de retournement de la lunette, et on marque au crayon les deux positions de la ligne de foi ; on divise en parties égales l'angle formé par ces deux lignes et on place la ligne de foi sur la bissectrice. Il ne reste plus alors qu'à faire marcher le réticule jusqu'à ce qu'il rencontre l'image du point visé.

La condition d'existence du plan décrit par l'axe optique et la verticalité de ce plan peuvent encore se vérifier simultanément et d'une manière suffisamment exacte par l'inspection d'une arête verticale d'un bâtiment sur laquelle on suit la marche du réticule répondant au mouvement de rotation de la lunette. La verticalité du plan décrit est, en effet, une conséquence de l'horizontalité de la planchette. Cette horizontalité n'étant établie qu'approximativement, il n'y a donc pas lieu d'établir avec une rigueur mathématique l'exactitude de la verticalité du plan, verticalité qui, du reste, a une faible influence sur les angles horizontaux, autant du moins qu'on ne s'en écarte pas d'une manière notable, comme cela sera étudié plus tard lorsqu'il s'agira des instruments plus exacts de la géodésie.

Quant à ce que la ligne de foi soit située dans le plan vertical décrit par l'axe optique de la lunette, il faut, pour s'en assurer, avoir d'avance la projection sur la planchette d'une ligne du terrain, ce qui revient à connaître son azimuth ou l'angle qu'elle fait avec le méridien. Orienter par tout autre moyen que l'emploi de l'alidade : par exemple, avec le déclinatoire dont nous parlerons bientôt, ou en traçant une méridienne ; placer la ligne

de foi sur la projection donnée et voir si la croisée des fils couvre le point situé à l'extrémité de la ligne, ou plutôt viser ce point et s'assurer que la ligne de foi coïncide avec la projection, ou reconnaître de combien elle en diffère.

On conçoit, au surplus, que cette condition ne soit pas indispensable : et en effet, lorsqu'à chaque station on aura décliné la planchette en dirigeant la lunette sur un point du terrain, la ligne qui, sur le papier, est la projection de cette direction, formera toujours le même angle avec la trace du plan vertical passant par l'axe optique. Par conséquent, toutes les lignes tracées sur le papier seront respectivement inclinées entre elles, comme leurs homologues du terrain, *fig.* 32.

L'alidade que nous venons de décrire est la plus parfaite : on en construit de plus simples, composées d'une règle aux extrémités de laquelle s'élèvent, à angle droit, deux pinnules de la forme N, N', *fig.* 34.

Ce sont des plaques en cuivre évidées. Dans l'une, une fente très-étroite surmonte un vide rectangulaire divisé par un crin fixé sur le prolongement de la fente supérieure. L'autre pinnule présente les mêmes ouvertures placées différemment, c'est-à dire que la fente étroite est au-dessous du châssis partagé par le crin.

Quelle que soit la pinnule auprès de laquelle on place l'œil, il faut qu'il regarde par la fente étroite ; c'est en quelque sorte l'oculaire, et le crin placé dans l'autre pinule détermine le plan vertical qui passe par l'œil et par l'objet visé, et dont la trace doit se confondre avec l'un des côtés de la règle de l'alidade. Ce côté AB se désigne sous le nom de *ligne de foi.*

On fait aussi des alidades en bois, dans lesquelles la lunette est remplacée par un parallélipipède percé d'un trou longitudinal. Une visière tient lieu d'oculaire et, à la place de l'objectif, se trouvent des fils croisés.

96. D'après ce que nous venons de dire sur la construction et le mouvement de la planchette et de l'alidade, rien n'est plus facile que de relever un angle au moyen de ces deux instruments.

On se met en station : on dispose la tablette horizontalement, parce que sans cela les traces que l'on obtiendrait sur son plan incliné ne mesureraient pas l'angle dièdre formé par les plans verticaux qui passent par le point de station et les deux objets visés.

On place la ligne de foi sur la projection *a* de la station A ; on

la fait pivoter à l'entour, jusqu'à ce qu'elle couvre *ab*, puis on tourne la tablette jusqu'à ce qu'on aperçoive B à l'intersection des fils. Fixant alors le mouvement horizontal, la planchette sera orientée. On fera de nouveau pivoter la ligne de foi autour de *a*, jusqu'à ce que l'on aperçoive le second point de mire C, et l'on tracera *ac*. On aura déterminé ainsi graphiquement l'angle formé par les deux directions AB et AC.

Il est très-essentiel de tracer ces lignes dans toute la longueur de la règle, ou du moins d'indiquer leurs amorces sur les marges en dehors du cadre, car ces lignes peuvent servir plus tard à orienter le plan, et cette opération ne serait faite qu'avec une approximation grossière, si elle n'était fondée que sur la coïncidence de la règle de l'alidade et d'une ligne trop courte.

Il n'est pas nécessaire que la projection *a* soit exactement sur la verticale de A; s'en écartât-elle d'un décimètre, il faudrait que l'on opérât à une bien grande échelle, pour que cette erreur fût appréciable sur le plan.

97. *Levées à la planchette.* Occupons-nous actuellement de la résolution des triangles en n'employant que la planchette et l'alidade, et disons d'abord, une fois pour toutes, que nous désignons par de petites lettres les projections des points du terrain auxquels nous affectons les grandes lettres correspondantes.

On donne les deux points de repère R, *r*; P, *p*; on demande d'en déterminer un troisième. Il se présente ici quatre cas distincts.

1° On peut stationner en R et P. Ces deux points sont visibles l'un de l'autre, et de chacun d'eux on voit X, point cherché. Dans cette hypothèse, on va stationner en R où l'on s'oriente sur P, puis on trace la projection de RX : on se transporte en P où l'on opère de la même manière. L'intersection des deux droites *rx*, *px*, ainsi obtenue, est évidemment la projection cherchée de X. Cette manière de procéder se désigne sous le nom de *méthode d'intersection.*

2° On peut aborder en R et X, mais pas en P, et les points sont toujours supposés visibles l'un de l'autre On stationne en R, *fig.* 35. On s'oriente sur P et rayonne sur X : on se transporte en X dont on fait coïncider la verticale avec un point *x'* de la direction tracée de R sur X et l'on se décline sur R : on trace *x'*P et par *p* on mène *px* parallèle à *x'*P : le point *x* de rencontre de cette droite avec *rx'* est le point cherché. En effet, si l'on place *x*

dans la verticale de X et si l'on s'oriente toujours sur RX, la ligne *xp* est dans le plan vertical de XP.

Cette méthode est celle de *recoupement*. A moins que l'échelle à laquelle on lève ne soit extrêmement grande, on peut abréger l'opération : car, si la verticale de X avait percé tout d'abord en *x*, on n'aurait eu qu'à mener P*p*, et la rencontre avec la trace de RX eût donné le point : mais la verticale de X ne peut s'éloigner de celle de *x* que d'une quantité toujours beaucoup plus petite que la demi-diagonale de la planchette, distance peu appréciable aux échelles que l'on emploie généralement. Ainsi donc, on se borne, arrivé en X, à s'orienter sur R et à faire pivoter l'alidade autour de *p* jusqu'à ce que l'on aperçoive P. L'intersection de la droite que l'on trace alors avec la première donne *x*. Cette observation pourra s'appliquer dorénavant à tous les cas semblables.

3° R et P sont supposés inaccessibles, mais on peut stationner en un point A de leur direction ; X dont on veut trouver la projection est accessible, et de ce point sont visibles R, P et A, *fig.* 36.

On stationne en A en s'y orientant sur RP et cherchant le point *a'* où la verticale de A rencontre *rp*. De A*a'* on rayonne sur X, puis, s'y transportant, on s'oriente sur AX, après avoir fait en sorte que la verticale de X perce le plan en un point de *a'*X. On trace les deux rayons passant par R*r* et P*p*. Le point d'intersection sera la projection *x* cherchée. Si l'on veut avoir aussi celle de A, on mène par *x* une parallèle *ax* à *a'*X.

4° On donne les deux repères R*r*, P*p*, inaccessibles, mais visibles de X, *fig.* 37, où l'on peut stationner. On cherche un quatrième point où l'on puisse se placer et duquel on voie les trois autres ; alors on construit sur la feuille un quadrilatère semblable à celui du terrain, et l'on en construit un égal sur *rp*. Pour cela, on se place en X dont on prend une projection provisoire et arbitraire, et l'on oriente la planchette à peu près, car on n'a pas encore de moyen de le faire exactement, ce qui n'est au surplus pas nécessaire. On vise R, P et le quatrième point Y, dont on trace les directions sur le papier. Il est à remarquer que les deux premières ne passent pas par *r* et *p* ; on se transporte en Y, on se décline suivant *x'y'* et l'on vise encore R et P de *y'* pris à une distance quelconque de *x'*, puisque l'on n'emploie pas la chaîne. Les points d'intersection déterminent deux sommets *r'* et *p'* d'un quadrilatère dont les deux autres angles sont *x'* et *y'*, semblable à celui que forment sur le terrain R,P,X,Y et semblable par conséquent aussi à la projection cherchée. Pour construire en véri-

table grandeur et position, on fait en r les angles prx, pry, égaux à $p'r'x'$, $p'r'y'$, et l'on agit de la même manière à l'égard de p.

98. On peut tirer parti d'un point C (*fig.* 37 *bis*) dont la projection serait située hors de la marge : pour cela, avant d'aller sur le terrain, et au moyen de la feuille contiguë qui contient la projection de C, on trace de c vers le cadre et sous un angle quelconque une droite que l'on prolonge d'une quantité $Ec = Ec'$. Si ensuite, tandis que l'on s'occupe de la levée, on veut déterminer la position du point S où l'on se trouve, et que l'on sait déjà devoir être sur une direction AB, on se décline au moyen de cette ligne ; on place la ligne de foi de l'alidade sur c', autour duquel on la fait pivoter jusqu'à ce que l'on aperçoive C dans la lunette, on trace cette droite jusqu'au cadre en D ; on prend $EF = DE$; par F on mène une parallèle à $c'D$, et sa rencontre avec AB détermine la projection cherchée s : en effet, le triangle EFc que l'on peut imaginer, sinon construire, est égal à EDc' : ainsi la parallèle que l'on a menée passe bien par la projection c ; de plus, elle passe comme $c'D$ par le point C du terrain, car $c'G$ est sensiblement nul, comparativement à la distance à laquelle on se trouve de C : donc la droite sF sur le papier est la projection de son homologue SC sur le terrain, donc s est le point cherché.

Si l'on avait plusieurs points semblables, pas de ligne AB, mais un déclinatoire, s serait encore déterminé par l'intersection des différentes lignes construites. On opérerait également à l'aide de la boussole. Si enfin cE était trop grand pour pouvoir être reporté et contenu dans l'intérieur du cadre, on pourrait, au lieu de Ec', ne prendre que Ec'' qui en serait la moitié, le tiers, le quart, etc., mais alors EF devrait être 2, 3, 4, etc., fois plus grand que Ed.

99. On peut se proposer de déterminer au moyen de la planchette la projection s d'un point S, *fig.* 38, connaissant celles de G, M, D, qui sont inaccessibles ou auxquels on ne veut pas se transporter. On mesure en S les angles GSM, MSD, et l'on fait en g et d deux angles agm, bdm, qui leur sont respectivement égaux. Par les milieux c, e, des droites gm, md, on élève des perpendiculaires ; en g et d on élève aussi des perpendiculaires à ga, bd. Les points de rencontre O et O' sont les centres de deux circonférences qui devront se couper en s : car, si l'on mène sg, sm, sd, les angles gsm, msd, seront égaux à agm, mbd, comme ayant pour mesure chacun la moitié des angles gm, md. (LEGENDRE, *livre* II, *propositions* 18 *et* 19.)

100. Les constructions graphiques à effectuer sur le terrain doivent toujours être simplifiées autant que possible. C'est dans ce but que nous indiquerons le moyen de tracer immédiatement à leurs places les angles *agm*, *bdm*. Pour obtenir le premier, on place *g* sur la verticale de S, on décline *gm* sur SM et on vise G en faisant pivoter la ligne de foi autour du point *s*. La construction de l'angle *bdm* s'obtient de la même manière, en déclinant *dm* sur SM et visant D.

Il restera encore à effectuer la construction géométrique qui, dans la pratique, fera presque toujours préférer un des deux procédés indiqués aux paragraphes 103 et 104.

101. Il pourrait arriver que les quatre points fussent situés sur la même circonférence, et alors le problème ne serait pas résolu, ou que les circonférences se coupassent sous un angle très-aigu. Dans ce dernier cas, il y aurait incertitude dans le choix précis de leur point d'intersection, si l'on ne faisait attention que, dans un cercle, un rayon abaissé sur le milieu d'une corde lui est perpendiculaire. Il résulte de cette observation que la ligne qui passe par les deux centres O et O' est perpendiculaire à la corde *sm* et que $sK = Km$. Si donc, après avoir réuni les centres trouvés, on mène par *m* la ligne S*m* perpendiculairement à OO' et si l'on prend $sK = Km$, le point *s* sera bien la projection cherchée. On peut aussi calculer les longueurs des rayons, au lieu d'employer la construction graphique, puisque l'angle *goc* est égal à α : or, dans le triangle rectangle *goc*, on a

$$go = \frac{gc}{\sin . goc} \quad \text{ce qui revient à} \quad R = \frac{gm}{2 . \sin . \alpha}$$

102. On peut résoudre le même problème à l'aide d'une seule circonférence : mais cette solution, pour offrir plus d'exactitude, exige que M soit en deçà de la ligne GD par rapport à S, *fig.* 39. Placé en S sur le terrain, on tourne la planchette de telle manière que, *g* étant dans la verticale de S, le côté *gd* du plan soit dans le plan vertical de SD du terrain. Faisant ensuite pivoter l'alidade autour de *g*, on la dirige vers M et l'on trace la ligne *gm'*: l'angle *m'gd* est alors égal à MSD. On tourne de nouveau la planchette jusqu'à ce que la même droite *dg* prenne la direction SG; *d* étant sur la verticale de S, on vise le point M comme précédemment, et l'on trace *dm'*, de sorte que $gdm' = GSM$. Par les trois points *g*, *m'*, *d*, on fait passer une circonférence ; par *m* et *m'*,

on mène une droite dont la rencontre avec la circonférence détermine la projection s de S où l'on est placé sur le terrain. En effet, les angles dgm', gdm, sont bien égaux aux angles que forment entre eux les trois rayons visuels, et puisque dsm, gsm, leur sont égaux comme inscrits dans les mêmes segments de cercle, il s'ensuit que s satisfait aux conditions du problème : de plus, il y satisfait seul, car pour tout autre point, s', par exemple, l'angle total $gs'd$ est bien toujours le même et égal à GSD, mais chacune de ses parties diffère de l'angle partiel correspondant du terrain GSM ou DSM : l'un augmente quand l'autre diminue.

On peut ajouter qu'en vertu de la solution précédente la projection du point cherché est l'une des intersections de deux circonférences construites sur GM', DM', et que M' est l'autre : donc évidemment, puisqu'un seul point doit résoudre le problème, s est ce point.

Nous avons dit que cette méthode convenait dans le cas particulier où M est en deçà de DG par rapport à S : s'il en était autrement, les deux points m et m', situés tous deux du même côté et conséquemment trop voisins l'un de l'autre, détermineraient d'une manière peu certaine la position de la droite $m'ms$.

Il existe une solution de ce problème basée sur la trigonométrie. Elle trouvera sa place lorsque nous nous occuperons de la géodésie, § 410.

103. Le même problème peut se résoudre par un tâtonnement quelquefois assez prompt. Soient a, b, c, les projections sur le plan des trois points du terrain A, B, C, *fig.* 40. On veut déterminer S où l'on se trouve ; on oriente à peu près la planchette ; par A,B,C et leurs projections, on fait passer trois droites qui viennent se couper suivant un triangle $\alpha\beta\gamma$. Si le plan était bien orienté, les trois lignes se couperaient en un même point s, projection de S. Il faut donc faire un peu pivoter la planchette dans le sens convenable, pour que les trois rayons forment, par leurs nouvelles intersections, un triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ plus petit que le premier. On continue à procéder de la sorte jusqu'à ce qu'on trouve une suite de triangles $\alpha.\beta.\gamma$, α_2, β_2, γ_2, renversés par rapport aux premiers. Si les sommets homologues $\alpha\alpha'\alpha''\ldots\alpha_1, \alpha_2$, $\beta\beta'\beta''\ldots\beta_1\beta_2$, $\gamma\gamma'\gamma''\ldots\gamma_1, \gamma_2$, sont suffisamment rapprochés, il sera facile de tracer d'une manière continue les trois courbes formées par ces sommets. Elles devront se rencontrer en un même point qui sera la projection cherchée, projection qui devra être vérifiée avant

d'être admise définitivement. Il est à remarquer que, dans les différentes positions, les angles α, α', α'', α''', formés par les directions prises sur A et C, sont les mêmes : ils ont donc une mesure commune qui est la moitié de l'arc passant par A et C et appartenant à une circonférence sur laquelle ils sont tous situés. Le même raisonnement s'applique à β, β', β'', β''', d'une part, et à γ, γ', γ'', γ''', de l'autre. Donc le point *s*, qui est à la fois α'', β''', γ''', appartient aux trois circonférences, c'est-à-dire est leur point d'intersection. Si l'on construisait ces circonférences, on rentrerait dans la première méthode que nous avons indiquée. C'est pour éviter cette construction que l'on opère par tâtonnement.

104. Il est enfin une dernière méthode, qui consiste à se servir d'un papier à calque. On l'applique sur la planchette ; on y marque le point *s* où le percerait la verticale du lieu. Par ce point, on trace *s*A, *s*B, *s*C ; on fait ensuite tourner le papier transparent jusqu'à ce que les trois directions qui y sont tracées passent respectivement par *a*, *b*, *c*, puis alors on pique le point *s* sur la feuille. Ce procédé, quand il est employé avec soin, est tout aussi rigoureux et beaucoup plus expéditif que les précédents. Il est nécessaire cependant que les trois rayons ne forment pas entre eux des angles trop aigus.

105. *Graphomètre.* Nous allons commencer la description des goniomètres par celle du graphomètre. Cet instrument se compose d'un demi-cercle (*fig.* 41) gradué en 180 ou 200^g, portant des pinnules aux extrémités de son diamètre et d'une alidade mobile autour de son centre et garnie aussi de deux pinnules. L'instrument roule sur un genou attaché à un pied. On place le limbe dans le plan des objets ; on ajuste les deux pinnules du diamètre sur l'objet de droite en supposant que les divisions soient marquées de gauche à droite : on vise l'objet de gauche avec l'alidade mobile, et l'angle compris est l'angle cherché.

Pour vérifier cet instrument, il faut voir si le zéro de l'alidade mobile coïncide parfaitement avec le zéro origine des graduations, lorsque les fils des quatre pinnules sont dans le même plan vertical. Si cette condition n'a pas lieu, il faut ajouter à chaque angle ou en retrancher l'erreur de collimation. On pourrait encore commencer par faire coïncider les deux zéros et voir si les fils sont bien dans le même plan vertical, mais la première mar-

che est préférable, puisque, s'il y a erreur, on en lit immédiatement l'expression.

Si l'alidade mobile pivotait autour d'un point qui ne fût pas le centre du limbe, cette imperfection serait la cause d'une erreur véritable de lecture. Elle serait nulle dans la circonstance particulière où l'axe de l'alidade mobile passerait par le centre, et la plus grande possible quand cet axe serait dans une direction perpendiculaire à la ligne passant par le centre et par le pivot; la distance de ces deux points serait sensiblement égale au maximum d'erreur. Cette vérification se fait de la manière suivante. Après avoir visé directement l'objet de droite par l'alidade fixe (*fig.* 41 *bis*), on amène l'alidade mobile sur le point de gauche, et l'on fait une lecture $o\alpha$. On retourne l'instrument en pointant l'alidade fixe sur le point de gauche. L'alidade mobile marque toujours la lecture $o'\alpha' = o\alpha$; on l'amène alors en $\alpha'\alpha''$ sur le point de droite et on obtient une nouvelle lecture $o'\alpha''$ qui devra être supplémentaire de la première $o'\alpha'$, si le centre de rotation α' est en même temps le centre du cercle.

106. On désigne sous le nom de *vernier* un appareil qui sert à estimer les fractions des plus petites divisions d'un limbe ou d'une règle gradués. Il est donc curviligne ou rectiligne : mais, l'explication étant la même pour l'un et l'autre, c'est du premier que nous allons parler, puisque tel est celui qui s'adapte au graphomètre. D'abord, nous dirons qu'un vernier, pour être d'un usage commode, doit être susceptible de deux mouvements, l'un prompt est imprimé par l'impulsion de la main à laquelle le frottement fait seul résistance; l'autre, qui s'opère aussi insensiblement qu'on le veut, au moyen d'une vis de rappel dont le vernier porte l'écrou. Cette vis fait corps avec le limbe du moment qu'on a serré la vis de pression qui y fait adhérer la pince dans laquelle elle roule.

Le vernier, sur une courbe concentrique au limbe, est divisé en un nombre de parties plus grand d'une unité que celui des divisions renfermées dans le même espace sur le limbe. De là il résulte, en désignant par D et d les graduations du limbe et du vernier, puis le nombre des dernières par n, que $nd = (n-1)$ D :

d'où $$d = \frac{n-1}{n} D = D - \frac{D}{n} \quad \text{et} \quad D - d = \frac{D}{n}$$

c'est-à-dire que la différence entre D et d est d'autant moindre

que n est plus grand. Pour le graphomètre où $D = 50'$ et $n = 10$, on a $D - d = 5'$. Si l'on avait pris $n = 25'$, on aurait $24 D = 25 d$ et $D - d = 2'$: si enfin le cercle gradué était d'un assez grand rayon pour comporter des divisions de $\frac{1}{4}^{g}$ ou $25'$, on trouverait $D - d = 1'$. D'après cela, et en raisonnant sur l'hypothèse de $n = 10$, on voit qu'une division du vernier a une amplitude égale aux $\frac{9}{10}$ d'une division du limbe. Cela posé, supposons que les deux zéros coïncident, les deux divisions suivantes différeront de $\frac{1}{10}$: celles qui viennent après, de $\frac{2}{10}$, etc. Réciproquement, si ce sont les deux premières qui coïncident, le zéro du vernier aura dépassé l'autre de $\frac{1}{10}$: si c'est la septième du vernier qui coïncide, le zéro du vernier sera en avance sur celui du limbe de $\frac{7}{10}$ de $50'$, c'est-à-dire de $35'$.

Puisque nous avons eu occasion de parler du vernier, disons qu'il est aussi d'un grand secours dans le compas à verge. Cet instrument est formé d'une règle d'acier graduée à laquelle sont adaptées deux pointes maintenues par des coulisseaux. Généralement cependant, c'est à l'une des extrémités de la verge qu'est fixée l'une des pointes, tandis que l'autre est maintenue à volonté par une vis de pression. C'est à cette pointe mobile que s'adapte le vernier garni d'une vis de rappel.

Pour terminer ce que nous avons à dire du graphomètre, ajoutons que si les objets que l'on vise et le point de station sont à peu de chose près dans le même plan horizontal, la hauteur des ouvertures pratiquées dans les pinnules permet de les voir, quoique le limbe soit placé horizontalement. Si la différence de niveau est un peu considérable, il faut établir le limbe dans le plan des objets, ce qui a l'inconvénient de ne pas donner exactement l'angle réduit à l'horizon. Il y aurait, dans ce cas, une correction à faire, mais on s'en dispense parce qu'elle ne saurait être appréciée, lorsque plus tard on trace l'angle sur le papier au moyen du rapporteur. Quelquefois d'ailleurs on obvie à cet inconvénient en substituant aux pinnules des lunettes plongeantes qui évitent encore la perte de temps causée par le tâtonnement au moyen duquel on arrive au plan des objets. Construit ainsi, le graphomètre doit porter un niveau qui assure l'horizontalité du plan du limbe.

Si, connaissant la projection d'une base, il s'agit, au moyen du graphomètre, de déterminer des points remarquables sans s'y transporter, on s'établit à l'une des extrémités de la base sur laquelle on dirige l'alidade fixe; on vise les points avec l'alidade mobile et l'on rapporte les angles sur le papier. On opère de

même à l'autre extrémité, et les intersections donnent les projections cherchées. S'il faut lever en cheminant, on vise la station que l'on vient de quitter, avec l'alidade fixe, celle où l'on va se transporter ensuite avec l'alidade mobile, et l'on rapporte l'angle.

107. *Déclinatoire et boussole.* Ces deux instruments étant fondés sur la propriété dont jouit une aiguille aimantée suspendue librement, de prendre une direction constante, nous allons dire quelques mots sur la manière d'aimanter une aiguille. Pour cela, il faut avoir deux barreaux fortement aimantés eux-mêmes. On dispose exactement l'aiguille dans la direction nord-sud et l'on pose les barreaux sur des points voisins de son centre, savoir : le pôle sud de l'un du côté du pôle nord de l'aiguille, et le pôle nord du second vers le pôle sud de l'aiguille. On les incline de manière qu'ils fassent avec cette dernière des angles aigus symétriques ; puis, on les conduit en appuyant assez fortement, chacun jusqu'à la pointe qui lui correspond. On les enlève, on les remet dans la première position, et l'on recommence. Il n'y a aucun inconvénient à ce que l'aiguille soit fortement aimantée. Pour juger du degré d'aimentation et s'assurer qu'elle n'en acquiert plus, on lui fait enlever différents poids. Il ne faut pas oublier, après chaque essai, de toucher de nouveau l'aiguille qui, dans cette opération, perd toujours une partie de sa vertu magnétique.

108. On sait que l'aiguille aimantée, lorsque rien ne l'empêche d'obéir à l'action magnétique, se dirige vers le nord, non pas exactement, mais en faisant avec le méridien un angle qui varie en raison du temps et des lieux, suivant une loi inconnue jusqu'à présent. Cet angle se nomme la *déclinaison*. Ses variations un peu considérables ne s'opèrent pas d'une manière brusque, en sorte que, lorsqu'on a réglé l'axe de l'aiguille, c'est-à-dire trouvé la direction du *méridien magnétique*, on peut le considérer comme constant pendant une campagne entière. L'aiguille, outre le mouvement graduel qui la porte vers l'ouest, éprouve chaque jour des oscillations à peu près régulières.

Ces oscillations n'ont pas une importance excessive en topographie, cependant elles sont suffisantes pour produire des erreurs appréciables. On sait, en effet, que, suivant les saisons et les lieux, les variations diurnes peuvent atteindre une limite de 20′ sexagésimales.

Dans les environs de Paris, elles sont d'environ $15' = 0^{g},27'$ à

28′ centésimales du mois d'avril au mois de juillet, et de 15′ à 16′ dans la saison opposée. Le minimum de la déclinaison a lieu vers huit heures du matin et huit heures du soir, le maximum vers trois heures du soir, tandis que la nuit elle est constante. C'est donc précisément aux époques des opérations que les variations existent, et elles peuvent donner au même angle deux valeurs différant entre elles d'un quart de grade. Cette valeur est aussi la limite d'exactitude de la lecture faite sur une boussole, mais il faut bien observer que les deux erreurs de lecture et de variation de déclinaison pouvant s'ajouter dans certains cas, l'exactitude de l'angle ne sera obtenue qu'à un demi-grade près. Il ne faut donc pas demander à cet instrument, très-avantageux du reste sous d'autres rapports, une trop grande précision et vouloir, comme on a proposé de le faire, le rendre propre à remplacer les instruments de géodésie, en apportant à sa construction des modifications destinées à mieux préciser les lectures.

L'inclinaison de l'aiguille, d'environ 73ᵍ à Paris, actuellement, exige que cette aiguille soit suspendue par un point autre que son centre de gravité, pour rester horizontale, comme cela est nécessaire pour l'usage de la boussole.

109. Le déclinatoire n'est autre chose qu'une aiguille aimantée, renfermée dans une boîte rectangulaire, dans le fond de laquelle se trouve un limbe tourné de manière que la ligne nord-sud soit exactement parallèle au plus grand côté de la boîte.

Le moyen le plus simple et le plus généralement en usage pour trouver la déclinaison de l'aiguille aimantée suppose que l'on connaisse l'azimuth d'un côté de triangle, c'est-à-dire l'angle qu'il fait avec le méridien. On trace la projection de ce côté sur le papier, on oriente la planchette suivant cette ligne, puis ayant fait coïncider l'une des deux grandes faces du déclinatoire avec la trace d'un méridien, le chiffre auquel correspond l'extrémité de l'aiguille est l'expression de la déclinaison. Elle est actuellement de 22ᵍ,5 vers l'ouest. Une autre méthode plus longue et moins exacte consiste, lorsqu'on n'a pas la projection d'un côté, à déterminer une méridienne par l'une des méthodes connues.

Ces deux procédés ne présentent pas une grande exactitude, en raison du peu de longueur de l'aiguille et surtout en raison de la double hypothèse sur laquelle ils sont fondés, hypothèse qui suppose le côté de la boîte parallèle au diamètre 0.200 et le plan vertical décrit par l'axe optique de l'alidade employée à

l'orientation, parallèle à la ligne de foi, lesquels parallélismes ne peuvent se vérifier directement.

Réciproquement, lorsqu'on connaîtra la déclinaison, on pourra orienter, par rapport à la méridienne, une levée sur laquelle serait tracée la projection d'un côté, et non les méridiens, car en posant le déclinatoire sur la planchette, orientée par rapport à ce côté, et le tournant jusqu'à ce que l'extrémité nord de l'aiguille soit dirigée vers le chiffre de déclinaison, le côté de la boîte donnera la direction du méridien et, par suite, fera connaître l'azimuth du côté projeté d'avance. Ce moyen n'est qu'approximatif, en raison du peu de longueur de l'aiguille d'une part et du côté de la boîte de l'autre.

On voit qu'en ajoutant le déclinatoire à la planchette, on peut abréger les opérations par la facilité qu'il donne pour orienter et pour commencer la levée à un point quelconque dont la projection n'est pas donnée, pourvu que, pour la déterminer d'abord, on aperçoive des points connus. En effet, pour déterminer un point de station, avec la planchette et l'alidade, il faut apercevoir trois points connus et exécuter des opérations assez longues. S'il y avait possibilité de se décliner directement, la connaissance de deux points serait suffisante, et les opérations consisteraient seulement à les viser successivement. Le déclinatoire permettra cette orientation immédiate. Il suffira pour cela d'avoir opéré d'abord en un point connu, de s'y être décliné avec une alidade et d'avoir noté alors le chiffre marqué par l'aiguille du déclinatoire fixé invariablement à la planchette. Toutes les fois que l'aiguille indiquera ce chiffre, l'instrument sera placé parallèlement à sa première position, et la planchette sera orientée, si on ne s'est pas éloigné du premier point d'observation d'une manière notable, c'est-à-dire de plusieurs lieues. Le chiffre ainsi marqué par l'aiguille du déclinatoire pourra être quelconque, mais invariable pendant les opérations ; il dépendra, en effet, de la position arbitraire donnée à la boîte du déclinatoire, lorsque celle-ci aura été fixée sur la planchette.

La construction du canevas topographique doit se faire avec la planchette et l'alidade dont l'emploi fournit des résultats très-exacts. L'addition du déclinatoire ne convient qu'à la levée du détail exécutée le plus habituellement à la boussole. Peut-être le premier mode de procéder est-il préférable au second, en ce qu'on évite par là les erreurs que l'on peut commettre en rapportant les angles, et qu'en même temps il y a économie de temps.

110. La *boussole* est, comme le déclinatoire, composée d'une aiguille aimantée suspendue sur un pivot et renfermée dans une boite. A celle-ci est adapté un genou qui repose sur trois pieds. Au fond de la boite est un limbe divisé ordinairement en grades et demi-grades. Le long de l'un des côtés est appliquée une alidade à visière, ou mieux une lunette assujettie à la boussole par son milieu autour duquel elle a la faculté de pivoter. La ligne nord-sud ou 0ᵍ — 200ᵍ du limbe est parallèle à l'axe optique de la lunette; le point nord marquant 0ᵍ. On comprend de suite que si, mettant d'abord l'extrémité N de l'aiguille en face de 0ᵍ du limbe, de manière que la lunette soit dans la direction du méridien magnétique, on fait tourner ensuite la boussole pour viser un point de mire, la pointe de l'aiguille parcourra un arc dont la graduation donnera celle de l'angle que fait le côté observé avec le méridien magnétique. En faisant la même opération sur un autre côté, étant d'ailleurs toujours placé à la même station, on aura également l'angle de ce côté avec le méridien magnétique, et des deux on pourra conclure celui que forment les rayons visuels.

On pourrait encore lever avec une boussole dans laquelle la lunette et le diamètre 0—200ᵍ ne seraient pas parallèles et dont on ne connaîtrait pas la déclinaison.

Il n'en sera pas moins facile d'avoir l'angle entre deux objets A et B (*fig.* 42) : en effet, on trouve qu'après avoir visé A, le méridien magnétique et le diamètre 0ᵍ—200ᵍ font un angle de 30ᵍ par exemple. Pour diriger ensuite la lunette sur B, le mouvement horizontal que l'on imprime à la boussole fait décrire à chaque point du système, et par conséquent, au point D, un arc de même amplitude que celui qui mesure AOB, car le rayon CD perpendiculaire à AD devient CD′ quand la lunette est dirigée suivant BD.

Les angles AD′B, BCD′ sont égaux, puisqu'ils sont compris entre des droites respectivement perpendiculaires. D'ailleurs, dans le mouvement, tous les points du limbe gradué, et par conséquent le point N ou 0ᵍ, ont parcouru des arcs égaux à DD′ : donc si, dans la seconde position, c'est le chiffre 65 qui correspond à l'extrémité de l'aiguille, la différence 35 des deux lectures indiquera l'angle compris entre les deux objets visés. De cette manière, les triangles qui composent le canevas seront bien coordonnés entre eux, quoique orientés d'une manière arbitraire, et pour en rapporter l'ensemble à l'orientation généralement adoptée, il suffira

de connaître l'azimuth de l'un des côtés. Cette erreur se corrigerait en rapportant les angles, si l'on connaissait d'avance l'azimuth d'un côté.

111. Pour éviter d'avoir égard à la position d'un côté de triangle à droite ou à gauche d'un méridien, on est convenu de compter tous les angles à partir de ce méridien de 0^g à 400^g du nord pour y revenir en passant par l'ouest, le sud et l'est, de sorte qu'il suffit de lire la graduation qui correspond à la pointe nord de l'aiguille; on voit qu'en vertu de cette convention les graduations de la boussole doivent aller du nord vers l'est. La levée que l'on exécutera ainsi sera orientée par rapport au méridien magnétique, et il suffira, pour la rapporter au méridien vrai, de faire tourner le cadre d'une quantité égale à la déclinaison.

112. Si cette déclinaison est connue *à priori*, et que l'on veuille lever de suite suivant la véritable méridienne, on fera tourner tout le limbe au moyen d'un mouvement qui lui est propre, d'une valeur angulaire égale à cette déclinaison, c'est-à-dire qu'on placera le chiffre de $22^g,5$ (si telle est la déclinaison) sous l'index qui marque l'extrémité du diamètre NS parallèle à la lunette. L'instrument ainsi préparé, en visant un objet dans la direction du méridien, le chiffre qu'on lira à l'extrémité de l'aiguille sera zéro : si l'objet est situé dans la direction du méridien magnétique, l'aiguille, le diamètre NS et la lunette, seront parallèles, et de plus, les deux premiers coïncideront, ce sera donc $22^g,5$ qu'on lira, etc. Donc enfin, avec la boussole ainsi déclinée, on obtient immédiatement les angles que font les rayons visuels avec la méridienne du lieu.

Pour servir, la boussole a besoin d'être réglée ou déclinée. En effet, ce qui précède a supposé qu'on connaissait exactement la direction du méridien sur le papier, par rapport aux projections des points donnés, et que de plus, le diamètre marquant le chiffre de la déclinaison était parallèle au plan décrit par l'axe optique de la lunette qui sert de ligne de visée. Quand même la première condition serait satisfaite (ce qui peut ne pas avoir lieu, par exemple quand on fait une levée isolée non basée sur des opérations géodésiques et qu'on n'a pas déterminé exactement la méridienne), on ne peut pas savoir si la seconde condition l'est également, autrement du moins qu'en faisant le règlement même de la boussole.

Voici la seule manière d'opérer qui puisse conduire à des résultats exacts; elle devra toujours précéder l'emploi d'une boussole.

On trace sur le papier une série de parallèles au méridien ou à toute autre direction ; on se transporte ensuite en un point donné de la triangulation, on vise une direction également donnée, et on lit sur la boussole un certain angle α. Mesurant au rapporteur l'angle formé sur le papier, par la direction employée et par la ligne la plus proche de la série des parallèles, on obtient un autre angle α' différent de α. On fait alors tourner le limbe gradué dans la boîte de la boussole jusqu'à ce que, la lunette restant pointée dans la direction choisie, la lecture α se change en α', celle du canevas. Si les lignes parallèles de la feuille de projection sont bien des méridiens, et si le diamètre qui porte l'indication NS est bien parallèle au plan de l'axe optique, ou si les angles formés par ces quatre directions prises deux à deux sont égaux et de même sens, le chiffre de la déclinaison du lieu sera marqué par la ligne NS; sinon cette ligne marquera un chiffre quelconque.

113. Théoriquement, le limbe doit être horizontal, et le plan décrit par l'axe optique doit être vertical; pratiquement, on se contente de remplir ces conditions à simple vue; les erreurs qui en résultent sont sans importance relativement à celles qui proviennent de l'instrument lui-même. La seule vérification importante à effectuer consiste à s'assurer que le point de suspension de l'aiguille est bien le centre du limbe gradué, ou plutôt que le dernier est la projection orthogonale du premier. En effet, supposons, *fig.* 43, que C soit le centre du limbe et C' le point de suspension, l'aiguille qui aurait dû être en C*g* marquant une lecture O*g*, sera en C'G donnant une lecture OG en erreur de *g*G, qui peut aller de 0^g à l'angle correspondant à l'arc dont le sinus serait CC' dans un cercle de rayon égal à celui du limbe. Il est donc essentiel de s'assurer que les points C et C' se confondent.

Si l'on pouvait être certain que les deux extrémités de l'aiguille et le point de suspension sont en ligne droite, il suffirait de faire la lecture à l'extrémité sud et de voir si elle diffère de 200^g de la première lecture faite à l'extrémité nord. Cette vérification n'étant pas facile à faire, on opère de la manière suivante. On retourne la boîte de la boussole et, ramenant vers soi l'oculaire de

la lunette, on vise le point qui avait donné la lecture OG ; tous les points de la boussole ont alors décrit des angles de 200^g autour du centre du limbe qu'on peut regarder comme fixe. Le O des graduations vient en O', G en G', et l'aiguille aimantée prenant la direction C'G' parallèle à C'G donne une lecture O'G' = 200^g + OG'. Si l'instrument avait été centré, les deux lectures Og et O'g eussent différé de 200^g ; si les deux lectures réellement faites ne donnent pas cette différence, l'instrument n'est pas bien centré.

Il serait possible, à la rigueur, d'opérer avec un instrument ainsi défectueux ; il suffirait de prendre pour valeur vraie de l'angle la moyenne de la somme des deux lectures et de la diminuer de 100^g ; mais cela serait très-incommode. Il vaudrait mieux faire retoucher l'instrument par le constructeur, ou même le corriger soi-même par tâtonnement, en infléchissant le pivot qui porte l'aiguille.

Il est important d'effectuer cette vérification sur plusieurs directions ; ou ne s'apercevrait pas, en effet, de l'erreur si la direction choisie était telle que C et C' fussent sur le méridien magnétique.

La vérification dont nous venons de nous occuper a besoin d'être faite de temps en temps pour le même instrument déjà vérifié, car le support de l'aiguille aimantée est une tige dont l'extrémité très-menue peut être facilement déplacée.

114. On veut avoir l'angle que forme avec le méridien, le rayon dirigé sur D, *fig.* 45. On tourne la lunette sur ce point ; dès lors le diamètre de départ, prenant une direction CD' parallèle à OD, ne passe pas par D, et cependant c'est l'angle formé par ce diamètre et l'aiguille que donne la lecture. On commet ici une erreur α qui est l'angle formé par les droites CD, CD', α' et α sont égaux comme alternes internes et le triangle rectangle COD donne $\sin.\alpha' = \frac{CO}{CD}$. L'angle α ou α' est donc très-petit, puisque l'expression de son sinus est la très-petite fraction dont le numérateur est le rayon de la boussole et qui a pour dénominateur la distance à l'objet visé. Cette erreur angulaire est d'autant plus grande qu'on est moins éloigné du point D, et cependant pour une distance de 50^m, la correction est moindre de 13', quantité bien au-dessous de l'erreur que l'on commet dans la lecture. Il est donc inutile d'en tenir compte, mais il était nécessaire de l'apprécier.

115. Appliquons à la boussole la petite formule

$$K < \frac{e}{\text{tang.}\,\beta} \quad \text{ou} \quad < \frac{e}{\beta}$$

trouvée au paragraphe 88.

Les limbes des boussoles permettent de lire les angles à une approximation près $\beta = 25'$. Nous avons admis que l'erreur linéaire e, qui commence à être inappréciable, était de $0^m,0002$; on aura donc pour limite des côtés réduits à l'échelle

$$K < \frac{0,0002}{25'}$$

mais $\quad \pi = 3,1415 = 200^g, \quad 25' = \frac{200^g}{800} = \frac{0,031415}{8} = 0,004$

approximativement. Par suite

$$K < \frac{0,0002}{0,004} \quad \text{ou} \quad < 0^m,05$$

ce qui est à peu près la longueur de l'aiguille de la boussole (comptée à partir du centre du limbe).

Si nous nous rappelons que l'erreur de lecture peut être augmentée de la variation de la déclinaison, et si nous remarquons que l'usage du rapporteur peut produire une nouvelle erreur qui, dans certains cas, s'ajoutera aux deux précédentes, nous conclurons que la limite ci-dessus indiquée doit être diminuée autant que possible, pourvu toutefois qu'on se tienne au-dessus de la limite minimum fixée au paragraphe 114.

Si l'on veut opérer à l'échelle de $\frac{1}{5000}$, $0^m,05$ correspondent à 250^m sur le terrain et $0^m,0002$ à 1^m. Donc, pour cette échelle, on opérera exactement en ne prenant pas des côtés plus grands que 250^m. S'il s'agit de lever à $\frac{1}{20000}$, 0,05 représentent 1000^m et 0,0002 en représentent 4. Il faudra, pour cette échelle, que les côtés ne dépassent pas 1000^m.

Dans le premier cas, on ne pourra pas répondre de la longueur des côtés à 1^m près et à 4^m dans le second. On déduit de ce qui précède que, quelle que soit l'échelle, la projection des côtés ne doit pas dépasser en longueur celle de l'aiguille de la boussole.

116. Lorsqu'on aura levé un polygone entier, on pourra, avant de le rapporter sur le papier, voir s'il ferme exactement, au moyen d'un calcul très-simple. On se rappellera pour cela que la somme des angles intérieurs d'un polygone est égale à autant de

fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux. On fera donc la somme de ces angles en les déduisant ainsi qu'il suit de ceux que font les côtés avec le méridien. Soit ABCDE, *fig.* 47, le polygone, il est évident que l'angle A est égal à la différence d'inclinaison sur le méridien, des deux côtés qui aboutissent à ce point. Désignant les deux lectures par A et A', l'angle dont le sommet est en A sera représenté par A — A'. Il en sera de même pour tous les autres, et la somme des angles du polygone sera représentée par A + B + C + etc. — (A' + B' + C' + etc.). Si, en effectuant le calcul, on trouve pour résultat autant de fois 200ᵍ qu'il y a de côtés moins deux, on sera assuré d'avoir opéré exactement.

Lorsque le méridien passe entre les deux côtés d'un angle dont le sommet est dirigé vers le sud, cet angle est égal à 400ᵍ, moins la différence entre les deux lectures.

117. De ce que, dans un petit espace de terrain tel que celui qu'embrasse une levée, les méridiens magnétiques peuvent être considérés comme parallèles, il s'ensuit que l'on peut, dans le contour d'un polygone, passer successivement un sommet sur deux sans y faire station. En effet, après avoir stationné en A, *fig.* 48, et avoir pris la direction AB, c'est-à-dire l'angle N*oa*, au lieu de s'établir en B pour prendre l'angle NBC ou O, on pourra de suite se transporter en C, et visant en arrière sur le point B, prendre l'angle NC*a* ou O, en sorte que le point B se trouvera également déterminé ; mais, pour mettre plus d'uniformité dans la manière d'inscrire les angles, on écrit celui-ci comme s'il avait été observé en B, en y ajoutant 200ᵍ.

En effet, nous voyons, *fig.* 49, que O est l'angle qu'on aurait observé en B, tandis que c'est O'' qu'on a obtenu en stationnant en *c*. Or, voici la relation qui existe entre ces deux angles :

$$O = 400^g - O''' = 400 - (200 - O'') = 200 + O''.$$

Quand on chemine en opérant ainsi, on prend à chaque station où l'on s'arrête, deux angles, l'un d'avant, l'autre d'arrière. La correction de 200ᵍ se fait sur ce dernier, ou si l'on veut inscrire de suite les angles tels qu'on les lit, on observe le premier avec la lunette à droite comme d'ordinaire, et le second avec la lunette à gauche.

118. *Rapporteur.* Nous venons de voir comment on se sert du graphomètre ou de la boussole pour avoir l'angle entre deux

objets. Il s'agit actuellement de le décrire graphiquement sur le papier. On emploie pour cela un instrument nommé rapporteur. C'est un demi-cercle en corne assez épaisse pour ne pas se voiler trop facilement par la chaleur, sans cependant cesser d'être transparente. La surface du demi-cercle est augmentée du rectangle A 0^g B 200^g, *fig.* 50, et la ligne AB parallèle au diamètre 0—200 sert de règle pour tracer les lignes sur le papier. Le diamètre a de 0^m,15 à 0^m,2.

La circonférence porte une double graduation : l'une de 0^g à 200, l'autre de 200 à 400. Les grades sont divisés en deux, de sorte que l'approximation est la même que dans la boussole.

Il est facile de comprendre l'usage de cet instrument. On opère en l'employant sur la projection comme on fait avec la boussole pour déterminer les angles sur le terrain. On sait que dans cette dernière circonstance, lorsqu'on lit l'angle que fait une direction avec le méridien, on sous-entend une opération préalable, mais superflue, celle d'avoir visé dans la direction du méridien, ce dont on est assuré par la coïncidence du zéro et de l'extrémité nord de l'aiguille. Pour rapporter cet angle sur le papier, on peut supposer que l'on procède d'une manière analogue, ce qu'au reste font effectivement les personnes qui n'ont pas encore acquis l'habitude de cette très-simple opération. On place d'abord le diamètre 0^g—200^g, *fig.* 51, sur la projection du méridien du lieu, ce qui revient à diriger sur le terrain la lunette dans la direction de ce méridien; puis, faisant tourner le rapporteur en conservant son centre au même point, on n'arrête ce mouvement qu'à l'instant où le chiffre qui indique l'angle à rapporter se trouve sur la projection du méridien, et celui-ci sert ici de repère comme l'extrémité de l'aiguille dans la boussole. Il est évident qu'alors la règle du rapporteur fait bien le même angle que la lunette avec le méridien. Le nombre de degrés, d'après la convention établie, indique de suite dans quelle région se trouve le point visé.

Il serait fort incommode, vu la multiplicité des points de détail, de tracer pour chacun d'eux une méridienne. Pour obvier à cet inconvénient, on en trace un certain nombre assez rapprochées, à 0^m,1 par exemple : on met le centre du rapporteur sur la plus voisine du point; on le fait pivoter jusqu'à ce que la règle fasse l'angle voulu, puis on le fait glisser dans cet état, parallèlement à lui même, jusqu'au moment où la règle passe par le point. On obtient ce parallélisme de la règle dans les deux positions, en conservant toujours sur le méridien le même chiffre et le centre.

Si l'angle est assez petit pour que la distance *bc*, *fig.* 52, soit moindre que celle de A au méridien, la règle dans le déplacement du rapporteur ne pouvant plus atteindre le point A, il faut alors modifier l'opération. On se sert du rapporteur complémentaire dont les chiffres de la graduation diffèrent de 100^g de ceux du rapporteur ordinaire, et l'on emploie, au lieu de la méridienne, une ligne qui lui est perpendiculaire. Au surplus, on peut facilement se passer du rapporteur complémentaire et tirer le même parti de l'autre. L'opération mentale à faire est tellement simple qu'il nous paraît inutile de chercher à l'éviter.

119. Proposons-nous, comme exemple du parti que l'on peut tirer de la boussole, de trouver le prolongement de la capitale d'un ouvrage que l'on ne peut approcher. Soit C le saillant, et AC, BC, *fig.* 52 *bis*, les faces de cet ouvrage : on se placera en deux points *a* et *b* sur les prolongements des faces et l'on observera les angles α et β qu'elles font avec le nord. L'angle saillant ACB est évidemment $\alpha-\beta$, comme l'indique la figure, et l'angle que forme la capitale avec chacune des deux faces est $\frac{\alpha-\beta}{2}$ qu'il faut retrancher de α ou ajouter à β, ce qui donne

$$x=\alpha-\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{ou} \quad x=\beta+\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

On pourra trouver par tâtonnement la position d'un point D pour lequel DC fait cet angle x avec le nord.

120. *Cordes.* Le rapporteur donne avec une exactitude suffisante les angles relevés à la boussole. Si cependant ces angles avaient été déterminés à l'aide d'un instrument plus parfait, il serait préférable de les rapporter au moyen des cordes. Supposons que l'on ait calculé une table des cordes pour les angles de 10 en 10 minutes depuis 0^g jusqu'à 100^g et d'un rayon R, on décrira de *b*, *fig.* 53, avec un rayon égal à la corde correspondant à l'angle *bac* que l'on veut tracer, un arc de cercle qui coupera celui décrit de *a* comme centre avec le rayon des tables, puis joignant *a* et *c* par une droite, l'angle *bac* sera celui cherché. Les tables des sinus naturels pourraient servir à cet usage en se rappelant que corde $A = 2 \sin.\frac{1}{2} A$. M. Francœur a calculé une table de cordes pour la division du cercle en 360°.

CHAPITRE IV.

INSTRUMENTS QUI SERVENT A MESURER LES DISTANCES.

121. La *chaîne* offre le moyen le plus simple de mesurer les distances. Elle a ordinairement 20^m de long, quelquefois 10^m seulement. Elle se compose de parties en gros fil de fer, d'égales longueurs réunies par des anneaux. Chaque partie a $0^m,2$, et sur cinq anneaux, quatre sont en fer et le cinquième en cuivre. Les anneaux de cuivre indiquent les mètres. Dix fiches en fer servent à compter le nombre de fois que la chaîne est contenue d'une station à une autre; au surplus, son usage est tellement simple qu'on le devine en la voyant. Il faut, sur un terrain incliné, avoir l'attention de la tendre horizontalement, car ce sont les projections sur un plan horizontal que l'on cherche. Si l'on mesure parallèlement au terrain, on prend note de son inclinaison par rapport à l'horizon, et l'on calcule le triangle rectangle ou l'on emploie des tables qui donnent de suite les projections de toutes les longueurs pour telle pente que l'on peut rencontrer.

122. La *stadia* peut, dans bien des cas, remplacer la chaîne avec avantage. Elle donne même plus de précision, surtout quand le terrain sur lequel on opère est accidenté.

Pour donner des résultats d'une exactitude suffisante, la stadia doit être adaptée à une lunette; mais nous réserverons sa théorie complète, pour le moment où nous aurons exposé les principes d'optique, nous bornant à l'expliquer maintenant telle qu'elle serait construite pour l'exécution de levés expédiés, ou plutôt telle qu'on pourrait la construire soi-même grossièrement.

Elle se composerait d'une mire et d'une enveloppe cylindrique portant à une de ses extrémités deux fils parallèles, et à l'autre une paroi percée d'un petit trou servant de visière, et à travers duquel on apercevrait les deux fils interceptant sur la mire des longueurs d'autant plus grandes que celle-ci serait plus éloignée de l'observateur.

Soit ST une mire ou grande règle peinte d'une couleur voyante, située à une distance D, d'une station O à laquelle l'observateur place son œil. En A et B sont les deux fils situés à une

distance constante d, de la visière o (*fig.* 54). On aura évidemment

$$D = \frac{d.ST}{AB}$$

Si l'on connaissait, une fois pour toutes, d et AB, ainsi que la valeur d'une division de la mire, tout serait connu dans chaque circonstance dès qu'on aurait lu le nombre de divisions interceptées entre les deux fils.

La mesure directe de ces trois quantités très-petites pourrait donner des erreurs considérables au résultat final. On les détermine alors par une expérience directe.

Pour cela, il est nécessaire de mesurer à la chaîne une première distance, 100^m par exemple, à l'extrémité de laquelle on envoie une mire blanche non graduée, et on fait marquer dessus la portion interceptée par les deux fils. Cet intervalle est ensuite divisé en autant de parties qu'il y a de mètres dans la distance employée, 100 dans le cas actuel. On devra avoir

$$100^m = \frac{d}{AB} ST = \frac{d}{AB} 100.\alpha^m$$

si l'on désigne par α la valeur métrique d'une des petites divisions de la mire.

Dans une nouvelle circonstance, on aura lu un nombre n de petites divisions; la distance correspondante sera

$$D = \frac{d}{AB} n.\alpha^m$$

mais $\frac{d}{AB} \alpha^m = 1^m$, donc $D = n^m$.

Le nombre d'unités contenues dans la lecture donnera le nombre de mètres renfermés dans la distance.

Ce mode de division de la mire n'est pas indispensable, mais il facilite beaucoup les opérations qui, sans lui, exigeraient chacune une multiplication par un facteur plus ou moins simple.

Si les fils qui servent à mesurer les distances viennent à se détendre ou à se casser, il faut, après les avoir replacés, diviser de nouveau la mire; et, en effet, l'on conçoit que la plus petite différence sur leur distance fait que l'on embrasse une portion bien différente de la stadia.

123. On évite cet inconvénient en rendant mobile l'un des deux fils. Ici, leur distance (*fig.* 54) est variable; ST est une portion

constante de la stadia, et dans la proportion fournie par les triangles semblables AB : ST :: OB : OT de laquelle on tire $OT = \frac{ST.OB}{AB}$, on trouve que la base à évaluer est fonction de AB. Par une première opération, dans laquelle on a mesuré avec soin OT, on trouve $ST \times OB = AB \times OT$. Le second membre étant connu, donne pour les opérations ultérieures le produit constant $ST \times OB$ que l'on divise chaque fois par la variable AB. Il faut donc estimer avec beaucoup de précision cette distance AB des deux fils. Pour y parvenir, on adapte un micromètre à l'instrument : il se compose d'une vis qui fait mouvoir l'un des fils, et extérieurement à la lunette, d'une aiguille qui parcourt un cadran divisé, fixé sur le tube de la lunette. A chaque révolution que fait l'aiguille, elle fait mouvoir une roue dentée dans laquelle elle engrène. Les dents sont numérotées : celle qui porte le zéro est auprès de l'aiguille quand les deux fils coïncident. Lorsque l'aiguille a parcouru une révolution entière, les fils sont distants d'une quantité égale au pas de la vis qui sert de pivot à l'aiguille.

Les nombres de tours et de fractions de tours, qui indiquent les nombres de pas de vis et de fractions de celui-ci, qui séparent les deux fils, ne suffiraient pas à faire connaître la distance variable AB, si on n'appréciait pas la valeur du pas de vis, par une opération analogue à celle relative à la stadia à fils fixes, opération qui dispense également de la mesure directe de $OB = d$ et de celle de ST.

Désignons par β la valeur linéaire inconnue, du pas de la vis ; on aura $AB = n\beta$ étant la lecture faite sur les cadrans, et par suite

$$D = \frac{d.ST}{n.\beta}$$

Une expérience va nous donner une fois pour toutes la constante $\frac{d.ST}{\beta}$ mètres. Comme dans le cas précédent on mesurera une distance de 100^m par exemple, qui correspondra à un nombre de tours marqué par p, en sorte qu'on aura

$$100^m = \frac{d \times ST}{\beta} \times \frac{1}{p} \text{ mètres.}$$

d'où

$$\frac{d \times ST}{\beta} = 100^m \times p$$

Dans une circonstance quelconque, on aura D par l'équation

$$D = \frac{d.ST}{\beta} \times \frac{1}{n} = 100^m \frac{p}{n}$$

Il faudra donc, dans chaque cas, diviser la constante 100 p, par le nombre de tours et de fractions de tours.

Ainsi, par les combinaisons de cet ingénieux mécanisme, et en comptant le nombre des dents qu'a dépassées l'aiguille et les divisions du cadran qu'elle a rencontrées ensuite, on arrive à apprécier la distance avec une grande exactitude.

Il serait cependant fort incommode de calculer, sur le terrain et pour chaque distance nouvelle, le quatrième terme d'une proportion. Il est plus convenable d'avoir toujours avec soi une table calculée d'avance.

Nous allons, pour exemple, en placer une ici, fondée sur l'hypothèse que le plus grand écartement des deux fils horizontaux du micromètre correspondant à 10 tours 1/2 de la vis, on a marqué sur une mire distante de 40^{m} de l'oculaire, la partie interceptée par les fils séparés par 8 tours. On couvre cette partie d'une couleur tranchant le plus possible sur le ton local de la mire : de rouge ou de noir, si la mire est peinte en blanc.

Les dents du pignon, qui peuvent être au nombre de douze, indiquent combien de tours complets on fait faire à l'aiguille, tandis que le disque fixe, divisé en 100, permet d'apprécier les centimes de révolution.

Il ne faudrait sans doute pas beaucoup compter sur l'exactitude de l'appréciation des distances fournies par les derniers chiffres de la table ci-dessous.

Table de la stadia à micromètre mobile.

30^{m}	10^{t},67	51^{m}	6^{t},27	105^{m}	3^{t},05	195^{m}	1^{t},64
31	10,32	52	6,15	110	2,91	200	1,60
32	10,00	53	6,04	112	2,86	220	1,45
33	9,69	54	5,93	115	2,78	240	1,33
34	9,41	55	5,82	120	2,66	250	1,28
35	9,15	56	5,71	124	2,58	260	1,22
36	8,89	57	5,61	125	2,56	280	1,14
37	8,65	58	5,52	130	2,46	300	1,07
38	8,42	59	5,42	135	2,37	320	1,00
39	8,20	60	5,33	136	2,35	340	0,94
40	8,00	64	5,00	140	2,28	350	0,91
41	7,80	65	4,92	145	2,20	360	0,89
42	7,62	70	4,57	150	2,13	380	0,85
43	7,44	75	4,27	155	2,06	400	0,80
44	7,27	76	4,21	160	2,00	420	0,76
45	7,11	80	4,00	165	1,94	440	0,73
46	6,96	85	3,76	170	1,88	450	0,71
47	6,81	88	3,54	175	1,83	460	0,69
48	6,67	90	3,55	180	1,78	480	0,67
49	6,53	95	3,37	185	1,73	500	0,64
50	6,40	100	3,20	190	1,67		

124. Les mesures obtenues au moyen de la stadia doivent, comme celles que l'on prend à la chaîne, être réduites à l'horizon, quand le terrain est incliné : il y a même un double motif. Soit ON (*fig.* 55) la surface du terrain faisant un angle α avec le plan horizontal MN. L'observateur est en O : la mire étant placée verticalement en N suivant Nn, est oblique par rapport à l'axe de la lunette, ainsi la partie comprise Nn est trop grande et doit être réduite à Nm perpendiculaire au terrain ON. Pour cela, remarquons que Nn et Nm étant respectivement perpendiculaires à NM et NO, l'angle formé par ces droites est aussi α. On a d'ailleurs

$$Nn : Nm :: \sin.m : \sin.n, \quad n = 200 - N - m, \quad \sin.n = \sin.(N + m)$$

d'où $$Nm = Nn \frac{\sin.(N+m)}{\sin.m}; \quad Nm = Nn \frac{\sin.N \cos.m + \sin.m \cos N}{\sin.m}$$

et $$Nm = Nn (\sin.N \operatorname{cotang} m + \cos.N)$$

L'angle en N étant très-petit, son sinus l'est aussi. L'angle en m différant peu de 100^g, sa cotangente est également très petite ; d'où il résulte que le produit de ces deux lignes trigonométriques est négligeable comparativement à cos. N : il vient donc enfin

$$Nm = Nn \cos.N = Nn \cos.\alpha \quad \text{ou} \quad \cos.\alpha = \frac{Nm}{Nn}$$

Mais en désignant par β le résultat de la lecture, et par b, la ligne ON, nous avons

$$\beta : b :: Nn : Nm, \quad \text{et} \quad b = \beta \frac{Nm}{Nn} = \beta \cos.\alpha ;$$

d'ailleurs MN ou $B = b \cos.\alpha$, donc enfin

$$B = \beta \cos.^2 \alpha = \beta (1 - \sin.^2 \alpha) \quad \text{et} \quad \beta - B = \beta \sin.^2 \alpha.$$

On a construit, pour trouver de suite les valeurs des bases réduites B, des tables à double entrée, dont les éléments sont l'angle de pente et le nombre de mètres indiqué par la lecture. Dans bien des circonstances, l'inclinaison α du terrain est assez petite pour que la correction ne porte que sur des fractions de mètres ; on la néglige alors, puisque l'erreur de lecture peut atteindre un mètre.

CHAPITRE V.

LEVÉES AU GONIOGRAPHE ET A LA CHAINE.

125. En ajoutant une chaîne au goniographe, on peut résoudre quelques nouveaux problèmes. Supposons que l'on ait à sa disposition une planchette, une alidade et une chaîne ; on donne deux points de repère et l'on demande de déterminer la projection d'un troisième point :

1° Lorsqu'un des repères et le point cherché sont accessibles et le second repère visible seulement du premier. Soient R, *r* ; P, *p* les deux repères et X le point que l'on veut trouver. On stationnera en R, *r*, s'orientant sur RP, on rayonnera RX et on le mesurera : on rapportera cette distance à l'échelle et l'on aura *x*.

2° Lorsque les deux repères sont inaccessibles, mais que l'on peut s'établir en un point A, *fig.* 56, de la droite qui les unit : que de ce point on voit X, et qu'enfin, l'un des repères est invisible de X, on se transporte en A, on cherche sur la planchette le point *a'* où la verticale de A rencontre *rp* ; on s'oriente sur RP ; on rayonne AX, puis on le mesure, et on porte la longueur réduite à l'échelle de *a'* en *x* . Par *x'*, on trace parallèlement à *rp* une droite sur laquelle doit se trouver la véritable projection *x* de X. Se plaçant en station en ce dernier point et s'orientant au moyen de *a* *x* , on dirige ensuite P*p* un rayon visuel dont la trace contiendra aussi le point cherché *x*.

3° Lorsque l'un des repères P et le point cherché X sont inaccessibles, on choisit un autre point accessible A, *fig.* 57, que l'on vise de R ; on mesure RA que l'on reporte sur le plan. En A, après s'être décliné sur AR, on recoupe X qui avait été visé à la station R et se trouve ainsi déterminé.

4 Lorsque les deux points de repère sont inaccessibles et visibles tous deux du point cherché, et que l'on connaît la distance de ce dernier à l'un d'eux, ou quand l'un des repères est abordable seulement pour mesurer la distance, mais non pour s'y mettre en station. C'est ce qui arriverait si ce point était entouré de bois ou de maisons, et qu'il y eût seulement une route ou une rue se dirigeant vers le point dont on veut obtenir la projection. Si l'on peut tracer sur *rp* le segment capable de l'angle RXP, *fig.* 58, son intersection par l'arc de cercle décrit de *r* comme centre, avec la distance RX réduite à l'échelle pour rayon, déterminera

le point x cherché. Pour atteindre ce but, opérons comme au § 99, et pour cela, étant en station en X, établissons la projection p sur la verticale de X et la trace rp dans le plan vertical RX : fixons la planchette et faisons pivoter l'alidade autour de p jusqu'à ce qu'elle soit dans le plan vertical dont XP est la trace sur le terrain ; élevons une perpendiculaire sur le milieu de rp ; au point p une perpendiculaire sur la ligne de construction pp', et le point o de rencontre sera le centre du segment capable. On voit que la distance rx étant supposée connue d'avance ou mesurée, on obtient la position de x en décrivant de r un arc de cercle dont le rayon est rx. En traçant les lignes rx, px, on a la projection de l'angle RXP, le moyen de s'orienter en X et d'y commencer les opérations relatives à la construction du canevas. Ces différents problèmes pourraient être également résolus au moyen du graphomètre ou de la boussole.

126. Nous terminerons ce qui a rapport aux divers modes de procéder avec la planchette et la chaîne en supposant donné le cadre d'une levée avec la condition que l'un de ses côtés soit parallèle au méridien : la projection d'un point de départ étant également connue, il s'agit de faire le plan et par conséquent de construire d'abord le canevas :

1° Si le point donné est accessible, on s'y transporte et l'on y détermine la direction de la méridienne par un des procédés précédemment indiqués ou plutôt au moyen du déclinatoire ou de la boussole. On met le côté précité du cadre dans cette direction, puis on vise un point accessible, on mesure la distance avec soin, et l'on a ainsi une base orientée sur laquelle on appuie les opérations ultérieures.

2° Lorsque le point donné R est inaccessible, on se place à un autre point A, *fig.* 59, dont on prend, pour projection provisoire, a' sur la verticale de A : on oriente comme ci-dessus et l'on vise R et un nouveau point accessible B. La direction a'R ne passe pas par r, mais elle est parallèle à ar cherché. On mesure AB et l'on en porte la longueur suivant $a\ b$. Arrivé en B, on considère b comme en étant la projection, on s'oriente au moyen de AB et l'on trace Rb' rencontrant a'R en un point r qui est le troisième sommet d'un triangle $a'b\ r$ égal à celui que forment les projections des trois points A,B,R : de plus, les côtés sont parallèles à leurs correspondants. Il suffit donc de faire glisser ce triangle parallèlement à lui-même jusqu'à ce que r et r' se con-

fondent, alors $a'b'$ devient *ab*, et l'on a déterminé une base accessible au moyen d'un point qui ne l'est pas.

127. Généralement, on donne plusieurs points de départ sur la planchette : mais, s'ils ne s'accordent pas entre eux, c'est-à-dire si étant à l'un quelconque et la planchette étant orientée, les rayons visuels dirigés sur les autres ne passent pas par leurs projections, il faut reconnaître les mauvais et les négliger, ou quelquefois même les rejeter tous hors un, et opérer comme il est dit plus haut § 126.

Si l'on est appelé à faire la levée d'un terrain sur lequel il n'y a pas de points trigonométriques, on choisit des points remarquables *a*, *b*, *c*, *d*, fig. 60, on prend et on mesure une base *mn*, et on fait en sorte d'arriver à la détermination des points *a*, *b*, *c*, *d* en passant par le plus petit nombre possible d'opérations, afin d'avoir moins de chances d'erreur. Les planchettes voisines pourront alors se bien raccorder, si l'on a eu soin d'avoir un côté *ab* commun à deux planchettes contiguës.

128. Si l'on veut déterminer l'échelle qu'il faut employer, pour que la projection d'une surface assignée du terrain soit contenue dans un cadre donné, on fait la reconnaissance du terrain, puis un canevas provisoire à une petite échelle ; on y circonscrit un rectangle semblable au cadre donné, et le rapport entre un côté de ce cadre et son homologue dans le rectangle tracé est celui qui existe entre l'échelle qui satisfera à l'énoncé du problème et celle employée pour le canevas approximatif.

Si, réciproquement, l'échelle est spécifiée ainsi que la surface du terrain, on peut se proposer de trouver les dimensions du cadre. On opère comme ci-dessus, et le rapport entre l'échelle donnée et celle que l'on a employée pour le canevas devant être le même que celui des côtés homologues, les dimensions du cadre cherché se déduiront facilement de celles du rectangle circonscrit.

129. *L'équerre* est plutôt un instrument d'arpenteur que de topographe ; cependant, comme il est d'un usage très-commun dans les campagnes et qu'un officier chargé de faire des reconnaissances doit surtout pouvoir tirer parti des instruments que le hasard lui fournit ; nous entrerons dans quelques détails à son sujet. L'équerre est ordinairement un cylindre en cuivre, *fig.* 61, de $0^{m},08$ à $0^{m},1$ de diamètre, dans lequel sont pratiquées quatre fentes verticales ou pinnules déterminées par deux diamètres

rectangulaires. Cet instrument peut également se composer d'un cercle de cuivre auquel sont fixées quatre pinnules perpendiculaires à son plan, et placées comme les précédentes dans deux directions formant angle droit.

L'équerre se place sur un pied à trois branches ou sur un bâton ferré. On voit facilement que si l'on dirige l'une des alidades suivant un certain alignement, l'autre en déterminera un second perpendiculaire au premier. La seule vérification à laquelle on doit soumettre cet instrument consiste à s'assurer que les deux directions se coupent à angle droit. Pour cela, on vise à travers deux pinnules un objet éloigné et un second par les deux autres, puis l'on fait tourner l'instrument jusqu'à ce qu'on aperçoive le premier objet avec les secondes pinnules, et réciproquement. Si la coïncidence a lieu, l'équerre est juste. La plupart des équerres ne sont pas rectifiables : néanmoins on peut encore résoudre plusieurs problèmes intéressants avec une fausse équerre comme avec une qui est juste. On peut, par exemple, mener par un point extérieur une perpendiculaire à une droite, car on trouvera O′, *fig.* 62, par un premier coup d'équerre ; et faisant ensuite venir l'alidade OC sur l'alignement AB, on marchera sur cet alignement jusqu'à ce que l'autre O*b* soit dans la direction de C : on divise en deux parties égales la distance du point O″ où l'on se trouve, à la première station O′, et le point milieu O est le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur AB.

Si la perpendiculaire devait être élevée en un point déterminé de la direction elle-même, on opèrerait en ce point, en dirigeant successivement l'une et l'autre pinnule suivant la base : ces deux opérations auraient déterminé la position de deux jalons que l'on aurait eu soin de placer à même distance de l'instrument, au bout de la chaîne tendue si l'on veut. Le point milieu de la droite qui unit les deux jalons appartient à la perpendiculaire cherchée.

Pour lever un polygone, on détermine les coordonnées de ses sommets en les rapportant à deux axes rectangulaires. On prend une base AX (*fig.* 63), on marche dessus en mettant une des alidades dans sa direction jusqu'à ce que l'on arrive en *a′* où l'on aperçoit un angle *a* dans la seconde alidade. On opère de même pour les autres points *b*, *c*, *d*, *e* et l'on porte sur le papier les longueurs A*a′*, A*e′*, A*b′*, etc. On prend un second axe AY sur lequel on effectue des opérations analogues aux précédentes, et les intersections des perpendiculaires à cet axe *aa″*, *bb′*, *cc″*, etc.,

avec celles que l'on a élevées en a', b', c', etc., déterminent les projections de tous les sommets du polygone.

Si les deux couples de pinnules n'étaient pas rectangulaires, il faudrait que les axes fissent le même angle qu'elles et avoir soin en opérant de diriger toujours l'équerre de la même manière.

Il existe des équerres dont l'angle n'est pas constant : elles se composent de deux cylindres creux s'emboîtant comme les deux parties d'une tabatière. L'un porte une alidade et un index; l'autre une alidade et une division circulaire. Cet instrument ne peut être d'une très-grande précision, en raison de son petit diamètre.

On peut encore, pour lever le plan d'une figure quelconque, agir ainsi qu'il suit : on mène dans l'intérieur, et dans le sens de la plus grande dimension, une droite que l'on nomme base ou directrice. De tous les angles du périmètre, on abaisse sur cette base des perpendiculaires que l'on mesure ainsi que les segments qu'elles déterminent sur cette base.

On peut se servir immédiatement du rapporteur sur le terrain pour construire les perpendiculaires.

Si l'intérieur du polygone est inaccessible, on emploie la première méthode indiquée, ou, en supposant que la figure soit curviligne, on lui circonscrit un quadrilatère ou tel polygone qui lui convient le mieux, et, de tous les principaux points du contour, on abaisse des perpendiculaires sur chacun des côtés pris successivement pour directrices.

130. Nous allons passer encore en revue quelques-uns des problèmes susceptibles d'être résolus avec l'équerre.

1° Par un point C mener une parallèle à une droite AB accessible (*fig.* 64). On cherche sur la ligne donnée le pied A de la perpendiculaire passant par C où l'on se transporte ensuite : on y dirige l'une des alidades de l'instrument suivant CA, et l'autre détermine la direction de la parallèle demandée.

2° Mesurer la distance à laquelle on se trouve d'un point A inaccessible. Si l'on est placé en B (*fig.* 65), on mesure une base BC perpendiculaire à AB et dont on marque le point milieu D : en C, on élève une perpendiculaire indéfinie A C à la base et on la jalonne ; on jalonne de même l'alignement AD prolongé, et le point de rencontre A' détermine la solution du problème : car les deux triangles ABD, A'CD sont égaux puisque, rectangles tous deux en B et C, ils ont les angles en D égaux comme opposés par

le sommet et les côtés BD, CD égaux par construction : donc A'C est égal à la distance cherchée AB.

3° Mesurer la distance de A à H tous deux inaccessibles et par un point O donné, mener une parallèle à AH. On prend une base BC sur laquelle on cherche les pieds B et C des perpendiculaires abaissées de A et de H, puis on mesure la longueur de BC et l'on en marque le milieu D. Le terrain sur lequel on a tracé BC a été choisi tel que l'on puisse opérer avec précision On prolonge, au moyen de jalons, les directions DA, DH jusqu'à la rencontre en A' et H des perpendiculaires HC, AB aussi prolongées. Les deux triangles ABD, A'DC, comme nous venons de le voir plus haut, sont égaux, puisqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux. La distance de A à B est donc connue ; elle est égale à A'C. La comparaison des triangles CDH, BDH' donne également CH BH'. Il en résulte que la figure AHA'H' est un parallélogramme, que A'H' est égal et parallèle à AH et qu'ainsi la longueur AH demandée est connue. Pour mener enfin par O une parallèle à AH, cela revient à tracer une parallèle à la droite accessible A'H' par le procédé indiqué au premier problème.

Si le terrain en arrière de la base n'était pas assez vaste pour opérer ainsi, on prendrait $Dn = \frac{1}{4}DC$ et $Dm = \frac{1}{4}BD$ ou DC : on élèverait par m et n deux perpendiculaires jusqu'à la rencontre des prolongements de AD et DH, et l'on arriverait à $ah = \frac{1}{4}AH$.

4° Prolonger avec l'équerre une ligne AB au delà d'un obstacle. On mène B*b* (*fig.* 66), perpendiculaire sur AB ; *bc* perpendiculaire sur B*b* ; C*c* = B*b* perpendiculaire sur *bc* et enfin CD perpendiculaire sur C*c*.

Suivant la position de l'obstacle, on pourra encore résoudre ainsi le problème. Par *b* on mène *cd* quelconque ; on choisit *d* (*fig.* 67) de manière que *do* perpendiculaire à *cd* dépasse l'obstacle : on prend *bc* = *bd*. En *c* on élève la perpendiculaire *ca* que l'on mesure, puis faisant *do* = *ca*, on a le point *o* qui appartient au prolongement de *ab*.

Si l'on veut encore, on trace *bc* (*fig.* 68) et *dc* perpendiculaires à *ab* et *ac*. Les deux triangles rectangles *abc*, *acd* étant semblables parce qu'ils ont un angle et un côté communs, fournissent la proportion *ab* : *bc* :: *ac* : *cd* de laquelle on tire, pour avoir la position de *d*,

$$cd = \frac{ac \times bc}{ab}$$

Enfin, par *a* et *b* (*fig.* 69), on mène *cd* et *ef* perpendiculaire-

ment à *ab* : on prend $cb = bd$, $ae = af$ et les alignements *ec*, *df* prolongés donnent, par leur rencontre, un point O appartenant à la droite indéfinie *ab*.

5° Mesurer une ligne accessible à ces deux extrémités seulement. On construit le rectangle ABA' B' (*fig.* 70), et l'on mesure A'B'. On peut aussi au point A (*fig.* 71), élever AC perpendiculaire à AB ; mesurer AC : par un point D de cette ligne, mener une parallèle à AB jusqu'à la rencontre en E de CD : on mesure DC ainsi que DE et l'on a $AB = \frac{AC.DE}{CD}$. On peut encore par A (*fig.* 72), mener une droite quelconque AC que l'on prolonge jusqu'à ce que l'on atteigne le pied de BC perpendiculaire à AC et l'on conclut

$$AB = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}$$

ou enfin, si l'obstacle ne permettait pas de construire la figure précédente, on tracerait AA' (*fig.* 73) puis A'C' perpendiculaire à AA' et BC' perpendiculaire à AC' : il viendrait alors

$$AB = \sqrt{\overline{AC'}^2 + \overline{BC'}^2} = \sqrt{\overline{A'C'}^2 + (\overline{BC' - AA'})^2}$$

6° S'il s'agit d'évaluer la surface d'une levée renfermée dans une courbe quelconque, rien n'est plus facile quand le périmètre est un polygone régulier. La géométrie fournit les méthodes à employer en pareilles circonstances. Si le contour est une figure irrégulière, le procédé consiste à inscrire, si l'intérieur est accessible, un polygone dont les côtés s'écartent le moins possible de la courbe, puis à décomposer la surface totale en triangles que l'on évalue partiellement au moyen de la formule $S = \frac{1}{2} BH$ et que l'on peut vérifier par cette autre

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

p représentant la demi-somme des côtés.

Il ne reste plus alors à évaluer que les portions A*m*B, B*m*'C, C*m*''D, etc. (*fig.* 74). Voici comment on procède : soit une surface terminée par la courbe irrégulière A*c*'*d*'*e*'B*e*''*d*''*c*' (*fig.* 75), on trace la droite AB suivant la plus grande longueur de la figure : on la partage en parties égales A*c*,*cd*,*de*,*e*B, assez petites pour que l'on puisse regarder comme des lignes droites les portions de courbes comprises entre les perpendiculaires élevées par

les points c,d,e. Ne considérons que la partie supérieure à AB puisque nous opérerions de la même manière à l'égard de l'autre. Nous voyons qu'elle est décomposée en une suite de trapèzes compris entre deux triangles. Désignons cc' par h, dd' par h', ee' par h'' et faisons $Ac = cd = de = Be = b$; nous aurons, en représentant par S la surface totale et par s, s', s'', etc., les surfaces partielles.

$$s = \frac{1}{2} bh\,;\ s' = \frac{1}{2} b\,(h + h'),\ s'' = \frac{1}{2}\, b\,(h' + h'');\ s''' = \frac{1}{2}\, bh''$$

d'où $$S = \frac{1}{2}\, b\,[h + (h + h') + (h' + h'') + h''] = b\,(h + h' + h'')$$

Ceci nous suffit pour déterminer les petites surfaces curvilignes de la *fig.* 74. Telle serait aussi la marche à suivre si l'intérieur de la courbe était inaccessible, comme serait un étang, un bois, etc., car alors on circonscrirait un polygone (*fig.* 76). On en calculerait la surface de laquelle on retrancherait celles des intervalles compris entre la courbe et les côtés du polygone. Nous voyons encore que si, dans la figure 75, nous calculons la surface au sud de AB, comme nous l'avons fait pour celle qui est au nord, cela indique un moyen que l'on peut encore employer directement pour trouver l'aire d'une figure sans y inscrire de polygone.

CHAPITRE VI.

LEVÉES A LA CHAÎNE, ALIGNEMENTS, TRANSVERSALES.

131. Il est bon qu'un officier chargé de lever, souvent sans le secours d'instruments, connaisse les ressources que peuvent lui fournir de simples alignements tracés au moyen de jalons, et la chaîne ou son pas bien réglé. Prendre ou jalonner un alignement, c'est chercher, sur le terrain, la trace du plan vertical qui passe par deux points déterminés. On se sert pour cela de jalons ou bâtons ferrés.

Si l'un des points est accessible, on s'y place et l'on fait planter une suite de jalons dans la direction du second. Il est bon de viser d'un peu loin et de faire passer le rayon visuel tangentiellement aux jalons et alternativement à droite et à gauche.

Si aucun des deux points n'est accessible, on se transporte en C sur la direction présumée AB (*fig.* 77), on y place un jalon, et et l'on en fait planter un autre C' sur la direction CB : on se rend

en C' pour voir si A,C,C', sont en ligne droite, et s'il n'en est pas ainsi, on dérange les jalons et l'on arrive par tâtonnement à leur véritable position. Le concours de deux personnes abrége évidemment l'opération.

132. Soit proposé de trouver la projection d'un point C, connaissant celles de deux droites AB,A'B'.

1° Si d'abord le point C (*fig.* 78) doit se trouver sur les deux alignements, il est évident que sa position se détermine en prolongeant les droites *ab*,*a'b'* jusqu'à leur rencontre.

2° S'il doit se trouver sur l'un seulement des deux alignements, sur AB (*fig.* 79), on prolonge d'abord A'B' au moyen de jalons jusqu'en C': on mesure CC' et on le porte réduit à l'échelle sur le plan de *c'* en *c* suivant *ab*.

3° Si C est situé hors des deux directions données AB et A'B', on demande encore d'en déterminer la projection par la méthode des alignements. On connaît sur le plan *ab*,*a'b'* et *d* projection d'un point D visible de C, mais inaccessible (*fig.* 80). De C, on marche vers D jusqu'à ce qu'on parvienne en C' sur la droite qui unit A à B : ensuite on mesure la distance de C' à C point de rencontre des deux alignements connus, puis on porte sur le plan d'abord la longueur *c'c'* : on trace *dc'*, et sur son prolongement on porte celle de *cc'* qui détermine *c*.

On pourrait se passer de connaître la position de *d* si l'on pouvait mesurer CC : car, en prenant C' à une distance arbitraire de C , on décrirait, de ces deux points comme centres, avec des rayons *cc''* et *cc'* deux arcs de cercles dont l'intersection déterminerait *c*.

4° Le point C (*fig.* 81) est situé sur une droite AB dont la projection est connue : on a également *d* celle de D accessible; il s'agit de trouver *c*. On marche sur la direction CD que l'on mesure, puis du point *d* comme centre et d'un rayon égal à CD réduit, on décrit un arc qui coupe *ab* en *c* point cherché.

5° La projection de AB et celle de D accessible (*fig.* 80) étant encore connues, on veut déterminer C que l'on ne suppose plus sur la direction AB. On mesure CD et la distance de D à C' point de rencontre de AB et CD ; après quoi sur le papier, de *d* comme centre et avec *dc'* pour rayon, on décrit un arc de cercle qui coupe *ab* en deux points, mais on reconnaît facilement celui qui convient : on trace *dc'* et l'on porte *cd* sur cette ligne à partir de *d*.

133. *Théorie des transversales.* Sans le concours d'autres instructions que la chaîne et des jalons, on peut encore résoudre plusieurs problèmes dont la pratique se présente assez fréquemment.

La solution de quelques-uns d'entre eux s'appuie sur deux propriétés fondamentales des lignes que l'on nomme transversales. On désigne sous ce nom des droites qui traversent un système d'autres lignes droites.

Premier théorème. Imaginons une transversale XY coupant le système des trois droites Ac,Cb,Ba aux points c,b,a (*fig.* 82) : ces trois lignes forment généralement un triangle ABC, et l'ensemble fournit cette relation :

Le produit des segments de droite est égal au produit des segments de gauche ; ou, ce qui est la même chose, *le quotient de ces deux produits est égal à l'unité.*

La gauche et la droite sont prises à chaque sommet de triangle, par rapport à son centre, et les segments se comptent sur les directions prolongées des côtés, à partir de chaque sommet jusqu'à la rencontre de la transversale. Pour le démontrer, menons par C,Cc' parallèle à AB, et nous aurons, en comparant les triangles semblables Aca, Ccc' $\frac{Ac}{Cc}=\frac{Aa}{Cc'}$. Les deux triangles bCc', bBa donnent également $\frac{Cb}{Bb}=\frac{Cc'}{Ba}$; multipliant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$\frac{Ac.Cb}{Cc.Bb}=\frac{Aa.Cc'}{Cc'.Ba} \text{ ou } \frac{Ac.Cb.Ba}{Aa.Bb.Cc}=1 \text{ ou enfin } Aa.Bb.Cc=Ac.Cb.Ca.$$

On voit que si, dans l'une de ces équations, on connaît cinq quantités, la sixième s'en déduit.

134. *Deuxième théorème.* Considérons maintenant le triangle ACB (*fig.* 83) relativement à trois transversales passant chacune par un des sommets et prolongeons les côtés du triangle jusqu'à ces transversales. Le triangle ACC''' donne par rapport à la transversale DD' et d'après le théorème précédent $\frac{AA'.C'''D'.CB}{AD'.BC'''.CA'}=1$.

Le triangle ABC''' fournit de même, par rapport à DD'', $\frac{AD''.CC'''.BB''}{AB''.D''.C'''.BC}=1$. Multipliant membre à membre et supprimant,

dans le premier, BC facteur commun au numérateur et au dénominateur, il en résulte $\frac{AA'.BB''.CC'''.AD''.C'''D'}{AD'.CA'.D''C'''.AB''.BC'''}=1$.

Si les trois transversales se rencontrent en un seul point, c'est-à-dire si D' et D'' se confondent avec D (*fig.* 84), on aura $AD''=AD'$, $C'''D''=C'''D'$ et par suite $\frac{AA'.BB''.CC'''}{AB''.BC'''.A'C}=1$.

Cette dernière formule peut se déduire immédiatement du premier théorème en considérant le triangle ABC successivement par rapport aux trois transversales. En effet, pour la transversale DB, l'on a $\frac{AA'.CD}{AB.CA'}=1$: pour DA, $\frac{BA.CC'''}{BC'''.CA}=1$ et pour DC, $\frac{AC.BB''}{AB''.BC}=1$.

Multipliant comme ci-dessus et supprimant AB,AC,BC haut et bas, il vient $\frac{AA''.BB''.CC'''}{AB''.BC'''.CA'}=1$.

Cette propriété peut ainsi s'énoncer : Si l'on a un triangle et trois transversales émanant d'un même point et passant chacune par un sommet, le produit des quotients ou le quotient des produits des segments de gauche par ceux de droite est égal à l'unité.

Si le point D est situé dans l'intérieur du triangle, la même propriété a encore lieu : c'est ce qu'indique la figure 85 à laquelle on a conservé la notation précédente. Si l'une des transversales, celle qui passe par C, par exemple, partage en deux parties égales le côté opposé AB, dès lors $AB''=BB'$ et l'équation ci-dessus se réduit à $\frac{AA'.CC'''}{BC'''.CA'}=1$ et indique que la droite A'C''' est parallèle à AB. De là, nous déduirons bientôt le moyen de tracer, par un point donné, une parallèle à une droite.

135. *Problèmes.* Le premier théorème trouve son application immédiate dans la question suivante :

Trouver la distance de C accessible à *c* inaccessible. On prend un point A (*fig.* 86), dans le prolongement de C*c* : on choisit un autre point B propre à former un triangle avec A et B. Sur BC, on marque un point *b* pris arbitrairement, puis on cherche *a* rencontre des alignements *bc*,AB, et en considérant XY comme

une transversale, on a $Aa.Bb.Cc = Ac.Ba.Cb$. Mettant à la place de Ac sa valeur $AC + Cc$,

$$Aa + Bb + Cc = AC.Ba.Cb + Cc.Ba.Cb$$

ou $$Cc = AC \frac{Ba.Cb}{A.a.Bb - Ba.Cb}$$ et enfin $$Cc = \frac{AC}{\frac{Aa.Bb}{Ba.Cb} - 1}$$

On peut mesurer AC et les segments Aa, Ba, Bb, Cb des deux côtés AB,BC du triangle ABC, dont on connaît Cc.

136. On demande de prolonger la ligne AB (*fig.* 87) au delà d'un obstacle. On cherche un point c duquel on puisse voir C au delà de l'obstacle. On trace les alignements Bc, Cc, puis on choisit b sur Bc de manière à pouvoir, avec l'alignement Ab, former un triangle abc convenable. Alors considérant AC comme une transversale, par rapport au triangle abc, on a $\frac{Aa.Bb.Cc}{Ca.Ab.Bc} = 1$; mettant pour Cc sa valeur $aC - cC$, et tirant celle de aC, il viendra $aC = \frac{ac}{\frac{Ab.Bc}{Aa.Bb} - 1}$. Déterminant un autre point C′ par la même méthode, on sera en état de tracer le prolongement de AB.

137. Mener par le point a une droite parallèle à AB supposée partout accessible.

On prend C (*fig.* 88) sur aB prolongé : de C on mène les trois droites CA, CB et Cc; cette dernière étant dirigée sur c milieu de AB; ensuite, on détermine l'alignement Aa; on marque le point de rencontre de Aa et Cc; puis, enfin on prolonge BD jusqu'en b et la droite qui unit a à b est la parallèle cherchée, d'après l'une des propriétés des transversales.

Si les extrémités seules de la droite sont accessibles, on mène les alignements aB,AD, on mesure DB,AD,Da et l'on porte sur AD prolongé, Db (*fig.* 88 *bis*), quatrième proportionnelle à ces trois lignes.

On obtient encore la longueur de AB au moyen d'une proportion de côtés dans les triangles semblables ABD, abD, après avoir toutefois mesuré ab. Cette méthode pourrait être également employée dans le premier cas, mais l'autre est préférable en ce qu'il ne faut mesurer que AB pour en avoir le milieu.

Si la droite est entièrement inaccessible, on mesures les di-

stances AD,BD d'après le principe que fournit le premier théorème; puis on opère comme dans le second cas.

Si AB (*fig.* 89) est accessible dans son prolongement seulement, on pourra construire l'angle en *a* par les trois côtés du triangle de construction *abc*, puis au point C où l'on veut faire passer la parallèle, on fera l'angle C égal à *a* en construisant également le triangle C*cd* = *abc*.

On peut encore quand la droite donnée CD (*fig.* 100) est entièrement inaccessible, employer le procédé suivant : A étant le point donné par lequel on doit mener la parallèle, il est clair que le problème se réduit à faire l'angle DAK = CDA. On mesure l'angle CAD sous lequel la droite CD est vue par l'observateur placé en A : on choisit, un peu loin de ce point, un autre point B duquel CD apparaisse sous le même angle, et l'on y parvient par tâtonnement. A,B,C,D supposés dans un même plan, seront situés sur une même circonférence, et l'on aura CBA = CDA. Si donc on fait en A, avec AD, un angle égal à ABC, le second côté AK de cet angle sera la droite demandée.

138. Les obstacles qui empêchent de prolonger une ligne ou de mesurer une distance peuvent se présenter de diverses manières et donnent lieu à différentes solutions dont nous allons passer quelques-unes en revue.

1° Trouver les projections des points B et B′ situés sur le prolongement de AA′ et au delà d'un obstacle (*fig.* 90). On choisit un point G duquel on puisse voir A,A′, B et B′ : on mène les alignements GA,GA′,GB,GB′. Par un point C quelconque pris sur l'un d'eux, on trace, par l'un des moyens connus, CF parallèle à AB, et de simples proportions déterminent les distances des points BB′ et permettent ainsi de tracer leurs projections.

139. 2° Trouver la projection de F (*fig.* 91), que l'on sait être sur le prolongement de AB. On peut choisir un point B, duquel soit visible F et tel qu'on le voie aussi de O milieu de BB′. Par D pris arbitrairement sur AB, on mène une parallèle DD′ à BB′, on cherche le point de rencontre O′ de cette ligne et de OF prolongé, puis faisant O′D = O′D′, on trace sur le papier les lignes indéfinies OO′ et B′D′ qui rencontrent le prolongement de AB précisément en la projection de F. Par ce moyen, on a trouvé en même temps la distance de ce point supposé inaccessible. On aurait encore pu, sans mener DD′ parallèle à BB′, marquer par un jalon le point *c* intersection de B′D et OF, puis mesurer CB,

CB′,CD et porter CD′ quatrième proportionnelle à ces trois lignes.

140. 3° S'il s'agit de déterminer sur le terrain un point F sur le prolongement de AB (*fig.* 92), on peut encore procéder ainsi qu'il suit : on prend une base AC, on abaisse BA′ sur AC et sous un angle quelconque ; on lui mène une parallèle DE à une distance convenable pour qu'elle ne rencontre pas l'obstacle. Enfin, on marque, au moyen d'un jalon, E rencontre de BC et DE. Les triangles semblables ABA′,AFD donnent $FD = \frac{AD.A'B}{AA'}$, et ces trois lignes pouvant être mesurées immédiatement, le problème est résolu.

141. *Deux points accessibles étant connus de position et situés sur un terrain découvert, déterminer, au moyen de la chaîne, la position d'un troisième point inaccessible.*

1° Soient A et B les points donnés, on jalonne les directions AC,BC sur lesquelles on marque deux points A′,B′, puis on mesure AB,AA′,AB′,A′B,BB′ et l'on construit sur le papier les deux triangles *aa′b*,*abb′* semblables à ceux du terrain. On prolonge *aa′* et *bb′* et le point de rencontre *c* est la projection de C.

2° Si un obstacle, comme l'indique la figure 94, s'opposait à ce qu'on marchât de A en B et de B en A, on construirait les deux triangles AA′A″,BB′B″, on en mesurerait les côtés, puis on les construirait sur le papier ;

3° Si A et B étaient situés sur les deux bords d'un fleuve (*fig.* 95), de manière à ce qu'on ne pût avancer de A en B et en C, ni de B vers A et C, on construirait les triangles AA′A″,BB′B″, sur les prolongements des côtés du triangle ABC ;

4° Supposons que A et B soient séparés par un obstacle et que du premier seulement on puisse voir C. On prend sur l'alignement AC un point C′ visible de B : sur BC, on marque un point D et l'on prolonge C′D jusqu'en B′. On mesure AC′,BC′,BD et BB′. Par C′, on imagine la droite C′A′ parallèle à CD : cela posé, des deux triangles semblables BC′A′,BDB′, on tire BD : BB′ :: BC′ : BA′. Cette proportion donnant BA′ en fonction de quantités connues, on en déduit AA′ qui est la différence de AB à A′B ; puis comparant AC′A′ et ACB′, on trouve :

$$AA' : AC' :: AB' : AC \quad \text{d'où enfin} \quad AC = \frac{AC'.AB'}{AA'}$$

5° Si l'un des deux points, A par exemple (*fig.* 97), est inaccessible, on peut mesurer BB′ sur AB; prolonger CB′ jusqu'en D, qui, avec B et B′ forment un triangle convenable. On mesure BD et B′D pour construire le triangle sur le papier et l'on prolonge BD jusqu'en C′ sur le prolongement de AC. En mesurant BC′, on pourra construire la projection de C : elle sera le point d'intersection de *ac′* et de *b′d* ;

6° On pourrait encore, comme dans la figure 98, mesurer AA′ sur l'alignement AC; joindre et mesurer A′B, et construire sur le papier le triangle AA′B, puis prolonger les lignes AB et A′B jusqu'en B′ et D; mesurer BB′, B′D et BD; et enfin construire le triangle BB′D. La projection de *c* de C serait à l'intersection de AA′, B′D prolongées.

142. *Trouver, avec la chaîne seulement, l'aire d'un polygone quelconque.*

Il suffira de mesurer les côtés et les angles, en construisant pour chacun d'eux un triangle au moyen de ses trois côtés. Si le polygone est intérieurement inaccessible, les angles saillants se construiront par des triangles formés sur les prolongements des côtés comme en A (*fig.* 99). Si, au contraire, on ne peut opérer que dans l'intérieur, on agira pour les angles rentrants comme en B (*même figure*).

143. *Mener sur le terrain une perpendiculaire à l'extrémité d'une droite* AB *sans la prolonger.*

On choisit dans l'intérieur de l'angle que l'on veut construire un point C. De ce point, on tend un cordeau de la longueur AC, de telle sorte que son extrémité D tombe sur A (*fig.* 101). On prolonge CD au moyen de jalons; on porte EC = CD et le point E appartient à la perpendiculaire AE cherchée. On voit qu'il n'est plus question ici des propriétés des transversales; mais ce problème et ceux qui suivent pouvant trouver une application fréquente, et leurs solutions pouvant s'obtenir aussi sans le secours d'instruments, il nous a paru convenable d'en faire mention.

Le même problème se résout encore ainsi qu'il suit : on divise un cordeau en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 3, 5 et 4. On attache les deux extrémités en B (*fig.* 102) : on fait coïncider la partie qui contient trois divisions ou celle qui en contient quatre avec la base AB : puis l'on tend le cordeau de manière que les deux autres portions forment entre

elles un angle en E : ce point joint à B donne la perpendiculaire ; en effet, le triangle est rectangle en B, puisque le carré 25 du grand côté est égal à la somme 16 + 9 des carrés des côtés 3 et 4 de l'angle droit.

144. *Diviser une droite donnée en un certain nombre de par ties égales.*

Soit proposé de diviser AB (*fig.* 103). On mène à volonté les lignes indéfinies BD et AE par les points B et A. On les divise en un même nombre de parties égales et l'on joint les divisions correspondantes : il en résulte des droites parallèles à AD et BE qui partagent la ligne donnée de manière à satisfaire à la question proposée.

145. *Trouver la distance d'un point accessible à un point qui ne l'est pas.*

Première solution. Soit D le point que l'on peut aborder et DX (*fig.* 104) la distance que l'on veut connaître. Au point D, on élève par l'une des méthodes indiquées, DA perpendiculaire à DX et l'on marche sur cette direction jusqu'à ce que l'angle DAX = 50ᵍ : ce dont on est assuré, lorsqu'en élevant BC perpendiculaire à DA, on trouve BC = BA.

Deuxième solution. Par D, on mène AD formant un angle quelconque avec DX : on partage AD en deux parties égales : soit C le point milieu, on prolonge au moyen de jalons, la direction CX. En A, on trace AB parallèle à DX au moyen des triangles CDE, AFC, que l'on fait égaux en mesurant leurs trois côtés. La portion AB de cette parallèle terminée au prolongement de CX est égale à DX. Si, par une raison quelconque, on ne pouvait s'étendre autant que l'exige AB = DX, on prendrait C*a* et CD dans un certain rapport et *ab* serait dans le même rapport relativement à DX. Nous avons indiqué une méthode analogue lorsque nous avons parlé de l'équerre d'arpenteur.

Troisième solution. Au point D, on élève une perpendiculaire à DX (*fig.* 106). En un point A, dont on mesure la distance à D, on mène AX, puis AB perpendiculaire à AX. On mesure BD, et de la proportion BD : DA : : DA : DX, fournie par les deux triangles rectangles semblables BDA, DAX, on tire $DX = \frac{\overline{DA}^2}{BD}$.

146. *Faire un angle égal à un angle donné.*

Il suffit pour cela de former un triangle ABC (*fig.* 107) avec

les deux côtés de l'angle et une troisième ligne AB, de les mesurer tous trois, de porter sur une autre ligne l'une de ces trois longueurs et de décrire de ses extrémités avec des rayons égaux aux deux autres, des arcs de cercles qui se couperont au troisième sommet d'un triangle qui, ayant ses côtés égaux à ceux de ABC, aura ses angles égaux aux siens aussi.

147. *Mener une parallèle à une droite donnée.*

Déjà nous avons donné divers moyens de résoudre ce problème, soit à l'aide de l'équerre d'arpenteur, soit au moyen d'alignements seulement et en vertu des propriétés des transversales. Ici, nous allons indiquer comment, par les ombres, on peut satisfaire à cette question. Soit AB (*fig.* 108), la droite à laquelle on veut mener une parallèle par *a*. En A, on plante un jalon, on mesure la longueur de son ombre AD et deux lignes AC, DC. On se transporte en *a*, on y plante le même jalon ou un autre de même longueur, et sur son ombre *ad*, on construit le triangle *acd*, et *ac* est la parallèle cherchée.

148. *Déterminer la position de plusieurs points au moyen de la chaîne ou du cordeau.*

On mesure une base AB (*fig.* 109) : des extrémités comme centre, on décrit des arcs de cercle et l'on mesure les cordes CE, CF, CG, d'une part, et DJ, DI, DH de l'autre, qui aboutissent aux points d'intersections des arcs et des alignements dirigés sur les points M, N, O que l'on veut placer sur le plan.

149. *Diviser en angle deux parties égales.*

Si le sommet C (*fig.* 110) est accessible, de ce point on décrit un arc de cercle AB, on trace la corde et on la divise en deux : le point milieu D uni au sommet divise l'angle, ainsi qu'on le voulait.

Si le sommet est supposé inaccessible, on trace une ligne BA quelconque. Dans le triangle ABC (*fig.* 111), on a $CBA + CAB = 200 - ACB$, et si le triangle isocèle CBE était construit, on aurait $CBE + CEB = 200 - BCA$: d'ailleurs $CBE = CEB$, donc $CBE = \frac{CBA + CAB}{2}$. Construisant donc cet angle en B et traçant la ligne BE, son point milieu D appartiendra, comme ci-dessus, à la ligne qui divise l'angle en deux parties égales.

Supposons actuellement que l'on ne puisse pas pénétrer dans l'intérieur de l'angle ACB (*fig.* 112), mais qu'il soit extérieurement accessible : ce sera, si l'on veut, le saillant d'un bastion. Il

s'agit de construire CD' prolongement de CD qui divise l'angle en deux parties égales. On élève CE perpendiculaire à l'une des faces AC et l'on marche sur cette direction jusqu'à ce que l'angle AEC soit de 50^g, auquel cas CE = AC, puis on fait l'angle AEF = 100^g, et l'on a alors FC = AC. On se transporte en F et l'on a, par alignement, la droite FB. Elle est parallèle à la droite cherchée, et ainsi le problème est ramené à faire passer par C une parallèle CD' à une ligne connue BF. En effet, C et D étant les milieux de FA et AB, les triangles ACB,ABF sont semblables et BF est parallèle à CD.

150. *Trouver la hauteur d'un édifice.*

Quand le pied est accessible, on peut, au moyen d'une équerre DEF (*fig.* 113), ou de trois morceaux de bois formant un triangle rectangle, résoudre le problème. Pour cela, on s'éloigne de l'édifice jusqu'au point où l'un des côtés DF de l'angle droit étant dans une position horizontale, le rayon visuel dirigé suivant l'hypoténuse DE aille passer par le sommet de l'édifice AB. On mesure alors la base DG qui est à la hauteur AG dans le même rapport que les deux côtés DF,EF de l'équerre : on ajoute à AG ainsi trouvé la hauteur DH ou BG et l'on a la hauteur totale.

On peut encore y arriver au moyen d'un jalon DE (*fig.* 114) ; on le plante en terre, puis on cherche la position C où doit être placé l'œil de l'observateur pour que C,D et A soient en ligne droite. Une simple proportion entre les quantités CE,CB,DE et l'inconnue AB détermine cette dernière.

La comparaison des longueurs de l'ombre de l'édifice et de celle d'un jalon dont on connalt la hauteur donne également la solution du problème.

Si enfin, armé d'une équerre CEF (*fig.* 115), on se place à la distance nécessaire pour que l'œil, en C, voie le sommet A suivant l'un des côtés de l'angle droit et le pied B sur le prolongement de l'autre, on connaltra encore, en mesurant la distance CD et la hauteur BD à laquelle se trouve l'œil, la hauteur cherchée AB, qui sera exprimée par $\frac{\overline{CD}^2}{DB} + BD$ ou $\frac{\overline{CD}^2 + \overline{BD}^2}{BD}$.

Dans le cas où le pied de l'objet AB (*fig.* 116) est inaccessible, on choisit et l'on trouve par tâtonnement une base CD satisfaisant à la condition que les deux angles ACD,CDA soient chacun de $66^g.66$ ou le tiers de deux angles droits.

Alors le triangle ACD est équilatéral, de sorte qu'en mesurant

la base, on a précisément la distance AD. Si, ensuite, on mesure DF et la portion FE d'un jalon FL placé en avant de l'œil supposé en D et aboutissant à l'horizontale DG, on trouvera AG au moyen de la proportion DF : FE :: AD : AG, d'où enfin $AB = AG + GB = AG + DK$.

Il est à remarquer que l'angle $66^g.66$ est très-facile à obtenir en construisant un triangle avec trois règles d'égales longueurs.

Si l'on avait en même temps satisfait à cette seconde condition que $ADG = 50^g$, on aurait évité la proportion, car le triangle rectangle ADG eût été isocèle et aurait donné $\overline{AD}^2 = 2\overline{AG}^2$ ou $AG = \frac{AD}{\sqrt{2}}$. Ce problème pourrait être résolu plus facilement si l'on avait à sa disposition une équerre à miroir dont nous parlerons plus tard.

CHAPITRE VII.

INSTRUMENTS A RÉFLEXION.

151. Outre les instruments que nous avons décrits, il en existe encore d'autres propres à la mesure des angles et des distances. Ce sont ceux dans la construction desquels entrent un ou deux miroirs. Ils sont fondés sur une propriété de la lumière dont voici l'énoncé : *si un rayon lumineux rencontre une surface réfléchissante, l'angle qu'il forme avec la normale à la surface est égal à celui formé par sa réflexion et cette même normale*, et de plus les deux rayons sont dans le même plan normal. Cette propriété s'énonce d'une manière plus concise en disant que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. L'expérience qui confirme ce fait est décrite au livre IV, § 287.

Cela posé, supposons deux miroirs CM, CN (*fig.* 117), formant entre eux un angle x et un rayon lumineux SA situé dans le plan perpendiculaire aux deux miroirs, qui vient frapper l'un d'eux en A. Il se réfléchira, en restant toujours dans ce plan, de telle sorte que les angles SAN, CAB, compléments des angles égaux d'incidence et de réflexion seront égaux. Désignons-les par α : le rayon réfléchi AB devenant incident pour le second miroir CM, prendra la nouvelle direction BO, et les angles ABC, OBM ou β seront encore égaux. Il résultera de ceci que l'angle SOB ou y que forment l'incidence et la seconde réflexion sera double de l'angle x des deux miroirs. En effet, y extérieur au triangle ABO équivaut à $A + B$,

c'est-à-dire que $y = 400 - 2\ (\alpha + \beta)$. Dans le triangle ABC, on sait que $C = 200 - (A + B)$ ou $x = 200 - (\alpha + \beta)$: donc $y = 2x$.

Si l'inclinaison des miroirs et la direction du rayon lumineux modifiaient la figure pour la rendre telle que la figure 118, on remarquerait que dans ABO, on a $O = 200 - (OAB + ABO)$, mais $OAB = OAC + \alpha$: d'ailleurs, $OAC = SAF$ ou α comme angles opposés au sommet ; donc $O = 200 - (200 \quad 2\beta) - 2\alpha$, ou $y = 2\ (\beta - \alpha)$. Puis on aurait, au moyen du triangle ABC, $C = 200 - CAB - CBA$, ce qui revient à $x = 200 - 200 + \beta - \alpha = \beta - \alpha$; donc il devient encore évident que $y = 2x$.

152. Nous allons voir maintenant l'application de ce théorème aux instruments à réflexion. Soit MM' (*fig.* 119) un miroir frappé en A par un rayon lumineux venant d'un objet D : ce rayon se réfléchira, et les angles DAN, BAN formés avec la normale seront égaux. Si un second miroir PQ est perpendiculaire à AB, il renverra le rayon lumineux suivant la direction qu'il suivait avant de l'atteindre : l'angle BAD sera donc ce que tout à l'heure nous désignions par y et l'angle des deux miroirs en sera évidemment la moitié, puisqu'il est égal à celui BAN des normales à leurs surfaces. Si maintenant nous nous imaginons l'œil placé vers A, un second objet G situé sur le prolongement de AB, et le miroir PQ étamé seulement dans sa partie inférieure, il arrivera que l'œil recevra simultanément deux impressions ; il apercevra G directement et D par l'effet de la seule réflexion. Si donc on parvient à estimer l'angle des miroirs, celui des deux objets sera connu.

Il en serait encore de même si le rayon AB n'était pas perpendiculaire au second miroir PQ. Dans tous les cas, il suffira que la deuxième réflexion du premier objet se confonde avec le rayon direct venu du second, pour être en droit de dire que l'angle des deux miroirs est la moitié de l'angle formé par le premier rayon incident (venu directement du premier objet) et la seconde réflexion (ou le rayon venu directement du deuxième objet, puisqu'on a établi la coïncidence de ces deux derniers).

Les instruments fondés sur ce principe ont le grand avantage de ne pas exiger de support fixe.

153. *Sextant graphique.* Ce qui précède suffit pour faire comprendre la construction et l'usage de cet instrument qui donne le moyen de rapporter sur le papier les angles visés sans en faire connaître l'amplitude. Soient trois règles AB, AC, BC (*fig.* 120), assemblées par trois pivots A, B, C. Les deux dernières sont de



même longueur. Dans la première est pratiquée une rainure où glisse la goupille B, de sorte qu'en faisant varier l'angle A, le triangle change de forme sans cesser d'être isocèle. Au point A est fixé un miroir M qui reste toujours perpendiculaire à AB; un second miroir N, dont la moitié supérieure est sans tain, est établi perpendiculairement sur AC. L'angle BAC est évidemment égal à celui des miroirs. Il suit de là que si, plaçant la règle AC dans la direction d'un objet G, on fait varier l'angle A jusqu'à ce que le miroir M réfléchisse l'image d'un corps D suivant AC, le miroir N renverra cette image vers l'œil placé en A, et, d'après ce que nous avons vu, l'angle BAC sera moitié de DAG; mais NCB = CBA + BAC; d'ailleurs BAC = CBA, puisque le triangle est isocèle, donc enfin NCB est égal à l'angle que forment les rayons visuels dirigés sur les deux objets. Pour le rapporter sur le papier, on place l'une des règles CN ou CB sur celle des deux directions qui est donnée sur le papier, et l'autre règle sert à tracer la seconde.

Pour la facilité de l'explication, nous avons supposé les deux miroirs perpendiculaires aux deux règles AB, AC, mais cela n'est pas indispensable; il suffit, en effet, en vertu du principe fondamental, qu'ils soient inclinés du même angle et dans le même sens, sur ces règles. Il ne faut pourtant pas s'éloigner sensiblement de cette perpendicularité, afin que les rayons réfléchis viennent rencontrer la pupille située vers le point A, car le faisceau de ces rayons n'a qu'une petite amplitude. Il ne faut pas croire que le déplacement de l'œil dans les environs du point A soit une cause sensible d'erreur; l'effet des deux miroirs, quand ils sont dans une direction convenable, est de transporter l'image de D sur la ligne AN, à une distance à peu près égale à celle où ce point se trouve de l'observateur. Cette image D' et le point G sont donc situés tous deux sur AN, mais à des distances très grandes, généralement différentes l'une de l'autre. Un petit déplacement de l'œil hors de la ligne qui les contient ne produira donc pas d'effet appréciable, et ils sembleront toujours superposés. Aussi la position de l'œil n'est-elle déterminée que par la condition de se trouver sur le parcours du petit faisceau réfléchi.

Nous venons de voir qu'il faut que les miroirs fassent le même angle avec les deux règles qui les supportent; il faut de plus qu'ils soient perpendiculaires au plan de ces règles. Le principe fondamental a été établi, en effet, pour le plan, normal à la fois aux deux miroirs.

Le sextant graphique n'a pas ce qu'il faut pour effectuer cette seconde vérification, qu'on exécuterait comme il sera indiqué au paragraphe suivant relatif au sextant gradué. L'instrument qui nous occupe actuellement est d'une exactitude assez médiocre pour que l'on puisse se dispenser de faire cette vérification. Si la condition qu'elle exige n'est pas satisfaite exactement, les angles seront mesurés dans un plan autre que celui des objets, et la différence sera petite, si on ne s'est pas écarté sensiblement de cette perpendicularité.

Quant à la première vérification, qui consiste à s'assurer de l'égalité des angles formés par les miroirs et par les règles, elle est beaucoup plus importante, en ce sens qu'une erreur commise sur cette égalité d'inclinaison se transportera non-seulement en vraie grandeur, mais en se doublant, sur la mesure de l'angle. On effectue cette vérification très-simplement, en s'assurant que la condition qu'elle exige est satisfaite dans un cas particulier, celui où l'angle à mesurer est nul. On met alors les deux règles AB et AC en coïncidence ; l'angle donné par l'instrument est nul ; il devra en être de même de celui de la nature, c'est-à-dire, qu'on devra apercevoir l'image directe d'un point quelconque se confondant avec la seconde réflexion du même point.

154. *Sextant gradué.* Plus généralement on a besoin de connaître l'amplitude des angles que l'on observe. Pour y arriver, on se sert d'un instrument qui diffère du précédent en ce que le miroir M (*fig.* 121) est fixé sur une alidade AC et au centre d'un arc de cercle gradué. Le miroir N à moitié étamé est adhérent à cet arc qui embrasse ordinairement le sixième de la circonférence et qui, par conséquent, permet d'observer un angle dont l'ouverture est le tiers de 400^g ; de là lui vient le nom de sextant. D'autres, qui n'ont que le huitième de la circonférence, sont désignés sous le nom d'octants. Une lunette OP, dont l'axe est parallèle au plan du limbe, est dirigée en face du miroir N sans être normale à sa surface. Enfin l'origine des divisions où le zéro est situé en A a l'extrémité du diamètre parallèle au miroir N. Dans cet état de choses, il est évident que l'instrument remplira le but qu'on s'est proposé d'atteindre. En effet, si nous supposons les miroirs dans ce premier état de parallélisme, et si par la lunette OP on aperçoit un objet G, on verra en même temps son image superposée sur lui-même par l'effet du miroir M : car, en raison de ce que CO est très-petit par rapport à la distance de l'observateur

au point G, les deux rayons GC, GO qui arrivent directement, peuvent être considérés comme parallèles. On peut dire, au surplus, qu'en raison du principe démontré (§ 151), l'angle formé par l'incidence et la deuxième réflexion étant double de l'angle des deux miroirs, si celui-ci est nul, l'autre l'est aussi. L'œil voit donc simultanément, dans ce cas, l'objet directement par la partie non étamée du miroir N, et par le fait de la double réflexion.

Cela posé, il n'est pas moins évident qu'en faisant mouvoir le grand miroir, jusqu'à ce que ce soit la deuxième réflexion d'un autre objet D qui se confonde avec la direction GO, l'angle des deux miroirs sera bien la moitié de celui que forment les lignes CD, CG. Soient LC, L'C la normale au grand miroir, dans ses deux positions CM, CM' :

$$\text{on aura} \quad NCL = \tfrac{1}{2}\,NCG', \quad NCL' = \tfrac{1}{2}\,NCD, \qquad \text{d'où} \quad LCL' = \tfrac{1}{2}\,GCD$$

L'angle LCL' est égal à MCM' : donc enfin l'angle apprécié par le vernier A est la moitié de l'angle cherché, ou plutôt il est cet angle lui-même, lorsque, pour éviter les chances d'erreur, on donne aux graduations du limbe une numérotation double.

Il y a cependant à faire remarquer que cette lecture n'est exacte qu'autant que les points sont assez éloignés pour que l'on puisse regarder comme parallèles ou sensiblement parallèles les rayons qui, partant de l'un quelconque d'entre eux, viennent frapper les deux miroirs.

Si ce point, G par exemple, est trop rapproché, les deux rayons forment un certain angle α (*planche* XIX, *fig.* 7), et les miroirs ne sont plus parallèles, lorsque l'œil voit les deux objets superposés. Il y aurait donc, en cette circonstance, une correction à faire à la lecture, et cette correction, il faut en savoir apprécier l'importance, afin de connaître exactement dans quelles limites on doit la faire ou s'en dispenser.

C*g* étant parallèle à NG, on a

$$GNC + NCG + GCg = 200^g \quad \text{ou} \quad GNC + NCG = 200 - \alpha.$$

Le triangle GNC fournit la proportion

$$\sin.G : \sin.GCN :: NC : NG$$

de laquelle on tire $\frac{NC}{NG} = \frac{\sin.G}{\sin.GCN}$

Désignons par D et *d* les deux distances NG et NC dont la dernière est sensiblement constante, quels que soient les points C et N

frappés par le rayon réfléchi, à cause des petites dimensions des miroirs ; désignons également par β l'angle des deux rayons réfléchis, sur le miroir N, ou l'inclinaison sur ce miroir, du rayon direct.

L'équation précédente donnera, en confondant sin. α et α toujours très-petits

$$\alpha = \frac{\sin.(200 - \alpha - 2\beta) - d}{D} = \frac{d}{D}\sin.(\alpha + 2\beta) = \frac{d}{D}(\sin.\alpha\cos.2\beta +$$

$$\cos.\alpha\sin.2\beta) = \frac{d}{D}(\alpha\cos.2\beta + \sin.2\beta)$$

d'où $$\alpha = \frac{\frac{d}{D}\sin.2\beta}{1 - \frac{d}{D}\cos.2\beta} = \frac{d}{D}\sin.2\beta\left(1 + \frac{d}{D}\cos.2\beta\right) = \frac{d}{D}\sin.2\beta$$

en négligeant la deuxième puissance du rapport toujours très-petit $\frac{d}{D}$. Le maximum d'erreur α répondra au cas $\beta = 50^g$ (pour la même valeur de $\frac{d}{D}$) et son maximum à $\beta = o$ ou $\beta = 100^g$. Remarquons que ces deux dernières limites favorables ne pourraient pas être atteintes, sans faire coïncider les deux miroirs pour le premier cas, et jamais pour le second, car l'un des miroirs cacherait l'autre.

Dans les sextants gradués, l'angle β a une valeur de $66^g 66$; l'erreur correspondante sera plus petite que celle qui résulterait de l'hypothèse $\beta = 50^g$, erreur dont la valeur serait $\frac{d}{D}$. Voyons quelle devrait être la valeur de D pour qu'en raison de d qui est d'environ 0^m05, l'erreur angulaire restât en dessous d'une limite donnée, $10''$ par exemple. En désignant cette erreur par e

$$e < \frac{d}{D}, \; D < \frac{d}{e} = \frac{0^m.05}{10''} = \frac{0^m,05}{0,0000157} = 300^m \text{ environ.}$$

L'erreur angulaire produite sera donc plus petite que 10 secondes, tant que le côté sera $> 300^m$, et par suite négligeable, quel que soit le degré d'approximation exigée, lorsque la distance deviendra considérable.

155. *Vérifications et rectifications du sextant.* Pour que l'instrument soit réglé, il faut :

1° Que le zéro du vernier de l'alidade coïncide avec celui du limbe, quand les deux miroirs sont parallèles ; 2° que les plans des miroirs soient perpendiculaires à celui du limbe.

Nous avons vu plus haut comment on peut s'assurer que la première condition est remplie.

Quant à la seconde, elle exige l'emploi de deux cubes viseurs. On s'assure d'abord que le plan de l'un des miroirs est perpendiculaire au limbe en plaçant les deux viseurs A et B (*fig.* 123) sur le limbe, et tournant le miroir CM de manière que l'œil en O aperçoive directement une arête de B, et l'une de celles de A par réflexion, toutes deux se confondant avec le bord M du miroir. Si celui-ci n'est pas normal au limbe, l'arête réfléchie paraîtra inclinée et n'aura qu'un point de commun avec celle de B. On modifie la position du miroir au moyen des vis qui les fixent à l'alidade, jusqu'à ce que l'on ait atteint la coïncidence parfaite. Il reste à rendre le second miroir parallèle au premier. Cette condition est remplie quand les deux images, l'une directe, l'autre réfléchie, se superposent entièrement. S'ils avaient seulement leurs traces parallèles, les deux images seraient situées l'une au-dessus de l'autre.

Il est bon que l'axe de figure de la lunette soit parallèle, ou à peu près, au plan du limbe, afin que les rayons réfléchis, qui sont parallèles à ce plan, ne soient pas éteints par les parois intérieures de l'enveloppe de cette lunette. Enfin, pour régler la clarté relative des deux images, la lunette doit pouvoir se rapprocher ou s'éloigner du limbe; en effet, trop écartée du limbe, elle ne recevrait que les rayons directs, trop rapprochée, elle ne recevrait que les rayons réfléchis.

Nous terminerons ce qui est relatif au sextant gradué en faisant observer que, comme le précédent, du reste, il peut donner les angles à l'horizon au lieu des angles dans le plan des objets. Il suffira de mettre le limbe horizontal et d'amener les deux miroirs, alors verticaux, dans la position qui fait confondre les images, non plus des deux points, mais des verticales de ces points; ce dont on sera assuré quand les deux points paraîtront sur la même verticale Il faudra, pour cela, qu'une perpendiculaire au limbe ait été tracée sur le miroir à moitié étamé, dans ceux de ces instruments qui ne sont pas munis de lunette, et dans le cas contraire, qu'un fil soit tendu verticalement au foyer de l'oculaire.

156. *Sextant à un seul miroir.* Un grand inconvénient des instruments que nous venons de décrire est la perte considérable de lumière due à la double réflexion : il est tel que, dans quelques-

uns, à moins d'une grande habitude, on n'opère qu'avec fatigue et difficulté, tant est faible l'une des deux images quand elles se superposent. Pour y obvier, le capitaine Hanus, ancien professeur d'art militaire à l'École d'application d'état-major, a conçu l'heureuse idée d'un sextant à un seul miroir.

Supposons un miroir MN (*fig.* 124), placé sur une règle OG et pouvant pivoter autour d'un axe projeté en C. Lorsqu'il est perpendiculaire à la ligne OG, il réfléchit le point O, et s'il n'est étamé que de M en C, l'œil placé en arrière de O apercevra directement le point G. Si nous supposons actuellement que l'on veuille avoir l'angle entre D et G, il faut que le miroir prenne la position M N′ qui partage en deux parties égales l'angle cherché. En effet, les angles GCN′, M′CO sont égaux comme opposés par le sommet; les angles GCN′, DCN′ étant aussi égaux, il s'ensuit que M′CO, DCN′ le sont : donc le rayon qui arrivera de D en C se réfléchira suivant CO, et l'œil apercevra l'image de D et le point G superposés. L'angle que forment la première et la seconde position du miroir est complétement de M′CO ou de la moitié de l'angle des deux objets. En le doublant, on aura le supplément de cet angle.

Pour compléter la description de l'instrument, plaçons le miroir MN (*fig.* 125) sur une règle MNPQ. Du point C, comme centre, on décrit un arc AB du tiers, si l'on veut, de la circonférence. Cet arc est divisé de telle sorte que lorsque le miroir, dans son mouvement autour du pivot C, entraîne un arc concentrique au premier, on peut estimer l'angle parcouru par le miroir. L'arc intérieur porte un index qui correspond au zéro, quand MN est perpendiculaire à OC. De 5 en 5, les divisions sont marquées 10, 20, 30, etc., de manière qu'on lit de suite le nombre qu'il faut retrancher de 200ᵍ pour avoir l'angle. Il est plus simple et plus sûr d'écrire 200, 190, 180, etc., au lieu de 0, 10, 20, etc. : cela évite des soustractions qui peuvent occasionner des erreurs.

Pour opérer, on place l'œil derrière la visière fixe O et l'on fait tourner le miroir jusqu'à ce qu'on aperçoive l'image directe d'un des objets et la réflexion de l'autre, superposées l'une à l'autre et à la ligne de séparation des deux parties étamée et non étamée du miroir, ligne qui passe par le centre du limbe graduée et est tracée perpendiculairement à la règle.

En théorie, cet instrument donnerait les angles aussi petits qu'ils fussent; mais, dans la pratique, l'épaisseur du miroir et du cadre métallique qui la maintient, devient un obstacle à l'ob-



servation, quand le miroir vient à former un angle trop aigu avec l'axe OC. Il est facile de parer à cet inconvénient en observant les angles que forment les deux objets avec un troisième placé convenablement.

157. *Boussole à réflexion.* Le principe sur lequel est fondée la boussole, combiné avec celui de la réflexion produite par un miroir, a permis de construire une boussole qui jouit, comme les sextants, du précieux avantage de ne pas exiger un support fixe. Par cette raison, elle est préférable à la boussole ordinaire, dans certaines circonstances, telles que les levées expédiées, les reconnaissances militaires, etc.

Cet instrument se compose d'une boîte cylindrique ABDE (*fig.* 126), au centre de laquelle est élevé un pivot C. Sur ce pivot se meut librement une aiguille aimantée portant un limbe très-léger, concentrique à la boîte et gradué. En P et O sont élevées deux pinnules : la première est percée d'une fente longitudinale très-étroite ; l'autre d'un très-petit trou faisant fonction d'oculaire. Par ce trou, l'œil peut apercevoir directement, à travers la pinnule P, l'objet dont on cherche la direction, et en même temps, la division du limbe qui se trouve en cet instant directement et verticalement placée sous un miroir M. Celui-ci, incliné à 50^g, aboutit à l'oculaire O et renvoie ainsi horizontalement l'image de la division. Les chiffres sont renversés pour être vus droits dans le miroir. Le zéro se trouvant à l'extrémité sud de l'aiguille, on comprend que le chiffre que l'on aperçoit en M est bien effectivement l'expression de l'angle SCO ou PCN que forment la direction dans laquelle on a visé et le méridien magnétique.

On a substitué depuis quelques années un prisme lenticulaire au miroir. Ce prisme est composé d'une face plane inclinée à 50^g qui réfléchit les divisions, et de deux segments sphériques qui les grossissent en faisant fonction de loupe, comme on le verra au livre IV.

Boussole de Burnier. M. le lieutenant-colonel d'artillerie Burnier a modifié avantageusement cet instrument en supprimant le miroir qui atténue toujours un peu la lumière.

Dans une boîte ABDE (*fig.* 127), cylindrique intérieurement et elliptique au dehors, il a placé le pivot et l'aiguille. Celle-ci, au lieu d'un limbe, supporte un cylindre creux extrêmement mince et d'une hauteur suffisante seulement à l'inscription des

divisions et des chiffres. Dans l'épaisseur de la boîte et suivant le grand axe de l'ellipse, est pratiquée une ouverture cylindrique OE garnie d'une loupe O dont le but est de rendre plus visible la division qui se trouve vis-à-vis. Un arc elliptique AMB, qui jouit de la faculté de pivoter autour de A et B, afin de pouvoir se confondre avec le plan de la boîte ou lui être perpendiculaire, sert dans cette dernière position à tendre un crin fixé en O et en P. Quand le crin est ainsi tendu, il sert d'alidade. On tourne tout l'instrument jusqu'à ce que l'œil aperçoive, dans la direction OP, l'objet dont on cherche l'angle avec le méridien magnétique; puis, après quelques oscillations, l'aiguille s'arrête, et le chiffre qui se trouve en D est l'expression de l'arc SD, mesure de l'angle cherché. On conçoit qu'ici les chiffres sont gravés tels qu'on doit les voir, parce que l'image virtuelle produite par une loupe n'est pas renversée (livre IV, § 324).

158. *Boussole Hossard.* Cette nouvelle boussole, due à l'initiative de M. le lieutenant-colonel d'état-major Hossard, est d'un emploi très-commode. La figure 6, planche 19, en représente la projection horizontale et une coupe faite suivant le vertical *vv*.

L,L' est une boîte quadrangulaire renfermant un limbe fixe gradué comme ceux des boussoles ordinaires et d'un diamètre d'environ $0^{m},05$. Au centre de ce limbe se meut une aiguille aimantée.

Le couvercle de cette boîte *mcm'c'* se meut autour d'une charnière *cc* perpendiculaire au diamètre 0^{g}—200^{g} à l'extrémité duquel on a placé une tige *tt'* perpendiculaire au plan du limbe. Cette tige peut se rabattre horizontalement pour la facilité du transport.

Le couvercle porte intérieurement un miroir *mcmc,m'm'*, sur la face antérieure duquel on a tracé une ligne *ab,a'b'*, qui donnera une image *ab*αβ symétrique à la ligne elle-même, par rapport au plan du miroir. Supposons qu'on place l'œil en O,O', son image sera elle-même en ω,Ω dans le plan vertical du diamètre 0.200; les deux lignes *ab*, *a'b'* et *ab*,αβ, l'une réelle, l'autre virtuelle, déjà contenues dans ce même plan vertical, seront vues superposées. Le peu d'écartement de ces lignes, égal seulement au double de l'épaisseur de la glace, rendrait un peu indécise la position de l'œil répondant au plan vertical *vv* ou 0^{g}—200^{g}; mais la tige *t* placée de même dans ce plan donnera une image T,θ plus écartée, qui devra, pour l'œil convenablement placé, se superposer à *ab*, *a'b'* et *ab*,αβ.

Ce plan vertical 0.200 perpendiculaire au miroir remplace ici celui que décrit l'axe optique de la lunette dans les boussoles fixes; il sera incliné à l'ouest du méridien magnétique de l'angle marqué par l'aiguille de la boussole.

Pour amener ce plan à se confondre avec celui de la nature qui contient le point à viser, voici comment on opère : on place la boussole à peu près horizontalement dans le creux de la main en appuyant celle-ci contre l'estomac et en se tournant de manière à laisser à sa droite le point dont on s'occupe; on cherche pour l'œil la position répondant au vertical 0.200, comme nous l'avons indiqué plus haut, en ouvrant le couvercle convenablement pour apercevoir l'image de la tige. On tourne ensuite lentement tout le corps jusqu'à ce qu'on ait transporté le vertical 0.200 sur le vertical qui va passer par le point visé; cela a lieu lorsqu'on aperçoit simultanément et se confondant, la raie tracée sur le miroir, son image, ainsi que celles de la tige et du point visé. On lit alors le chiffre marqué par l'aiguille aimantée.

Cet instrument, comme les deux précédents, a besoin d'être réglé ainsi qu'il a été indiqué au § 112, avec cette modification que l'essai qu'il est prescrit de faire sur une ligne connue donnera, par la différence des lectures du limbe et du dessin, une erreur de collimation qu'il faudra constamment retrancher ou ajouter aux lectures subséquentes.

159. *Équerre à miroir.* Nous venons de trouver, dans les instruments à réflexion, les analogues de ceux que nous avions précédemment indiqués pour lever des plans.

Ainsi le sextant graphique, comme la planchette et l'alidade, donne le moyen de tracer un angle sans en connaître l'amplitude : le sextant gradué aussi bien que le graphomètre détermine l'angle entre deux objets : la boussole à réflexion et la boussole ordinaire mesurent l'angle que fait une direction avec le méridien. Il nous reste à décrire l'instrument à réflexion qui offre quelque analogie avec l'équerre d'arpenteur.

L'équerre à miroir se compose d'un parallélipipède creux en cuivre, dont ABCD (*fig.* 128) est la projection. Il a environ $0^m,1$ de longueur, et les faces extrêmes sont des carrés de $0^m,015$ ou $0^m,02$. Il renferme trois couples de miroirs et, dans chaque couple, l'un des miroirs est étamé dans la moitié de sa hauteur seulement. Les deux premiers, dont GH, IJ sont les traces, font entre eux un angle droit : la face antérieure BD est évidée de G en

K et de L en J. Si c'est le miroir GH qui est en partie transparent ; dans la face postérieure AC est aussi pratiquée une ouverture MN. Par suite de cette construction, et en vertu du théorème démontré, que l'angle des deux miroirs est la moitié de celui des directions de deux points, lorsque l'image réfléchie de l'un se superpose sur l'image directe de l'autre, il en résulte que si l'œil placé en O apercevait à la fois le point Q et l'image de P, l'observateur sera sur l'alignement de P et Q à HI près, et cette quantité est négligeable par rapport à PQ. Les couples des extrémités forment d'un côté un angle de 50^g, de l'autre un angle de 25^g, quelquefois de $33^g,33$ ou le tiers d'un angle droit. Ils donnent donc des angles de 100^g, 50^g ou $66^g,66$. Le raisonnement étant le même que pour le premier cas, nous terminerons ici ce qui regarde l'équerre à miroir, en faisant remarquer le double avantage qu'elle a sur l'équerre d'arpenteur d'être d'un très-petit volume et de ne pas déterminer seulement les directions rectangulaires. Il n'y a pas d'autre vérification à faire que de mesurer les mêmes angles avec cet instrument et avec quelque autre de la précision duquel on soit assuré.

160. Nous plaçons ici une suite de problèmes que l'on peut résoudre à l'aide de l'équerre à miroir et dont un sextant donnerait également la solution.

Trouver la distance du point où l'on se trouve à un point inaccessible X (fig. 129).

On élève AB perpendiculaire à AX : on cherche le point C duquel A et X sont vus sous un angle de 50^g et l'on mesure AC qui est égal à AX, puisque ACX est isocèle. Si quelque obstacle s'oppose à ce que l'on mesure AC, on élève en C, CG perpendiculaire sur CX : on prolonge cette droite jusqu'en G sur le prolongement de AX, puis on mesure AG qui est encore égal à AX. Si enfin l'on ne pouvait obtenir la longueur de AG, mais s'il était possible d'obtenir celle de CG, on aurait $AX=\frac{CG}{\sqrt{2}}$.

161. *Résolution du même problème dans le cas où l'on ne peut mesurer ni même se transporter qu'à une distance très-limitée à droite ou à gauche et en arrière du point où l'on est placé.*

Au point A, on élève AB (*fig.* 131) perpendiculaire sur AX : en B, l'on trace BC perpendiculairement à BX. On mesure avec soin AB et AC, puis on a AX au moyen de la proportion AC : AB :: AB : $AX=\frac{\overline{AB}^2}{AC}$. Ce procédé, rigoureusement exact en théorie,

n'est plus qu'approximatif lorsqu'on le met en pratique, parce que les moindres erreurs dans la mesure de AB et de AC en entraînent une assez notable sur AX. Il suffit néanmoins, en certaines circonstances, et notamment lorsqu'il doit faire connaître la distance d'une batterie à l'ouvrage contre lequel elle doit agir.

162. *Mener une horizontale par un point donné.*

Soit A (*fig.* 130), ce point. On plante en terre, dans une direction inclinée, un bâton BO, au sommet duquel on suspend un fil à plomb qui tombe sur A : on fait porter en avant une mire à coulisse MN. Au moyen des miroirs à 50^g de l'équerre, et l'œil étant placé en O, on vise directement le point A rendu bien visible par la présence sur le sol d'un corps AD, d'une couleur tranchant avec celle du terrain. Puis, la personne qui tient la mire en fait glisser le voyant M jusqu'à ce que l'observateur en aperçoive la réflexion. L'angle des miroirs étant de 50^g, AOM $=$ 100^g, et puisque AO est vertical, il s'ensuit que MO est horizontal. Si enfin de MN on retranche OA, on est assuré que le sommet P d'un jalon NP restant en N déterminera l'horizontale de A.

163. *Déterminer encore la distance AX en supposant qu'on ne puisse mesurer que sur une direction donnée BC, et que l'on n'aperçoive X ni de C, ni de D, pied de la perpendiculaire abaissée de X* (fig. 132), *sur BC.*

On cherche sur BC le point E pour lequel on a BEX $=$ 50^g. On prend également les points F et G où aboutissent les obliques venant de X et inclinées de 66^g,66 sur la base : on mesure EF, FG et l'on marque D, milieu de FG. Ce point sera évidemment le pied de la perpendiculaire. On a DX $=$ DE ; or AX $=$ $\sqrt{\overline{DX}^2+\overline{DA}^2}$, donc AX est connu.

164. *Trouver la distance qui sépare deux points inaccessibles X et Y* (fig. 133) : *puis, à un point déterminé du terrain, tracer une parallèle ou une perpendiculaire à cette droite.*

On choisit sur la partie accessible du terrain une droite MN au moyen de laquelle on puisse, par l'un des procédés indiqués, trouver les longueurs des perpendiculaires abaissées de X et Y : on prolonge la plus courte d'une quantité GD égale à la différence des deux, et la ligne FG est de même longueur que XY et de plus

lui est parallèle. La seconde partie indiquée dans l'énoncé a déjà été résolue, lorsqu'à l'occasion de l'équerre d'arpenteur nous avons donné une autre solution du même problème.

S'il arrivait que l'observateur pût se placer en un point du prolongement de XY, il y élèverait une perpendiculaire sur laquelle il opèrerait de manière à trouver les distances de X et Y au sommet de l'angle droit : la différence serait la longueur cherchée. Cette manière de procéder pourrait encore convenir à la circonstance que nous avons déjà indiquée, où X étant la position d'une batterie, Y serait l'ouvrage qu'elle doit battre.

165. *Trouver la hauteur d'un objet AB* (fig. 134), *placé sur un terrain incliné, en supposant que l'on puisse s'établir en un point C duquel les directions sur A et B font un angle de* 50^g.

Imaginons par le sommet A, une droite AD inclinée aussi de 50^g sur AC : elle complétera un triangle ACD rectangle en D et isocèle qui fournira $\overline{AD}^2 = \frac{\overline{AC}^2}{2}$ ou $AD = \frac{AC}{\sqrt{2}}$.

Puisque $CD = AD$, il s'ensuit que $BD = CD - CB = AD - BC$, et en élevant au carré $\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - 2AD.BC$ ou, en substituant à AD et $\overline{AD}^2$ leurs valeurs, $\overline{BD}^2 = \frac{\overline{AC}^2}{2} + \overline{BC}^2 - BC.AC\sqrt{2}$.

C'est AB que nous voulons obtenir en fonction de quantités connes. Or $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$. Introduisons-y les valeurs de AD et BD, il viendra alors

$$\overline{AB}^2 = \frac{\overline{AC}^2}{2} + \frac{\overline{AC}^2}{2} + \overline{BC}^2 - BC.\ AC\sqrt{2} = (AC - BC)^2 + BC.\ AC\,(2 - \sqrt{2})$$

ou

$$(AC + BC)^2 - BC.\ AC\,(2 + \sqrt{2}).$$

La hauteur AB sera donc connue lorsqu'on aura mesuré AC et BC par les méthodes indiquées. Si C était plus élevé que B, la perpendiculaire AD tomberait dans l'intérieur du triangle, on aurait $DB = BC - CD$ au lieu de $DB = CD - BC$, et la valeur de AB à laquelle on arriverait, serait toujours donnée par la même expression qne dans le premier cas.

Quand le terrain est horizontal, BD devient égal à zéro : $AB = AD = BC = BD - 2$.

$$AC = AB\sqrt{2} \text{ et } \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + BC - AC.\ BC\sqrt{2}$$

se réduit à

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \sqrt{2}\sqrt{2}\ AB.\ BC = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}^2$$

et enfin $\overline{2AB}^2 = \overline{AC}^2$, ce qui est conforme à ce que l'on connaît du triangle rectangle isocèle.

Si l'on ne peut se placer de manière à former l'angle de 50^g, on plante deux jalons CP et OK (*fig.* 134 *bis*), de manière que leurs extrémités supérieures C et O soient en ligne droite avec A. On mesure par l'un des moyens connus OC et OA, souvent même la première longeur OC peut être obtenue immédiatement. L'œil étant en O et visant B, on marque sur le jalon CP le point D qui se trouve dans la direction de BO ; puis, mesurant CD, on a AB au moyen de la proportion

$$OC : OA :: CD : AB = \frac{OA.\,CD}{OC}$$

166. *Passer d'une base trop petite à une autre qui soit double en longueur.*

Si les localités n'ont permis de mesurer que la base AB (*fig.* 135), on fait en A un angle de 66^g,66 et un angle droit en B : la rencontre des deux lignes AC et BC détermine un triangle dans lequel AC = 2AB. Pour le démontrer, prolongeons AB d'une quantité égale BA' et joignons A' à C. Les triangles ABC, A'BC seront égaux, ainsi A = A' et les deux angles contigus en C sont égaux aussi. Leur ensemble, qui forme l'angle total C, est donc les $\frac{2}{3}$ d'un angle droit. Il en résulte que le triangle ACA' est équilatéral ; que AC = AA' et qu'ainsi AB = $\frac{1}{2}$ AC. On a donc obtenu un côté double de celui mesuré.

Les solutions que nous venons de donner suffisent pour faire sentir de quelle utilité peut être l'équerre à miroir dans les circonstances où se trouve fréquemment un militaire ; obligé de tracer des directions ou de mesurer des distances, il ne peut avoir avec lui que les instruments les moins volumineux, les plus portatifs ; et, à ce titre, aucun n'est préférable à l'équerre à miroir.

167. La grande perte de temps qui résulte de l'emploi de la chaîne ou de celui de la stadia, pour la mesure des distances, a engagé plusieurs personnes à se livrer à la recherche d'autres instruments destinés au même objet, mais n'exigeant pas, comme les seuls qui soient connus jusqu'à présent, le parcours même

de ces distances. On atteindrait le but le plus utile à la topographie si l'on pouvait connaître la distance qui sépare un point de station d'un autre point, déterminé seulement par un objet de forme quelconque et non pas par une mire graduée comme l'exige l'emploi de la stadia, mire dont le transport au point à déterminer est obligatoire.

C'est en raison de l'importance du résultat qu'on a en vue, que nous allons expliquer les tentatives qui ont été faites à ce sujet, tentatives que quelque nouvel explorateur pourra peut-être faire fructifier.

On s'est appuyé dans ces essais sur les principes de la double réflexion exposés précédemment.

Le premier instrument proposé se compose d'une règle graduée MN (*fig.* 135 *ter*) : à l'une des extrémités M, est placée dans une direction qui lui est perpendiculaire, une lunette O, en face de laquelle un miroir M est fixé invariablement sur la règle avec laquelle il fait un angle de 50^g : il n'est étamé qu'en partie, de manière que la lunette puisse faire voir à l'observateur dont l'œil est en O, un objet, tel que A, situé en avant. Un second miroir N, entièrement étamé, est maintenu sur la règle par un coulisseau garni d'une vis de rappel destinée à lui imprimer les plus légers mouvements dans le sens de la règle. Quelle que soit son inclinaison sur elle, il est évident que, si elle est suffisamment longue, on trouvera toujours une position du miroir N, telle que le faisceau lumineux émanant de A qu'il réfléchira, se dirigera suivant NM, et viendra rencontrer le miroir M en sa partie étamée. Ce dernier, en vertu de la position qui lui a été assignée, renverra ce faisceau de M en O, de manière que l'observateur éprouvera la double sensation simultanée produite par l'objet A lui-même et par son image. A ce moment, il y aura entre les longueurs MN et MA un rapport qui sera constant, quel que soit l'éloignement d'un objet tel que A, en supposant toutefois que l'inclinaison du miroir sur la règle soit aussi constante.

Cherchons ce rapport. On a évidemment,

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{x}{s} \quad \text{et} \quad \alpha = 400^g - (200^g - 2n) = 2n - 400^g = -\text{cot.}\,2n$$

$$\text{tang.}\,2n = -\frac{s}{x}$$

En admettant que le miroir N soit toujours incliné sur MN, de l'angle n rigoureusement constant, x sera toujours proportionnel

à la distance à mesurer s, mais voyons quelle erreur entraînera une variation impossible à éviter, sur la valeur de cet angle. Supposons que l'instrument doive être gradué de manière à donner $\frac{s}{x}=1000$; alors, tang. $2n=-1000$. L'angle $2n$ doit donc être $>100^g$, d'une quantité que nous désignerons par v, et on pourra écrire

$$\text{tang.}\,2n=\text{tang.}(100^g+v)=-\text{cot.}\,v=-\frac{s}{x}=-1000.$$

En cherchant la valeur de v répondant à cot. $v=1000$, on trouve $v=0^g,0636'',6$; par conséquent,

$$2n=100^g,0637'' \qquad n=50^g,0318''$$

Pendant le mouvement du miroir N le long de la règle graduée, l'angle d'inclinaison ne pourra pas rester mathématiquement constant; voyons l'effet que produira une variation fort petite, 1' par exemple.

Désignons par x' la nouvelle longueur de la règle répondant à la même distance s, avec la nouvelle inclinaison $50^g,0318$, on aura

$$\text{tang.}(2n+2')=\text{tang.}\,100^g,0837=-\text{cot.}\,0,0837=\frac{x'}{s}$$

ce qui conduit à $$\frac{x'}{s}=\frac{1}{760,9}$$

en sorte que la lecture x' que l'on fera sur la règle, sans tenir compte de la variation angulaire, sera prise comme se rapportant à l'échelle de $\frac{1}{1000}$, tandis qu'elle devrait être comptée comme faite au $\frac{1}{761}$. Ainsi, par exemple, dans une telle circonstance, on estimerait $x=0^m,1$ comme répondant à une distance $s=100^m$, et la distance réelle ne serait pourtant que de $76^m,1$.

L'influence du déplacement serait plus considérable pour des échelles plus petites, et moindre pour des échelles plus grandes.

Comme notre supposition de 1' de dérangement dans l'inclinaison du miroir mobile, pendant le mouvement longitudinal de ce miroir est en deçà des limites possibles, il s'ensuit que l'on ne pourrait avoir aucune confiance dans les résultats obtenus.

Nous nous sommes occupé personnellement de la recherche d'un instrument du genre de celui dont nous venons de donner la description. Soient (*fig.* 7, pl. 19) M et N deux miroirs parallèles invariablement fixés, L une lunette armée d'un micromè-



tre, et placée vis-à-vis du miroir N étamé à moitié. Si dans la direction SL de l'axe optique de cette lunette, on place une série de points tels que S envoyant des rayons lumineux sur le miroir M, le lieu des images de ces points sera la ligne OS′ inclinée sur M du même angle *m* formé par ce miroir avec l'axe optique LS. Le point S, par exemple, sera remplacé par une image virtuelle S′ située également sur SS′ perpendiculaire à M. En vertu de l'existence du second miroir N, les rayons partis d'un point quelconque du premier lieu géométrique OS se réfléchiront de manière à former un second lieu géométrique O′S″ symétrique à O′S′ par rapport à N, et par suite parallèle à l'axe optique LS, et en définitive, il se formera, relativement au point S, une dernière image virtuelle S″ dont les rayons pénètreront dans la lunette. Celle-ci aura donc connaissance, simultanément, des deux points S et S′. Nous rentrons, dès lors, dans le cas d'une stadia à micromètre et à mire constante, sans avoir été obligé d'employer une mire effective.

Le point important à examiner est la grandeur de cette mire. Sans envisager la question de la manière la plus générale pour une inclinaison quelconque du miroir sur la ligne de visée, contentons-nous de dire que le cas le plus favorable, pour la disposition des miroirs, est celui où cette inclinaison sera de 50ᵍ. Pour cette circonstance particulière, la mire artificielle S*s* ou S″Σ (S*s*=S″Σ sont très-petits par rapport à LS) est égale à l'écartement E des deux miroirs, mesuré perpendiculairement à l'axe optique.

Malheureusement ces miroirs ne pourraient jamais être écartés considérablement. Ainsi, l'application du système à une planchette ne fournirait qu'une mire d'environ 0ᵐ,5.

Nous ne pouvons pas entrer ici dans des discussions de formules tendant à trouver les approximations possibles, aux diverses distances; nous dirons seulement qu'on pourrait arriver, peut-être, à mesurer une distance de 100ᵐ à un mètre près.

Cet instrument aurait sur le précédent l'avantage de la constance du parallélisme, tandis que dans l'autre on ne peut pas répondre de la constance de l'inclinaison. Ce parallélisme serait établi et vérifié aussi souvent qu'on le voudrait, en visant un objet très-éloigné qui devrait donner à peu de chose près la superposition des deux fils du micromètre.

Les deux instruments seraient sujets, également, à une cause d'erreur qui aurait, croyons-nous, une grave importance,

sur les résultats. Par suite même du but qu'on se propose d'atteindre, les objets à viser directement et par seconde réflexion (peu visibles dans tous les cas) seraient des points quelconques de la campagne, d'un mauvais pointé, et il serait, par conséquent, difficile d'amener la superposition des deux images avec le premier instrument, ou de mesurer leur distance par l'emploi du second.

CHAPITRE VIII.

ENSEMBLE DES DÉTAILS D'UNE LEVÉE, RELATIFS A LA PLANIMÉTRIE, EN COMBINANT TOUS LES PROCÉDÉS DÉCRITS ISOLÉMENT.

168. Nous avons passé en revue les différents instruments employés à la levée de détail : nous avons indiqué leur usage particulier, le degré de précision dont ils sont susceptibles, leurs vérifications et rectifications, ainsi que les problèmes particuliers les plus essentiels dont ils peuvent fournir la solution. Il reste maintenant, pour donner une idée nette de l'ensemble du travail, à indiquer l'esprit de méthode qui doit diriger depuis la formation du grand canevas jusqu'à l'expression des détails les plus minutieux. Si l'on avait plusieurs points déterminés dans la levée, il faudrait avant tout les vérifier : si quelques-uns d'entre eux ne s'accordaient pas avec les autres, on les rejetterait, et si enfin, il y avait trop d'incertitude, on n'en conserverait qu'un seul. Déjà, nous savons que la première opération à faire est une reconnaissance générale du terrain à lever, dans laquelle on signale tous les points qui doivent servir de sommets de triangles, et la base à mesurer, si le cas échoit. Nous ne répéterons pas ce que nous avons dit là-dessus, et nous supposerons les grands triangles construits sur le canevas, les points rapportés sur les feuilles de la levée, la méridienne tracée, et enfin les points assez rapprochés pour que les projections de leurs distances ne soient pas plus grandes que l'aiguille de la boussole.

Toutes les opérations préliminaires seront faites très-exactement avec une bonne planchette, lorsque l'étendue du terrain n'excèdera pas la limite indiquée des levées topographiques. On aura soin de s'orienter sur des points éloignés, et de déterminer des points rapprochés de la station.

Ce qui se fait quelquefois, mais n'est pas indispensable, c'est

de construire le canevas à part, afin de conserver propre le papier de la minute. Il faudra avoir soin encore, lorsque l'on rayonnera sur des objets non signalés, tels qu'arbres, cheminées, flèches de clochers, etc., de les dessiner légèrement sur le canevas, à l'extrémité des lignes tracées et hors du cadre, afin de soulager la mémoire.

On passe ensuite à l'exécution de la levée de détail, pour laquelle on peut employer quatre instruments différents, la planchette et l'alidade sans déclinatoire ou avec l'adjonction de ce dernier, le graphomètre et la boussole. Les deux premiers donnent immédiatement les angles tout tracés; les deux derniers exigent l'emploi d'un rapporteur qui cause une perte de temps et des erreurs provenant de la lecture et du rapport même de cette lecture déjà entachée d'erreurs. Le graphomètre et la planchette seule exigent la connaissance d'un point de plus que les deux autres. La combinaison de ces avantages et de ces inconvénients indique déjà que le graphomètre, qui ne possède que ces derniers, doit être abandonné toutes les fois qu'on en aura le choix. Il en sera de même de la planchette seule, si au désavantage d'exiger un point connu en plus, opposé pourtant à l'avantage provenant de l'absence de lecture, on ajoute l'inconvénient qu'elle présente au cheminement. Cette méthode d'opérer exigerait de la planchette une orientation déterminée par l'observation du dernier élément parcouru, élément toujours très-petit, et donnant par suite une orientation défectueuse. Il est bien vrai que les positions des points du cheminement seraient aussi mal déterminées par l'emploi de la boussole ou du déclinatoire, car les erreurs proviennent surtout du très-mauvais pointé qui résulte de l'emploi même du cheminement; les points visés ne sont, la plupart du temps, pas bien reconnaissables des deux stations consécutives. Mais nous savons que pour parer à cet inconvénient, il faut se recouper le plus souvent possible sur les points visibles du canevas. Là, apparaît l'avantage de la boussole ou du déclinatoire. En effet, la direction fournie par ce recoupement est indépendante de la mauvaise position du point de station et n'est entachée que de la légère erreur de lecture; pour la planchette, au contraire, cette direction sera une conséquence de l'orientation, et celle-ci sera basée sur le dernier élément du cheminement, élément souvent défectueux et que le recoupement a pour but de vérifier.

Il ne reste donc que deux instruments qui puissent être con-

venablement employés : la planchette et l'alidade avec adjonction du déclinatoire, et la bonssole ; ils donnent même approximation dans la lecture, variable sur la boussole, constante sur le déclinatoire, s'ils ont même rayon. Le premier donne immédiatement les angles sur le papier, mais il est assez lourd et d'un transport difficile, et de plus il ne permet pas l'exécution, quelquefois utile, d'un levé par croquis. La boussole exige l'emploi du rapporteur, mais elle est plus légère que la planchette et elle permet le travail par croquis.

Il nous semblerait, en résumé, que l'avantage reste encore au premier procédé ; mais une considération importante fait préférer le second. Le nivellement exige l'emploi d'un autre instrument, l'éclimètre, qui, s'adaptant beaucoup plus facilement à la boussole qu'à l'alidade, fera donner la préférence à la première, qui permettra, par un transport facile, d'exécuter les deux parties intégrantes d'unc levée régulière.

Il est nécessaire d'avoir toujours avec soi la chatne ou tel autre instrument propre à mesurer les distances, un rapporteur, une planchette légère sur laquelle est placée la minute, un compas, une échelle et un calepin pour recueillir les observations : car, bien qu'il faille autant que possible rapporter de suite sur le terrain, il est bon d'être en mesure de pouvoir reconstruire, s'il s'était glissé quelque erreur. Ce calepin, contenant les angles fournis par la boussole et les distances mesurées, pourrait être ainsi disposé, en supposant que l'on ne s'arrête qu'à une station sur deux.

NOMS des STATIONS.	COTÉS.	LONGUEURS des CÔTÉS.	ANGLES avec le MÉRIDIEN.	OBSERVATIONS.
B..........	AB	50m	354g	
	BC	60	50	
	CD	400	225	
	DE	200	2	
D..... ...	DY	etc.	etc.	
	DZ	etc.	etc.	

On voit dans ce tableau que nous avons supposé, qu'étant en

station en D, on a visé deux points Z et Y hors du polygone ABCD, etc., que l'on suit. Tout étant ainsi disposé, on partira de l'un des points déterminés : s'il n'y en a point d'accessible, on en déterminera un, au moyen de deux ou trois autres, et on les vérifiera par tous ceux qui sont visibles. On rayonnera de là les points les plus saillants du détail, et la direction sur laquelle on veut marcher, en visant un jalon. On mesurera la distance entre les deux stations en abaissant en même temps sur cette direction, des perpendiculaires que l'on mesurera, soit à la chaîne, soit au pas, ou que l'on estimera à vue, de tous les points de petits détails situés à droite ou à gauche du chemin que l'on suit. Pour cela, on se servira de la méthode indiquée pour l'équerre d'arpenteur. Arrivé à la seconde station qui est déterminée par le chaînage et vérifiée par des intersections sur des points du canevas, ou quelquefois obtenue seulement par ce dernier procédé, on rapportera sur la minute, au moyen des observations inscrites sur le calepin, tout ce que l'on a fait entre les deux stations. On recoupera ensuite les points visés de la première, puis on les construira immédiatement; enfin, on figurera à vue et très-légèrement les ondulations du terrain autour de ces deux stations, à une petite distance et sans s'occuper de les rattacher aux formes générales.

Nous verrons bientôt d'après quel principe on devra se guider dans ce travail. On suivra autant que possible les principales communications, sans s'astreindre toutefois à marcher continuellement dans la voie tracée, et l'on fera les stations aussi longues que possible, eu égard à l'échelle.

On s'écartera peu, dans l'expression du détail, de la direction que l'on parcourt, et l'on fera en sorte d'aboutir de temps en temps à quelque point du canevas pour se vérifier.

Lorsque le pays sera découvert, on fera usage des méthodes d'*intersection* et de *recoupement* comme plus exactes et plus expéditives en ce qu'elles dispensent du chaînage.

Si, au contraire, le pays est couvert, on ne pourra guère employer que la méthode de *cheminement*.

Les parties que l'on doit arrêter avec le plus grand soin, dans tous les travaux topographiques, quelle que soit l'échelle, sont :

1° Les grandes routes, grands chemins et percées de forêts;

2° Les fleuves, rivières, ruisseaux, lacs, étangs et fontaines ;

3° Les rues et contours des villes et villages ;

4° Les habitations isolées, moulins, chapelles, châteaux, ponts, bacs, usines, carrières, etc.

Les grandes routes, grands chemins, etc., seront levés à la planchette autant que faire se pourra, et si parfois on y emploie la boussole, il faudra s'arrêter à chaque coude que l'on déterminera par tous les moyens possibles, chaînages, recoupements, etc.

Les deux bords d'une rivière s'obtiendront en cheminant sur l'un d'eux et recoupant sur l'autre, soit des points remarquables tels que arbres, poteaux d'amarre, etc., soit des jalons que l'on y fera successivement placer. Les sinuosités entre deux stations se figureront à vue ou par des ordonnées, sur la direction principale. Les ruisseaux se détermineront comme les rivières, ou par des intersections, sur des points de leur cours assez rapprochés les uns des autres.

Pour les villes et villages, on commencera par en lever les contours avec beaucoup de soin : on amorcera en même temps les principales issues, puis on partira de l'une d'elles pour suivre les différentes rues ; d'une station à l'autre, on abaissera sur le chaînage des perpendiculaires de tous les points remarquables, tant d'un côté que de l'autre, comme angles de murs, portes cochères, etc., et l'on pénètrera ensuite dans les habitations pour figurer les massifs de maisons, cours, jardins, etc. Quand les murs que l'on rencontrera à l'intérieur auront quelque étendue, on en prendra les directions à la boussole.

Pour les habitations isolées : si les contours que l'on suit, en cheminant, n'y conduisent pas, et si l'on n'a pu de loin les placer par recoupement, on déterminera dans leur voisinage un point au moyen de plusieurs autres, et l'on en partira pour faire le détail.

Les contours de bois se feront à la boussole, en ne s'arrêtant qu'à une station sur deux, si du moins les intermédiaires ne sont pas nécessaires au recoupement des points environnants ; ceux des forêts seront relevés avec beaucoup de précision, surtout par rapport aux amorces des routes droites dont elles sont percées ; car, celles-ci se réunissant souvent à des carrefours, il n'en pourrait pas être de même de leurs projections, s'il s'était glissé quelque erreur.

On représente de suite, en s'occupant de la planimétrie, les petits accidents de terrain tels que les escarpements, ravins, carrières, mares, massifs de rochers et, en général, tout ce qui se dessine à vue.



Nous terminerons en disant que la méthode la plus prompte consiste à lever avec exactitude. Si l'on tolère d'abord des erreurs assez légères, elles s'accumulent souvent et finissent par être telles que l'on ne peut plus s'y reconnaître, et, malgré soi, l'on est obligé de recommencer des parties souvent considérables. On fera donc bien de ne négliger aucune des vérifications possibles, et lorsque, malgré ces soins, quelque partie se trouvera altérée, il faudra de suite la reprendre en déterminant dans son intérieur un point au moyen de plusieurs autres dont on sera sûr.

Il est possible que l'étendue du terrain à lever ne permette pas, eu égard à l'échelle, de la représenter sur une seule feuille de papier, ou que l'on soit obligé d'en faire le partage en feuilles, pour que le travail puisse être exécuté par plusieurs personnes à la fois. Dans ce cas, on divise le canevas que l on a fait à une échelle moindre, en plusieurs rectangles, et l'on construit chacun d'eux isolément sur une feuille de papier et à l'échelle adoptée pour la levée. Ensuite, on y reporte les points du canevas par leurs distances aux côtés du cadre. On fera en sorte que chaque feuille ait trois points au moins. On peut encore prendre pour côtés des cadres sur lesquels doivent se raccorder des levées contiguës, les droites qui unissent les clochers ou autres objets remarquables faisant partie du canevas. Il serait superflu de reproduire ici les différents problèmes qui peuvent se présenter sur le terrain; notre but était seulement de résumer la marche à suivre pour opérer avec méthode.

CHAPITRE IX.

NIVELLEMENT.

169. Après avoir parlé de tout ce qui concerne la projection orthogonale des points, il nous reste à indiquer les moyens d'obtenir leurs ordonnées verticales ou cotes. Tel est le but du nivellement. Les plus grandes opérations qui y sont relatives n'exigeant pas qu'on ait égard à l'ellipsité de la terre, nous la considérerons comme une sphère de 40 millions de mètres de circonférence et d'un rayon égal à 6,366,198^{m}.

On nomme surface ou ligne de niveau toute surface ou ligne parallèle à la surface des eaux de la mer. Ainsi deux points sont dits de niveau lorsqu'ils sont également distants du centre de

la terre. S'il en est autrement, il existe entre ces deux points une *différence de niveau*, et c'est dans l'évaluation de cette différence que consistent la théorie et la pratique du nivellement. Les points A et B étant inégalement éloignés du centre O (*fig.* 136) de la terre, leur différence de niveau comptée sur la verticale de B est BB'.

170. Les instruments dont on se sert pour ce genre d'opérations ne donnent que la tangente AB'' au premier élément de la courbe, de sorte qu'ils conduisent à déterminer BB'' et non BB'. Cette ligne AB'' est dite *niveau apparent*, et l'on désigne l'arc de cercle AB' sous le nom de *niveau vrai*. B'B'', différence du niveau vrai au niveau apparent, est donc la première chose qu'il faut apprendre à trouver pour pouvoir ensuite arriver à une connaissance exacte de la différence de niveau entre deux points A et B. Jusqu'à une certaine limite, 300^m environ, la différence B'B'' est sensiblement nulle ; au delà, il faut y avoir égard. Ceci est subordonné cependant à l'exactitude de l'instrument que l'on emploie. Ainsi, par exemple, il sera très-inutile de calculer cette différence à 400^m, où elle ne porterait que sur la cinquième ou la sixième décimale, tandis que l'instrument ne fournirait la cote qu'à un centimètre près.

Pour trouver B'B'', servons-nous de la propriété dont jouit la tangente à un cercle, d'être moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure. Désignons par K la projection de la distance entre les deux points ; B'B'' par h et le rayon de la terre par R, nous aurons $K^2 = h\,(2R + h)$ d'où $h = \frac{K^2}{2R + h}$.

On résout approximativement, en négligeant h au dénominateur du second membre, comme étant une quantité extrêmement petite par rapport au diamètre du globe.

On a donc pour une certaine distance K, $h = \frac{K^2}{2R}$ (a).

Le résultat serait le même, si l'on effectuait la multiplication qui donnerait

$$K^2 = 2Rh + h^2$$

en remarquant que h étant très-petit, on peut ramener l'équation à n'être que du 1er degré, en négligeant h^2.

Pour une autre distance K', on aura également $h' = \frac{K'^2}{2R}$ d'où $h : h' :: K^2 : K'^2$: c'est-à-dire que les différences du niveau

vrai au niveau apparent sont proportionnelles aux carrés des distances.

Si donc on a calculé h au moyen de (a) pour $K = 1000^m$, on trouvera pour une longueur quelconque $K' = 1500^m$,

$$h' = \frac{h}{(1000)^2}(1500)^2.$$

Cette formule peut se calculer facilement par logarithmes en ajoutant au logarithme de la quantité constante $\frac{h}{(1000)^2}$ le double de celui de 1500. On a construit, d'après ce procédé, des tables qui abrègent ce calcul.

171. Il existe une autre cause d'erreur sur l'appréciation exacte de la différence de niveau entre deux points : c'est la réfraction. Son influence étant très-peu sensible sur les plus grands côtés qu'emploie la topographie, nous n'en ferons pas mention ici. Au surplus, cette théorie est développée au livre V (*Géodésie*), § 440. C'est là que l'on trouvera la démonstration de la formule qu'il faut employer, quand on veut opérer avec la plus grande précision. Faisons remarquer, en annonçant seulement que la correction relative à la réfraction est soustractive, de quels éléments divers se compose la différence de niveau entre A et B, que nous désignerons par dN.

Représentons par dT la hauteur AA' ou $B''B'''$ de l'instrument (*fig.* 138);

$B'B''$ la différence du niveau vrai au niveau apparent par h;

$B'''B^{iv}$ le côté vertical du triangle rectangle $A'B'''B^{iv}$ par H; et BB^{iv} erreur de la réfraction par r;

Il en résultera que $dN = dT + h + H - r$.

172. *Instruments propres au nivellement.* Ces instruments se divisent en deux classes dont l'usage est bien distinct. Les plus simples donnent seulement la ligne de niveau (nous désignerons ainsi le niveau apparent, quand nous n'ajouterons pas la qualification de vrai). Les autres mesurent l'inclinaison d'un rayon visuel ou d'une direction quelconque sur la ligne de niveau.

Ils sont tous fondés sur l'un des trois principes suivants :

1° Horizontalité de la surface d'un liquide en repos dont chaque élément, normal à la verticale, donne sensiblement la direction du plan tangent horizontal au point où cette surface peu étendue est en station;

2° Verticalité constante du fil à plomb;

3° Différence de pesanteur des liquides ou d'un gaz et d'un liquide, dont le plus léger s'élève davantage.

Le troisième principe est le plus souvent employé. Il donne naissance au niveau à bulle d'air, élément essentiel de tous les instruments de nivellement présentant une grande exactitude. Quand un corps fermé contient un liquide et une bulle de gaz, en vertu des lois de la gravitation, cette bulle occupe la position la plus élevée, et son milieu est au point de tangence horizontale, si la section du corps est un arc de cercle.

Dans le cas où cette section ne serait pas un tel arc, le point de tangence horizontale ne correspondrait plus au milieu de la bulle, mais peu importerait, car on ne se sert pas de cette horizontale elle-même, s'il n'y avait lieu de tenir compte de l'effet de la dilatation. On n'en serait pas moins assuré *que la bulle étant dans la position même qu'elle occupait lors d'une première expérience, le niveau à bulle et toute la partie de l'instrument fixée après lui seront matériellement placés de la même manière par rapport à la verticale.*

Rien ne semblerait devoir empêcher le remplacement de la bulle d'air par une bulle d'un liquide plus léger que le premier; mais la température variant, les liquides, en se condensant, laisseraient apparaître une petite bulle de vapeur, et en se dilatant, ils feraient éclater l'enveloppe, qui doit être de verre, pour qu'on puisse juger si la bulle occupe la position qu'on lui a assignée lors du règlement préalable qu'exige tout instrument muni d'un tel niveau à bulle. Il faut donc que l'intérieur du tube renferme un seul liquide et une bulle d'air ou un vide promptement occupé par de la vapeur d'une tension variable avec la température. De cette sorte, le seul effet produit par la variation de cette température sera une augmentation ou une diminution de l'espace occupé par la bulle. Mais alors, si la section du niveau était quelconque (*fig.* 138 *bis*), il faudrait que la surface du verre portât une série de divisions indiquant les positions occupées par la bulle, dans ses différents états de grandeur. Pour éviter cet inconvénient, il suffit que la section devienne circulaire, car alors, pour que l'instrument se trouve placé par rapport à la verticale, de la même manière que dans l'expérience de vérification, il suffira que la bulle occupe la même place ou qu'ayant augmenté ou diminué de volume par l'effet de la chaleur, ses extrémités aient marché en sens inverse, de longueurs égales facilement esti-

mées au moyen de divisions égales marquées sur le verre. Pour vérifier la forme circulaire du tube, on pourrait le soumettre à diverses températures, en le laissant dans une position fixe, et voir si la bulle parcourt des divisions symétriques.

Nous avons dit que les instruments les plus exacts étaient fondés sur l'emploi du niveau à bulle d'air. Il faut pourtant mentionner une exception provenant d'une cause d'erreur très-petite, il est vrai, insignifiante pour la topographie, mais qu'il est utile de faire disparaître, quand cela est possible, pour les opérations qui exigent une très-grande précision.

Lorsqu'on cale le niveau à bulle, c'est-à-dire lorsqu'on cherche à l'amener dans la position adoptée, la bulle tend à prendre la position répondant à la tangence horizontale, mais cela en vertu d'une force extrêmement petite, lorsqu'elle arrive proche de cette position. D'un autre côté, son mouvement est retardé par le frottement de tout le liquide contre les parois, et l'équilibre peut s'établir entre ces deux forces contraires un peu avant que l'une d'elles, celle qui détermine l'ascension, soit nulle, c'est-à-dire avant que la bulle soit arrivée à la position convenable. Pour obvier à cette cause d'erreur, on établit maintenant des instruments fixes, ne pouvant servir que dans des circonstances toutes particulières, dans lesquels on invoque le premier principe, celui de l'horizontalité d'un liquide en repos. Sans entrer dans de longs détails à ce sujet, nous dirons seulement qu'il suffit de diriger l'axe optique d'une lunette sur une telle surface horizontale, et qu'on sera assuré de la verticalité de cet axe optique lorsqu'on verra le réticule et son image superposés.

173. *Niveau d'eau.* Il est composé d'un tube cylindrique de fer-blanc ou de cuivre, recourbé aux deux extrémités (*fig.* 139) à angles droits sur la première direction. Deux fioles en verre, d'égal diamètre, bien jointes au tube, s'y engagent de part et d'autre. Une douille faisant corps avec l'instrument et soudée au milieu du cylindre sert à le fixer sur un pied à trois branches, en lui laissant le jeu nécessaire pour faire un tour d'horizon. On verse l'eau par l'une des ouvertures, jusqu'à ce qu'elle monte dans les deux fioles, aux $\frac{2}{3}$ environ de leur hauteur. Lorsque le liquide, après sa chute dans le tube, est entièrement calmé, les plans qui le terminent dans l'une et l'autre fiole appartiennent à une même surface de niveau en vertu d'une propriété connue des liquides. Si l'on imagine une tangente commune aux inter-

sections de ces surfaces avec le verre, ce que l'on peut faire de quatre manières différentes (*fig.* 140), on aura la direction de la ligne de niveau. Il est d'autant plus facile de juger la position de cette tangente, que les petites surfaces sont terminées, en vertu de l'affinité des corps, par une espèce d'onglet qui paraît noir. Pour agir avec plus de précision, on se met, pour viser, le plus loin possible de l'instrument.

Nous avons dit que les fioles étaient de même diamètre : si cette condition n'était pas sensiblement satisfaite, les opérations seraient défectueuses, puisque la ligne de niveau varierait pour chaque position que prendrait l'instrument en faisant un tour d'horizon. En effet, supposons que, dans une position première, la ligne de niveau soit *pn* (*fig.* 141), les deux fioles étant de diamètres différents, l'une double de l'autre par exemple : si le support DP était parfaitement vertical, et le tube exactement horizontal, le mouvement de rotation que l'on imprimerait autour de DP n'apporterait aucune modification, mais ces conditions ne sont jamais entièrement remplies. Il en résulte qu'en faisant tourner de 200^g, la petite fiole qui était en A viendra en B. Admettons, pour faciliter l'explication de ce qui se passe, que le déplacement du liquide ne se fasse pas d'une manière continue, pendant que l'on tourne l'instrument, ou, si l'on veut, qu'il soit congelé pour un moment. La surface *mn* prendra la position *m'n'* et *pq* deviendra *p'q'*, de telle manière que $pn' = p'n$. Rendons actuellement à l'eau sa fluidité : le poids du cylindre *m'n'pt* pesant sur le reste du liquide, tendra à l'élever dans le petit tube : il sera d'abord employé, en partie, à remplir la partie cylindrique vide *p'q'nu ;* mais nous avons supposé l'un des cylindres d'une base double de l'autre, et comme les hauteurs *p'n*,*pn'* sont égales, il s'ensuit qu'il restera encore la moitié du liquide qui occupe *ptm'n'*. Il se partagera entre les deux fioles pour rétablir l'équilibre et élèvera ainsi la ligne de niveau de *pn* qu'elle occupait d'abord en *rs*. Rien de plus facile que de préciser l'erreur DD' pour le cas particulier que nous avons considéré. Le poids des deux petits cylindres liquides qui ont élevé la ligne de niveau, doit être le même, et, puisqu'ils ont même densité, ils auront même volume. Il faudra donc, en désignant par V,B,H le volume, la base et la hauteur de l'un des cylindres, et par V',B',H' les mêmes quantités relatives à l'autre, que l'on ait $V = V'$ ou $BH = B'H'$ et que leur somme équivaille à la moitié du cylindre qui avait *pn'* pour hauteur et B pour base; donc $\frac{1}{2}$ *pn'*

$B = BH + B'H'$: d'ailleurs aussi H et H' doivent être égaux, puisque les deux lignes de niveau sont nécessairement parallèles, donc $pn' BH = H(B + B')$. Nous avons dit que le rapport de capacité des fioles, et par conséquent de leurs bases, était celui de 1 à 2; ainsi

$$\tfrac{1}{2} pn' 2B' = 3HB' \quad \text{ou} \quad pn' = 3H \quad \text{et enfin} \quad H = \tfrac{1}{3} pn'$$

pn' n'est autre chose que la différence de niveau entre les deux extrémités du coude : l'erreur sèra donc d'autant plus grande que l'instrument sera plus incliné et aura plus de longueur. En faisant pn' nul, l'expression de H trouvée plus haut justifie ce que nous avons dit, qu'il n'y aurait pas de correction à faire si l'instrument était bien placé.

Si l'on supposait le rayon de B double de celui de B', il s'ensuivrait que le quart seulement du liquide contenu dans la plus grande fiole aurait été employé à amener le liquide de la seconde à la ligne de niveau pn, et par suite $\frac{3}{4} pn'B = H(B + B')$ et $H = \frac{3}{5} pn'$.

Quand on reste longtemps en station au même point, on a égard à l'évaporation, surtout si le soleil frappe sur l'instrument, ou à l'augmentation du liquide s'il pleut : car alors la hauteur de la surface de l'eau varierait. Ordinairement, pour obvier à ces inconvénients, les deux fioles sont recouvertes de tuyaux métalliques fermés par un bout, que l'on retire quand il est nécessaire. Ils ont encore pour but d'empêcher le liquide de se répandre dans les mouvements de translation. Si l'on opère dans l'hiver, on peut se servir d'alcool au lieu d'eau pour éviter la congélation.

174. Pour savoir à quelle hauteur la ligne de niveau ab (*fig.* 142) passe au-dessus du point B, on y place une règle graduée **B***b* que l'on nomme *mire*. Cette règle a ordinairement deux mètres de haut et peut en avoir quatre en la construisant en deux parties. On fait glisser dessus une petite planche mince, nommée voyant, de 16 à 20 centimètres de hauteur et partagée en deux par la ligne de visée bb' (*fig.* 143). Les deux compartiments sont peints de deux couleurs tranchantes. Le voyant est maintenu sur la règle par une vis de pression que l'on serre, lorsqu'après avoir haussé ou baissé d'après les signes que fait l'observateur, il se trouve que la ligne de niveau passe par bb'; alors on compte les divisions comprises entre P et bb'. Il existe plusieurs formes de

mire dont le mécanisme est assez simple pour être compris à première vue.

175. *Niveau à bulle d'air de Chézy.* Cet instrument se compose d'une lunette AB (*fig.* 144) emboîtée dans deux collets C et D dont elle peut sortir, et qui sont supportés par deux montants égaux CE, DF; ceux-ci reposent sur une règle EF. Dessous la lunette est adapté un niveau à bulle d'air dont la position peut être modifiée au moyen d'un mécanisme placé en H et d'une articulation G. Tout ce premier système pivote sur le point I appartenant à la tige IP. Cette tige est composée : 1° de la partie IL formée de deux plaques parallèles qui laissent entre elles un passage à la courbe métallique ELF adhérente au premier système. Le mouvement prompt dans ce sens se fait avec la main, et le mouvement doux avec une vis de rappel K tangente à la courbe en L; 2° du tambour cylindrique MN évidé en gorge et dans lequel s'engrène une seconde vis tangente N; 3° de la partie conique PQ qui s'enfonce dans le pied et qui jouit de la faculté de tourner avec tout l'appareil. Ainsi donc, pour se servir de cet instrument, on rend la surface supérieure du tambour MN horizontale à vue, le mieux possible. On assure les pieds, on fait tourner tout l'instrument autour de l'axe IP, jusqu'à ce que le fil vertical de la lunette couvre la mire. C'est la vis N qui, pour cette opération, produit les mouvements doux, lorsque l'on a serré la vis de pression QO, attachée au pied, qui presse une portion de surface annulaire contre le haut de la tige conique PQ. On donne ensuite au premier système un mouvement dans le plan vertical, jusqu'à ce que le niveau GH soit parfaitement calé; puis, faisant placer le voyant de telle sorte que sa ligne de visée se confonde avec le fil horizontal, l'opération est terminée. La lunette, construite comme celle de l'alidade et de la boussole, est une lunette astronomique. (Pour le niveau, voir sa description au livre V, *Géodésie*, cercle répétiteur, § 382.)

La vérification du niveau de Chézy consiste en deux choses : 1° l'axe optique de la lunette doit être le même que celui du tube qui en forme le corps : car, s'il en était autrement, la lunette pouvant tourner dans ses collets, l'axe optique décrirait une surface conique dont toutes les génératrices ne feraient pas le même angle avec le niveau supposé fixe. Pour voir si cette condition est remplie, on vise, à une grande distance, une ligne de niveau que l'on fait couvrir par le fil horizontal, en plaçant la tête de la vis

du réticule dans la partie supérieure de la lunette; on la retourne dans ses collets, de manière que cette tête de vis soit dans une situation diamétralement opposée à la première, et l'on regarde de nouveau dans la lunette. Si le fil horizontal ne coïncide plus avec la ligne visée, on modifie la position de l'axe optique, en faisant parcourir la moitié de la différence par le fil horizontal, au moyen de la vis du réticule, et l'autre moitié par tout l'instrument, à l'aide de la vis tangente K. Pour s'assurer que la correction est bien faite, on recommence l'épreuve; 2° l'axe optique de la lunette doit être horizontal lorsque le niveau est calé. Pour s'en assurer, on cale le niveau dans une position, puis on retourne la lunette bout pour bout, après avoir ouvert les collets. Si l'instrument n'a pas bougé du reste, le niveau doit être encore calé après le retournement, car cette circonstance dit, en effet, que la ligne des collets restée fixe est parallèle à la tangente menée au milieu de la bulle, c'est-à-dire horizontale; comme l'enveloppe de la lunette repose sur cette ligne des collets, elle est elle-même horizontale, ce qui entraîne également la même condition pour l'axe optique, par suite de la première vérification.

Si le niveau s'est décalé, dans le retournement, on le recale *à moitié* au moyen du mouvement H. L'instrument, dans ce cas, ne sera réglé qu'après quelques tâtonnements.

176. *Niveau à plateau.* Celui-ci nous paraît d'un usage plus facile que le précédent. Il se compose d'un plateau circulaire que l'on rend horizontal, et d'une luuette qui, pivotant sur le centre du plateau, s'appuie constamment sur lui. On conçoit déjà que si l'axe optique est rendu parallèle au plan du limbe, il décrira aussi un plan horizontal.

Soit donc AB (*fig.* 145) le limbe supporté par une colonne terminée à sa partie inférieure par un pied à trois branches dans lesquelles se meuvent trois vis *a* destinées à faire varier la position du limbe. DE est une lunette passant dans deux collets rectangulaires de mêmes dimensions, qui peuvent glisser sur le plateau. Elle porte à son milieu deux petits tourillons dont l'un s'engage dans le centre évidé C du plateau, et dont l'autre, qui se trouve alors situé à la partie supérieure de la lunette, maintient un niveau à bulle GH. On comprend que le but de ce niveau est de régler l'instrument et, pour cela, on le place d'abord dans la direction de deux vis du pied, au moyen desquelles on le cale,

puis ensuite on lui donne une position rectangulaire qui correspond à la troisième vis, et avec celle-ci on le cale encore.

Les vérifications de cet instrument se font comme il est indiqué au paragraphe précédent, pour la lunette, et comme il sera indiqué à l'article *Théodolite*, pour l'horizontalité du plateau.

177. *Niveau de Porro.* Le niveau qu'a conçu et longtemps employé M. Porro, remplit le même but que celui de Chézy et donne une horizontale avec autant de précision que lui, avec plus peut-être : car la différence de niveau cherchée est, si l'on veut, comme nous le dirons bientôt, la moyenne de deux lectures; mais ce que ne donne aucun des instruments précédemment décrits, c'est la distance en même temps que la hauteur.

Cet instrument se compose d'abord de deux pièces principales : une lunette AB et un niveau à bulle *ab* (*fig.* 8, *planche* XIX).

ab est placé latéralement à la lunette; *ac*,*bd*, sont des appendices du niveau et se terminent en pointes vers la lunette. Dans celle-ci sont pratiqués deux petits trous légèrement coniques, et précisément de même forme que les pointes *c*,*d*, qui s'y engagent lorsqu'il s'agit de fixer l'un à l'autre la lunette et le niveau; à ce dernier est adaptée une petite vis à tête, *c*, destinée à le régler.

Pour vérifier et rectifier l'instrument, on cale le niveau à l'aide d'un mouvement dont nous décrirons le mécanisme plus tard : on observe avec la lunette la mire placée en avant, puis rendant la lunette indépendante du niveau, on lui fait faire une demi-révolution autour de son axe. On introduit de nouveau les pointes *c*,*d* dans les cavités qui leur sont destinées, avec cette différence, par rapport à la première position, que les places sont alternées. Dans cette nouvelle position, la bulle du niveau étant replacée dans ses repères symétriques, l'axe optique prend la même position que précédemment; mais l'objectif ayant pris la position de l'oculaire et réciproquement, il faut, pour que la seconde observation soit possible, imprimer un mouvement de 200^{g} dans le sens azimutal, afin de ramener l'oculaire vers l'œil de l'observateur.

Si l'axe optique de la lunette n'est pas parallèle à celui du niveau, on s'en aperçoit de suite, puisque, après avoir réglé le niveau qui a dû se déranger dans le retournement, la ligne de visée déterminée par l'axe optique n'atteint plus la mire à la même division.



Si m et n représentent les deux lectures, il est évident que celle qu'on lirait, si l'instrument était réglé, est $\frac{m+n}{2}$; tandis que l'erreur de parallélisme entre les axes du niveau et de la lunette est $\frac{m-n}{2}$.

Il faut donc rendre cette quantité nulle, ce qui se pratique, comme dans le niveau à bulle de Chézy, au moyen du mécanisme consacré à cet usage : c'est ici la petite vis c.

On est assuré que la condition indispensable de parallélisme est remplie lorsque $m=n$.

La lunette, qui est à la fois *anallatique* et *diastimométrique* (voir la description qui en sera donnée livre IV, chap. v, § 332), donne en même temps, comme nous l'avons annoncé, la distance et la cote.

Soient ab (*fig.* 9, *planche* XIX) l'axe optique de la lunette qui, par la visée, détermine le point A sur la mire. Disons, en passant, que ce n'est pas d'une mire à voyant mobile que l'on fait usage, mais d'une *mire parlante*, c'est-à-dire de celle décrite lors de l'explication de la stadia. On se rappelle qu'elle consiste en une règle de hauteur convenable, sur laquelle sont peintes, d'une manière très-apparente, des divisions qui se distinguent bien sous les fils de la lunette à la plus grande distance que comporte la force de l'instrument.

a' et a'' sont deux autres fils horizontaux placés aussi au foyer de la lunette et dont les écartements, par rapport au premier fil a, sont tels qu'ils déterminent, l'un une pente ascensionnelle, l'autre une pente de dépression d'un centième de la distance.

Si donc, au lieu de lire la cote indiquée par le fil a et que nous désignerons par H, on lit les cotes H' et H'' correspondant aux fils a', a'', on aura évidemment

$$H=\frac{H'+H''}{2}$$

La distance D de l'observateur à la mire sera

$$D=100\,\frac{H'-H''}{2}$$

Nous ferons remarquer en passant, et par anticipation, que dans les lunettes anallatiques le point b (*fig.* 9, *planche* XIX) correspond au centre de l'instrument.

Au lieu de donner aux divisions de la mire des dimensions

arbitraires, supposons qu'elles soient égales chacune à un centimètre, nous aurons

$$H = \frac{H' + H''}{2} \times 0^m,01 \quad \text{et} \quad D = 50^m (H' - H'')$$

Si l'on donne 2 centimètres aux divisions de la mire, il viendra

$$H = (H' + H'') \times 0^m,01$$
$$D = (H' - H'') \times 100^m$$

On conçoit que plus grandes sont les dimensions des divisions de la mire et plus grande est l'exactitude de lecture. C'est pour ce motif que M. Porro, après avoir doublé l'écartement des fils a' et a'', a divisé sa mire de quatre en quatre centimètres.

Indiquons maintenant les différentes parties du support.

Sur un pied ordinaire en bois P (*fig.* 10, *planche* XX) qui sert à porter l'instrument, on remarque à la base de celui-ci deux disques *mm*, *nn*, d'épaisseurs inégales. Ce sont deux coins pris dans une sphère dont la face commune de séparation est un grand cercle. Ils sont assemblés au centre, de manière à pouvoir tourner l'un sur l'autre et à constituer ainsi un coin à angle variable, dont la plus grande pente peut varier en azimut sur le pied P. Ce sont les deux manches *q* et *q'* qui facilitent cette manœuvre. Un petit niveau sphérique, placé dans la cuvette *oo'*, indique l'horizontalité de la face supérieure du coin.

Ce mécanisme simple et solide produit l'effet obtenu dans les autres instruments précédemment décrits par des procédés qui peuvent varier de l'un à l'autre.

Deux chevalets *s*,*s* s'élèvent sur le fond mobile de la cuvette et viennent supporter l'axe de rotation de la lunette, qui est montée comme celle des théodolites. Le niveau, garni d'une douille que traverse l'axe de rotation, est donc libre tant que les pointes *c*,*d* ne sont pas engagées dans les petits trous correspondants du tube de la lunette. Les tourillons de l'axe de rotation peuvent glisser horizontalement sur leurs collets, de manière à permettre de rendre dépendants ou indépendants l'un de l'autre, à volonté, les deux éléments principaux de l'instrument.

Les chevalets *s*, *s* sont assez élevés pour que l'inversion de la lunette dans le sens vertical puisse se faire sans rien démonter.

Sur une portion de l'axe de rotation est adapté un manchon faisant corps avec un bras de levier en cuivre sur lequel agit la vis de rappel *r*, lorsqu'on serre un bouton de pression convenablement disposé.

La surface conique intérieure de la lunette est divisée en grades, pour y lire au besoin l'angle horizontal par un moyen catoptrique qu'on décrira plus tard.

Deux petites pièces placées en *c* et *d*, que l'on n'a pas pu indiquer sur la figure, mais dont la forme se conçoit aisément, sont percées de plusieurs trous analogues à ceux que d'abord nous avons désignés par *e* et *d*. Ces trous sont exactement espacés de 1ᵍ, le centre étant supposé sur l'axe mathématique de l'axe de rotation. Leur emploi, combiné avec les divisions du niveau *ab*, permet de faire fonctionner l'appareil dans des conditions déterminées autres que le parallélisme de la lunette et du niveau. Il s'emploie alors comme le clisimètre de Chézy, que nous décrirons dans l'un des prochains paragraphes, et facilite beaucoup les opérations de nivellement dans les pays des montagnes.

178. *Niveau réflecteur de Burel.* Cet instrument est formé par un cube de cuivre dont les arêtes ont 0ᵐ,02. A l'une des faces est adapté un anneau A (*fig.* 146), destiné à soutenir, en y passant le doigt, le niveau à la hauteur de l'œil. Le point de suspension de l'anneau peut varier au moyen d'un chariot B, qu'en tournant, fait mouvoir la vis CD qui le traverse. Sur la face EFGH est appliqué un miroir sur lequel est tracée une droite parallèle à la base et aboutissant à deux pointes L et M en saillie sur les flancs du cube. Pour opérer, la ligne LM doit être horizontale et le plan du miroir vertical. Supposons qu'il en soit ainsi, et indiquons l'usage de l'instrument ; puis ensuite, nous verrons comment on s'assure que ces conditions sont remplies. On élève le niveau jusqu'à ce que LM partage en deux exactement l'image de la prunelle de l'œil, et, dans ce cas, la ligne LM et son image se superposent ; il en résulte que le plan passant par l'œil et par LM est normal au miroir, et par conséquent horizontal si celui-ci est bien vertical.

Dans cet état de choses, l'observateur, au moyen des pointes L et M, peut indiquer au porte-mire placé en avant dans quel sens il faut faire mouvoir le voyant pour que la ligne de visée soit dans le plan horizontal passant par l'œil. La différence entre la hauteur de l'œil au-dessus du sol et la lecture faite sur la mire donnerait la différence de niveau entre les deux points ; mais, dans l'usage de cet instrument, aussi bien que des précédents, on fait abstraction du lieu où se trouve l'observateur ; on opère pour un second point comme pour le premier, et la différence

des lectures donne la différence de niveau des deux points visés. Pour s'assurer que l'on a satisfait à la première condition, celle de la verticalité du miroir, on se place devant un mur ST (*fig.* 147). Soit FH la position du miroir : on fait tracer sur le mur son intersection P avec le plan passant par l'œil et les deux pointes de l'instrument ; on tourne le dos au mur et l'on replace l'instrument à hauteur de l'œil. Soit F'H' la nouvelle position du miroir, le plan passant par l'œil en O' et par les deux pointes lui sera toujours normal. Son intersection sur le mur sera en *p'*, et pour la trouver, l'observateur regardant un peu obliquement dans le miroir, indiquera à un aide placé auprès du mur la ligne qu'il faut qu'il trace pour que sa réflexion se confonde avec la ligne gravée sur le miroir. Si, comme l'indique la figure, les droites projetées en *p* et *p'* ne coïncident pas, cela prouve que le miroir était incliné. Les angles FLF, *p*L*p'*, sont égaux comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires, et chacun d'eux est le double de l'angle que forme le miroir FH avec la verticale LN. Si donc, en tournant la vis CD (*fig.* 146), on change le point de suspension, on arrivera, après quelques essais, à détruire cette erreur. Alors, dans les deux positions, le miroir sera vertical et les traces sur le mur, représentées par *p* et *p'*, se réuniront en P. Si la trace LM n'était pas horizontale, on s'en apercevrait dans l'opération faite pour la première vérification, puisque l'on obtiendrait deux lignes symétriquement inclinées, comme l'indiquent *pp* et *p'p'* (*fig.* 148).

Les instruments sont construits de telle manière que cette imperfection n'existe pas ; si parfois, néanmoins, elle se rencontrait, le constructeur de l'instrument pourrait seul y remédier, à moins que le chariot eût deux mouvements rectangulaires, ce qui n'a pas lieu dans le niveau réflecteur représenté (*fig.* 146). On peut, pour opérer, suspendre si l'on veut ce niveau à un bâton fiché en terre, mais on s'en sert néanmoins en le tenant à la main. Cet avantage, joint à son peu de volume et à la netteté de sa ligne de foi, en fait un instrument très-utile.

179. *Clisimètres.* Nous avons dit que les instruments qui donnent une ligne horizontale n'étaient pas les seuls employés à trouver la différence de niveau entre deux points. On conçoit, en effet, que si l'on connaît l'angle MCN et le côté MC (*fig.* 149), il est facile de trouver MN, puisque l'on a $\frac{MN}{MC}=\frac{\text{tang MCN}}{R}$. Les in-

struments qui déterminent l'angle de pente se nomment clisimètres.

180. *Niveau de maçon.* Le plus simple de tous est vulgairement connu sous le nom de niveau de maçon. Dans la description que nous allons en faire, on verra qu'il peut être également classé parmi ceux qui donnent seulement une ligne de niveau. Il consiste en un triangle isocèle rectangle A'DE (*fig.* 150); au sommet D est fixé un fil à plomb. Un arc gradué, dont le centre est en D, s'appuie sur la base AE et vient se fixer aux deux côtés de l'angle droit. Cet arc serait inutile s'il ne s'agissait que de s'assurer de l'horizontalité de la droite ou du plan qui supporte l'instrument. Dans ce cas, le fil à plomb devra aboutir sur le milieu de la base A'E, si le niveau est exact. Pour trouver le point de la base auquel correspond le fil quand elle est horizontale, il suffit de poser l'instrument sur une règle arbitrairement inclinée, de marquer la trace du fil sur la base, de retourner bout pour bout, de marquer encore la position du fil à plomb et de tracer le milieu entre les deux. S'il était bien construit, il suffirait de diviser la base en deux parties égales. Quand le niveau est muni de l'arc dont nous avons parlé, l'opération est la même; puis, prenant le point de rencontre du fil et de la base A'E horizontale pour origine des graduations, on marque les grades ou degrés à droite ou à gauche de ce point. Pour trouver l'inclinaison d'une droite AB, il suffit donc d'appliquer le niveau dessus et de lire quel chiffre correspond au fil, en observant toutefois dans quel sens est l'inclinaison: car, sans cette précaution, il y aurait incertitude, puisque de part et d'autre se trouve la même numérotation. Pour obvier à cet inconvénient, on a imaginé d'écrire les divisions de 0^g à 100^g de G en H ou de H en G, de manière que 50^g correspondît à AF horizontal. Dans la première de ces deux suppositions, si B est plus élevé que A, l'angle qu'on lit est plus petit que 50^g, et si on l'en retranche, on a précisément l'inclinaison de AB sur l'horizontale AC. Quand B est plus bas, on lit un chiffre supérieur à 50^g, et la différence est encore l'expression de l'inclinaison de AB. Le contraire a lieu si les chiffres vont de H en G. Il nous semble qu'il serait plus simple encore de coter 100^g le point milieu de la base: l'extrémité G de l'arc serait 50^g, tandis que H indiquerait 150^g. Ces chiffres se rapporteraient aux angles que peut faire la base AF avec la verticale du point A': ce serait, si l'on veut, les distances zénitales prises de A'.

Quelquefois cet instrument est dépourvu de l'arc gradué : les divisions sont tracées sur la base et sont les prolongements des rayons passant par toutes les divisions du limbe ; elles sont alors d'inégales dimensions, car elles croissent comme les tangentes des angles de 0^g à 50^g ou plutôt elles sont les tangentes mêmes des arcs qui mesurent ces angles.

181. Les différentes constructions que nous venons d'indiquer obligent, pour résoudre le triangle BAC, à avoir recours aux logarithmes, à moins que le constructeur n'ait inscrit, au lieu de la graduation, les rapports de longueur entre la hauteur de l'instrument et la partie de la base comprise entre son point milieu et la perpendiculaire ; mais il existe un procédé plus usité et qui consiste en ceci : le triangle A'DF étant rectangle en D, la base A'F est double de la hauteur ; si donc on divise la base, en 400 parties, par exemple, DE en représentera 200. Cela posé, supposons que le fil à plomb DP (*fig.* 151) corresponde à la 260e, il en résultera, puisque les triangles PDE, ABC sont semblables comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires, que DE : EP :: AC : BC ou

$$200 : 260-200 :: AC : BC = \frac{6}{20} AC = 0,3\ AC.$$

Pour rendre ce clisimètre plus commode dans de certaines circonstances, on a quelquefois adapté en A' et en F des pinnules saillantes ou incrustées dans l'épaisseur de la règle.

182. *Clisimètre ou niveau de pente de Chézy.* Cet instrument donne immédiatement, comme nous allons le voir, la pente par mètre d'une ligne inclinée à l'horizon. Il se compose d'une règle AB (*fig.* 152), de deux pinnules AC, BD élevées à angle droit sur AB, d'un niveau EF fixé invariablement et parallèlement à la règle. Au point K est attachée à charnière une seconde règle IK traversée à son extrémité par une vis I qui éloigne ou approche AB de IK. Tout l'appareil est supporté par une colonne, un genou et un trépied. Une vis L arrête le mouvement du genou. Les pinnules sont deux parallélogrammes renfermant deux châssis GH, G'H (*fig.* 153 et 154) qui, maintenus à coulisse, peuvent se mouvoir dans le sens vertical. Le premier reçoit le mouvement directement de la main à l'aide du bouton Z ou, pour les petites variations, au moyen de la vis sans fin KK'. Cette vis, prise à ses extrémités dans deux collets, tourne sur son axe sans avancer ; c'est le châssis, auquel est adapté l'écrou, qui en reçoit le mouve-

ment de bas en haut. Le deuxième châssis (*fig.* 154) ne jouit que d'un mouvement très-restreint, imprimé par la vis V : celle-ci ne servant que très-rarement lorsqu'il s'agit de régler l'instrument, porte un carré au lieu d'une large tête plate, on la fait tourner au moyen d'une clef mobile. On conçoit que cette précaution soit nécessaire pour éviter les dérangements involontaires de l'instrument.

L'un et l'autre portent des fils croisés LM,NO qui se coupent en T et U, et des visières P et Q situées sur le prolongement des fils horizontaux. Les largeurs AS,BR des pinnules sont les mêmes, et les points T et Q d'une part, P et U de l'autre, sont situés dans des plans verticaux parallèles. Pour entendre maintenant l'usage de cet instrument, il faut d'abord se rendre compte de la propriété sur laquelle il est fondé. Soit donc une horizontale CA (*fig.* 149), et une ligne inclinée CB dont on veut connaître la quantité dont elle s'élève par chaque mètre. Supposons CM=1^m, MN=0^m,02, Cm=0^m,3, on aura

CM : MN :: Cm : mn ou 1^m : 0,02 :: 0,3 : mn=0^m,006.

Si nous donnons à la règle AB (*fig.* 152) 0^m,3 de longueur, et si nous imaginons le triangle Cmn construit en $\alpha\beta\gamma$ de manière que $\beta\gamma$=0^m,006, il s'ensuivra que $\alpha\gamma$ prolongée s'élèvera d'autant de fois 0^m,02 qu'elle contiendra de mètres. Voici comment on peut arriver progressivement à construire le triangle voulu $\alpha\beta\gamma$: on place les châssis de telle sorte que le plan passant par T et Q, P et U (*fig.* 153 et 154) soit horizontal ; on trace la ligne de foi XY correspondant au bas du châssis de la grande pinnule dans cette position et l'on marque zéro en Y, puis on porte 0^m,006 de Y en z. En faisant mouvoir le grand châssis de manière que Y ou zéro vienne sur la ligne z, le petit châssis ne bougeant pas, il est clair que T s'étant élevé de la même quantité que le point Y, la ligne de visée qui passera par Q et T sera bien la même que $\alpha\gamma$ (*fig.* 152). Si l'on continue les divisions z', z'', etc., et si l'on élève successivement le châssis de manière à amener Y en z', z'', la ligne $\alpha\gamma$ correspondra à des inclinaisons de 0^m,04, 0^m,06, etc., par mètre. Si l'on veut lire directement les centimètres sur le montant gradué AA', on inscrit 2,4,6, etc., en z, z', z'', etc. Si ces divisions sont encore subdivisées de manière que chacune des nouvelles n'ait que 0^m,001, c'est-à-dire, le sixième des premières, il est évident que la ligne $\alpha\gamma$ s'élève de 0^m,00333 ou de 3 millimètres $\frac{1}{3}$. Pour obtenir plus de précision encore, on ajoute un vernier.

La vérification de l'instrument consiste à voir si la ligne de visée TQ est bien horizontale lorsque la ligne de foi correspond à zéro. Pour cela, le niveau étant bien calé, on visera une ligne horizontale éloignée en la faisant couvrir par le fil horizontal de la grande pinnule, tandis que l'œil sera placé à l'oculaire Q de la petite; on retournera l'instrument bout pour bout; on recalera le niveau, on portera l'œil en P pour viser de nouveau la même horizontale. S'il se trouve une différence, on amène la ligne de visée sous la croisée des fils, moitié au moyen du bouton Z qui fait mouvoir tout l'instrument, et moitié avec la vis V qui imprime le mouvement au châssis de la petite pinnule. Cela fait, on recommence l'expérience, jusqu'à ce qu'il y ait coïncidence parfaite dans les deux positions de l'instrument.

On pourrait encore le régler en faisant mouvoir le voyant de la mire, dans la seconde opération, jusqu'à ce qu'il fût partagé par le fil de la pinnule: voir de combien on l'a fait bouger, lui donner la position moyenne et ramener la ligne de visée dessus, à l'aide de la vis V.

Alidade nivelatrice. M. le capitaine du génie Livet, professeur de topographie et de géodésie à l'Ecole de Metz, a imaginé une alidade qui a beaucoup de rapport avec le clisimètre de Chézy.

Cette alidade se compose d'une règle avec niveau à bulle d'air, et deux pinnules aux extrémités. Elle n'est pas munie d'une lunette plongeante.

L'une des pinnules est divisée en parties égales entre elles, et qui sont dans le rapport de 1 à 100 avec la portion de la règle comprise entre les deux pinnules. La règle a $0^m,25$, et les divisions ont, par conséquent, $0^m,0025$.

Il est superflu d'ajouter que la première de ces divisions est de niveau avec le petit trou percé dans l'autre pinnule pour faire fonction d'oculaire.

Pour trouver la différence de niveau entre le point de station et celui que l'on a visé, on prend la distance qui les sépare, on la multiplie par le nombre de divisions, et l'on sépare deux chiffres vers la droite du produit pour diviser par cent. Le résultat augmenté de la hauteur de l'instrument est la différence de niveau cherchée, si le point visé est plus élevé. Il faut, au contraire, retrancher cette hauteur, si le point visé est plus bas que la station.

On peut d'ailleurs éviter la hauteur variable de l'instrument, en opérant, comme nous avons eu occasion de le dire ailleurs,

c'est-à-dire en s'établissant en un point placé entre ceux qu'on veut niveler.

Il est probable que cet instrument, que nous n'avons pas eu sous les yeux, est muni, comme le niveau de pente de Chézy, des pièces mobiles nécessaires pour régler l'instrument, et pour donner à la ligne de visée l'inclinaison variable qui lui convient.

183. *Clisimètre de Burnier.* Celui-ci donne moins de précision que le précédent et que l'éclimètre adapté à la boussole et dont nous donnerons bientôt la description : il a même plus d'analogie avec ce dernier, puisque, comme lui, c'est l'angle d'inclinaison qu'il fait connaître. Son avantage marqué sur les autres consiste à pouvoir être employé à la main sans établissement fixe. Il se compose d'une boîte rectangulaire creuse MNOP (*fig.* 155) dans laquelle est adapté un arc de cercle gradué DE. Son centre C sert de point de suspension à une aiguille AB dont les deux parties AC,CB inégales en longueur ont même poids. Cette aiguille, dont la pointe A est recourbée de manière à venir, en avant de l'arc gradué, marquer le chiffre auquel elle correspond, a la propriété de rester horizontale parce qu'elle est suspendue par un point appartenant à la perpendiculaire élevée par le centre de gravité sur la direction de l'aiguille, et abstraction faite des oscillations que cause le mouvement de la main. A la hauteur du centre C, et sur une des faces de la boîte, sont pratiquées deux échancrures VY qui servent de visières et donnent une horizontale quand l'aiguille marque zéro. Cela posé, on conçoit aisément que, pour avoir l'inclinaison à l'horizon d'une ligne donnée, il suffit d'incliner la boîte de manière que la ligne VY soit dans cette direction, et de lire la graduation que marque l'aiguille. Pour éviter de noter si l'angle est d'ascension ou de dépression, on pourrait, comme nous l'avons déjà indiqué ailleurs, marquer 100^g au lieu de zéro, ce qui donnerait les distances zénithales ou compléments des angles à l'horizon. Si l'amplitude de l'arc DE est de 60^g, quantité bien suffisante, le chiffre extrême en D serait 70, et celui du point inférieur E serait de 130^g.

L'instrument aurait pu être construit de telle sorte que le point C fût le milieu de l'aiguille, qui alors n'eût pas été renflée en B, mais on aurait eu un arc de cercle de plus petit rayon et, conséquemment des divisions plus petites. Pour pouvoir, quand les circonstances le permettent, établir ce clisimètre sur un pied, il porte une douille RS pivotant autour de la charnière S.

La seule vérification que comporte cet instrument est celle qui consiste à s'assurer que la ligne visée VY est parallèle au rayon o'. Elle s'effectue en opérant successivement à gauche et à droite, et considérant le même point qui doit donner deux lectures égales, mais de signes contraires ou supplémentaires, suivant le système de graduation adopté.

On construit également des niveaux à perpendicule analogues au clisimètre de Burnier, dans lesquels l'aiguille horizontale est remplacée par une autre aiguille constamment verticale.

Les lectures sont faites, dans ce cas, au moyen d'un miroir placé obliquement.

184. Éclimètre. *Description, usage, vérification et rectification de l'instrument. Registre d'observations. Détermination des cotes et tables qui en abrègent le calcul. Correction relative à la hauteur de l'instrument.*

L'éclimètre employé dans les nivellements topographiques s'adapte à la boussole ordinaire. Il se compose de deux arcs A et B (*fig.* 156), divisés en grades et demi-grades. Ils sont liés entre eux par une règle qui s'appuie contre l'une des faces latérales de la boîte de la boussole, et qui a la faculté de pivoter autour d'une vis située à son centre C et engagée dans l'épaisseur de cette boîte. Sur la face divisée du limbe se meut une lunette OL maintenue par deux collets EF,DG que porte l'alidade DE. La tige N supporte la boussole et l'éclimètre; c'est autour d'elle que s'effectue le mouvement horizontal qu'imprime la main de l'observateur au moyen du large disque R.

La vis M arrête le mouvement du genou. Sur les faces opposées aux graduations est appliqué un niveau à bulle d'air. L'éclimètre porte ordinairement trois vis de rappel; la première sert à amener exactement la croisée des fils de la lunette sur l'objet visé, sans déranger le limbe; elle tourne dans deux pinces K et H; celle-ci est maintenue invariablement au plan de l'alidade qui porte les verniers; l'autre est fixée au plan du limbe ou le laisse glisser entre ses deux joues, suivant qu'une vis non apparente sur la figure est serrée ou libre. Dans ce dernier cas, on fait tourner autant qu'on le veut la lunette autour de C pour approcher l'axe optique de la direction du point de mire; quand il en est ainsi, et que l'on veut pointer avec précision, on serre la pince et l'on tourne la vis qui passe en H et K à travers les deux pinces. Dans la cavité pratiquée en K est placé un écrou que traverse la

vis. Dans la cavité H roule son renflement sphérique. La seconde vis de rappel sert à faire mouvoir tout l'instrument dans le plan vertical, et, par conséquent, à caler le niveau. La troisième, placée à l'une des extrémités du niveau, est employée dans la rectification de l'instrument.

Supposons que le niveau étant calé, le diamètre o—200 du limbe soit horizontal ; on amènera le plan du limbe dans le plan vertical qui contient l'objet à viser, on le mettra lui-même vertical à l'œil, et on calera le niveau par le moyen de la seconde vis qui entraîne tout l'éclimètre. Par suite de notre hypothèse, le diamètre o—200 sera horizontal, et si l'on pointe l'axe optique sur l'objet, par le moyen de la pince et de la vis de rappel, l'angle à l'horizon sera celui marqué par la graduation placée à l'extrémité du diamètre parallèle à l'axe optique (*fig.* 156 *bis*). Mais comment saura-t-on que le o du vernier qui sert à faire cette lecture est sur ce diamètre ; si au lieu d'être placé en D, il est en D', il faudra que le o du limbe passe de o en o', de telle sorte oo'=DD', c'est-à-dire, que l'hypothèse que nous avons faite deviendra la suivante ; l'angle formé par le diamètre o—200 du limbe et l'horizontale, lorsque le niveau est calé, doit être de même sens et égal à celui que le diamètre o du vernier forme avec l'axe optique de lunette.

Vérifications. 1° La rotation de la lunette, qui entraîne le vernier, doit se faire autour du centre du limbe gradué, pour que les angles lus soient bien les angles décrits. Il faut, pour s'assurer que cette condition est remplie, suivre la marche des deux zéros des verniers, et voir s'ils parcourent des angles égaux ; la deuxième vérification exige même que les lectures faites soient identiques pour toute inclinaison.

2° Il faut que l'angle des o du limbe et de l'horizontale soit égal à celui des o des verniers et de la ligne de visée, lorsque le niveau est calé. Pour s'en assurer, on retourne l'instrument de 200^g dans le sens horizontal, après avoir obtenu un premier angle à l'horizon ; on ramène vers soi l'oculaire par un mouvement de la lunette autour du centre du limbe, et on vise de nouveau après avoir calé le niveau. En suivant la marche des opérations que nous venons de décrire sur la figure 156 *ter*, on voit que, pour l'égalité des deux angles α (qui sont, en effet, les mêmes dans la nature, puisqu'on a visé deux fois le même point), il faut que l'arc HL'=l'arc HL, ou que les deux lectures OV,OV'

soient les mêmes, puisque les arcs HO,LV,L′V′ sont égaux par hypothèse.

On voit sur la figure, que nous avons alterné les deux verniers sans nous préoccuper du second zéro du limbe, ce qui a exigé seulement que les *o* des verniers soient sur le même diamètre; il pourrait donc suffire que cette condition fût remplie pour les verniers; mais si les quatre zéros ne forment pas deux diamètres, la première vérification n'a pas pu faire connaître celui qui existe réellement. Il est donc indispensable, comme nous l'avons annoncé, que les lectures faites avec les deux verniers soient toujours identiques.

Si la vérification que nous avons indiquée plus haut ne conduit pas à un résultat favorable, il faut, pour établir l'égalité des angles que nous avons déjà mentionnés plusieurs fois, mettre le *o* du vernier sur la moyenne des deux lectures, viser le point par le mouvement général, et caler le niveau par son mouvement particulier. Cette opération, qui s'appelle *règlement de l'éclimètre*, exige plusieurs tâtonnements.

Modifications. On a fait subir à l'éclimètre deux modifications.

La première consiste à inscrire 100ᵍ au lieu de *o*, et à supposer le *o* des graduations sur la perpendiculaire à l'ancien diamètre à partir duquel on comptait les angles.

La lecture donne ainsi immédiatement les distances zénithales, ce qui est avantageux pour éviter la confusion résultant d'angles d'ascension et d'angles de dépression.

La seconde modification est moins avantageuse. Pour avoir de plus grandes divisions sur le limbe et, par suite, une plus grande approximation dans la lecture, on a imaginé de mettre le centre des graduations à une des extrémités de l'instrument. C'est là son seul avantage, car la lunette ayant même longueur, donne le même pointé. En opposition à cet avantage obtenu sur la lecture, on a donné naissance à deux inconvénients graves. Le premier provient de la difficulté de vérifier si l'axe de rotation se trouve exactement au centre du limbe; on peut tenter cette vérification en suivant la marche du vernier unique, qui doit conserver la même position longitudinale par rapport aux divisions du limbe; on ne peut reconnaître ainsi que des imperfections graves; cette vérification peut ressortir encore indirectement du règlement de l'éclimètre qui, réglé pour une certaine distance zénithale, ne le sera pour une seconde, différente de la pre-

mière, qu'autant que la condition relative à la rotation sera satisfaite.

Le second défaut de cet instrument ainsi modifié provient du procédé employé pour le régler. Ce procédé, que nous allons exposer un peu plus loin, exige un déplacement et l'observation, aux deux extrémités de la ligne parcourue, des distances zénithales d'une même droite. Le plus souvent, cette ligne sera courte, et un léger déplacement, presque inévitable, dans la position des deux points qui servent alternativement de station et de mire, produira plus tard une erreur beaucoup plus considérable, lorsqu'on opérera sur une base toujours beaucoup plus grande que celle employée pour la vérification.

La manière d'opérer le règlement de cet *éclimètre sans retournement* est la suivante.

Soient Δ et Δ' les distances zénithales réciproques observées de deux points A et B (*fig.* 172) : soient δ et δ' les mêmes quantités corrigées de l'erreur de collimation que nous désignerons par e et de celle de réfraction, qui, représentée par r, est égale à 0,08 C (*Voir* le § 441 du livre V).

Nous aurons

$$\Delta = \delta + e - r;\ \Delta' = \delta' + e - r; \quad \text{d'où} \quad \Delta + \Delta' = \delta + \delta' + 2e - 2r;$$

$$\text{or} \quad \delta + \delta' = 200 + C \quad \text{donc} \quad \Delta + \Delta' = 200 + C + 2e - 2r;$$

Tirons-en la valeur de e, elle sera

$$e = \frac{\Delta + \Delta'}{2} - 100^g - \frac{C}{2} + r = \frac{\Delta + \Delta'}{2} - 100^g - C\left(\tfrac{1}{2} - 0{,}08\right) =$$

$$\frac{\Delta + \Delta'}{2} - 100^g - 0{,}42\,C.$$

Pour connaître la valeur de l'angle au centre C, il suffit de se rappeler qu'un grade sur la terre est égal à 100000^m, une minute à 1000^m et une seconde à 10^m. Δ et Δ' sont les lectures fournies par les deux observations réciproques, donc tout est connu dans la formule. Le signe qui affectera le résultat du calcul indiquera dans quel sens doit être faite la correction.

Il est plus avantageux de régler simultanément deux éclimètres, par un procédé analogue : les deux instruments étant placés à une distance convenable, on dirige l'axe optique de la lunette de l'un d'eux sur l'objectif de celle de l'autre, et récipro-

quement, de manière que ce sont bien réellement deux distances zénithales réciproques que l'on observe.

Si e, e' représentent les erreurs de collimation des deux éclimètres, on a $\Delta = \delta + e - r$, $\Delta' = \delta' + e' + r$

d'où $e + e' = \Delta + \Delta' + 2r - (\delta + \delta')$. $e + e' = \Delta + \Delta' - 2C - 200 + 2r$.

Connaissant la somme des deux erreures, on trouvera chacune d'elles, si l'on connaît aussi leur différence. Rien n'est plus facile que de la trouver, puisqu'il suffit de prendre la même distance zénithale avec les deux éclimètres. Soient d et d' les nombres qu'ils indiquent, il est évident que $e - e' = d - d'$,

et qu'ainsi $$e = \frac{\Delta + \Delta' - 200 - C + 2r}{2} + \frac{d - d'}{2}$$

$$e' = \frac{\Delta + \Delta' - 200 - C + 2r}{2} - \frac{d - d'}{2}$$

M. le lieutenant-colonel Hossard, qui s'occupe souvent de questions scientifiques et toujours avec fruit, a indiqué, il y a quelques années, dans une notice sur le nivellement, une méthode qui permet de régler un éclimètre du dernier modèle, au moyen d'une seule distance zénithale et sans changer de station.

Voici comment il s'exprime en parlant de ce procédé :

« Après avoir pris la distance zenithale d'un point, l'observa-
« teur fait exécuter à l'instrument une demi-révolution zéni-
« thale, de manière à ce que l'oculaire soit du côté de l'objet :
« puis, plaçant l'œil à environ un mètre ou un demi-mètre en
« arrière de l'objectif, afin d'apercevoir l'image des fils dans le
« cercle de cet objectif, il lui est facile, tout en maintenant la
« bulle du niveau dans ses repères, d'amener l'objet, vu à l'œil
« nu, presqu'en contact avec le cercle extérieur de la lunette
« et sur le prolongement de la génératrice latérale, de telle sorte
« que le point de mire soit aussi bien que possible sur l'horizon-
« tale passant par le point d'intersection des fils ; puis, dans cet
« état, il fait une seconde lecture. Si l'instrument n'était affecté
« d'aucune erreur, la somme des deux distances zénithales don-
« nerait 200^g, et l'erreur de collimation serait dans tous les cas,

$$e = \frac{\Delta + \Delta' - 200^g}{2}$$

« Pour se convaincre de la vérité théorique de cette méthode, il

« suffit de se rappeler que le réticule étant placé au foyer prin-
« cipal de l'objectif, les rayons lumineux émis par leur point
« d'intersection sortiront de cet objectif parallèlement à l'axe
« optique de la lunette, et que par conséquent l'image de la
« croisée des fils sera toujours vue par l'œil dans une direction
« parallèle à celle suivant laquelle on la verrait par l'oculaire.

« L'exactitude, dans la pratique, dépend du degré d'apprécia-
« tion que peut apporter l'observateur opérant à œil nu. Si le
« point de mire est bien tranché, il est probable que l'erreur com-
« mise sur la valeur de la collimation ne dépassera pas deux
« minutes centésimales : ce qui suppose un observateur capable
« d'apprécier quatre minutes.

« Si l'objet se projette en terre ou près de l'horizon, il faut
« coller un petit papier sur l'œilleton de la lunette, afin que
« l'image du réticule se dessine sur un fond blanc.

« Pour ces observations, il est bon que la monture de l'objec-
« tif n'ait pas un diamètre plus grand que celui de la lunette,
« ou du moins que la saillie soit limée à fleur de ce tube du
« côté où doit venir s'appliquer l'image directe de l'objet. »

Quelle que soit la forme de l'éclimètre, l'observation étant faite, pour lire l'angle mesuré, on compte le nombre de grades et de demi-grades compris entre les zéros du limbe et du vernier. Dans la figure 173, nous trouvons $2^g,50'$, plus une petite quantité α qu'il faut apprécier. Pour cela, on suit de l'œil les divisions du vernier jusqu'à celle qui coïncide avec une du limbe : ici, c'est la sixième. Il est évident qu'alors $\alpha = 12'$ si le vernier est divisé en 25, car, la sixième coïncidant, la cinquième diffère de 2', la quatrième de 4, la troisième de 6, la seconde de 8, la première de 10, et enfin, comme nous l'annoncions, celle cotée zéro est en avance de 12'. Quand on a recueilli tous les angles et que l'on connaît les distances horizontales, on trouve les différences de niveau au moyen de la formule $dN = K \text{ cotang.} \delta$, que l'on calcule par logarithmes, ou plus simplement avec des tables à double entrée dont les arguments sont K et δ. La hauteur de l'instrument entraîne une correction qui varie de signe suivant que l'observation se fait au point dont la cote est connue, ou à celui que l'on veut déterminer, et cela indépendamment de l'amplitude de δ. La hauteur de l'instrument s'ajoute au résultat du calcul dans le premier cas, et s'en retranche dans le second.

Pour recueillir les observations avec méthode, on peut modifier le registre indiqué au § 168, et le composer de sept colonnes :

dans la première, on désigne la station ; l'angle observé dans la deuxième ; la troisième contient les noms des points visés, et la quatrième la distance horizontale ; on inscrit les angles à l'horizon ou au zénith, dans la colonne suivante ; si l'on emploie les ascensions et dépressions, il faut consacrer les cinquième et sixième colonnes à leur inscription ; enfin, la dernière est destinée à recueillir les remarques que l'on peut avoir à faire.

185. *Problèmes de nivellement.* L'objet du nivellement réduit à son terme le plus simple, comme nous l'avons dit, est de trouver la différence de niveau entre deux points. Lorsque l'on peut arriver à ce résultat au moyen d'une seule station, le *nivellement est simple ;* il est dit *composé* dans le cas contraire.

Le meilleur moyen d'arriver à ce résultat repose sur l'emploi des instruments donnant la ligne du niveau apparent ; parmi ceux-ci, il faut accorder la préférence à ceux qui sont munis d'un niveau à bulle d'air, les autres étant d'un pointé très-défectueux.

Les clisimètres peuvent donner cette même ligne du niveau apparent, lorsqu'on leur fait marquer la lecture 0.

Supposons qu'on veuille trouver la différence de niveau entre deux points A et B (*fig.* 157). On établit l'instrument en *s* dans une position intermédiaire, dans le plan vertical AB ou en dehors, peu importe ; on fait porter la mire successivement en A et B ; on lit les chiffres correspondant aux deux positions, et l'on a, en les désignant par α et β, $dN = \alpha - \beta$.

On aurait pu se placer au point le plus élevé A (*fig.* 158), et se contenter d'une seule lecture ; mais alors, il aurait fallu tenir compte de la hauteur de l'instrument, hauteur variable avec l'écartement donné aux pieds du support. Le premier mode d'opérer évite cet inconvénient.

Nous avons expliqué, au § 170, qu'à la différence ainsi obtenue, il fallait encore ajouter la différence du niveau vrai au niveau apparent, et lui retrancher une petite quantité provenant de l'influence de la réfraction ; la correction provenant de ces deux causes est représentée par le terme $\frac{0,42\,K^2}{R}$, K étant la distance des deux points, et R le rayon terrestre. En cherchant directement la valeur de ce terme, ou en la prenant dans des tables calculées à l'avance, on trouve qu'elle est de $0^m,0007$ pour une distance de 100^m, et par suite $0^m,0028$ pour une distance de 200^m.

Les distances séparant deux positions de la mire sont généralement très-petites, pour peu que le terrain ne soit pas horizontal, car il faut que la ligne de visée ne passe pas au-dessus d'une des mires, ni au-dessous de l'autre. On prend, volontairement même, ces distances très-courtes, afin de laisser peu d'importance aux erreurs inévitables de pointé.

Il n'y a donc presque jamais lieu de tenir compte de la correction que nous avons mentionnée plus haut. Si cependant, pour une cause quelconque, mais nécessairement en pays très-plat, la distance devenait assez grande pour qu'on dût avoir égard à cette correction, on pourrait : 1° annihiler son influence en stationnant en un point situé, approximativement, à distances égales des deux points nivelés ; 2° ou corriger les deux lectures α et β au moyen de la formule citée $\frac{0,42\,K^2}{R}$, pour laquelle il faudrait connaître les valeurs des bases K, tout au moins d'une manière approximative. On a pu remarquer que l'opération directe, habituellement suffisante, ne supposait pas connue la longueur des côtés.

186. *Lever le profil d'un terrain*, c'est chercher les différences de niveau des divers points de l'intersection de ce terrain avec une surface cylindrique à base quelconque. Si les points à niveler ne sont pas désignés d'avance, et si le terrain n'est que légèrement ondulé, on prendra les distances *ac*, *cd*, *de*, etc., égales entre elles, et l'on fera placer la mire en A, C, D, etc. (*fig.* 160). On fera un croquis, comme l'indique la figure, et l'on inscrira les longueurs trouvées de A*a*, C*c*, etc. Si l'on n'a pas pu prendre égales les quantités *ac*, *cd*, etc., on les porte telles qu'on les a trouvées. Il est nécessaire de relever aussi la projection du profil lorsqu'il n'est pas situé dans un même plan vertical. Souvent, lorsque les différences de niveau sont trop peu sensibles, on emploie, en les rapportant sur le papier, pour les hauteurs, une échelle double, triple, quelquefois décuple de celle adoptée pour les distances horizontales.

187. *Nivellement composé.* Si l'opération n'a pas pu se faire d'une seule station et si rien ne précise à l'avance les points du profil dont il faut trouver les cotes, on fait placer la mire aux endroits qui sont propres à faire mieux sentir les inflexions, et l'on stationne en des positions intermédiaires.

Soient A,B,C,D, etc. (*fig.* 161), ces points, et S,S′,S″, etc., les différentes stations : à chacune d'elles on donne un coup de niveau d'arrière et un d'avant, de manière que, sur chacune des verticales de B,C, etc., il y aura deux coups de niveau qui lieront les opérations faites aux différentes stations.

On tracera le profil sur le papier (*fig.* 162), en portant sur l'horizontale af, les projections ab, bc, cd, etc., réduites à l'échelle, des portions AB,BC, etc., du profil ; on abaissera les verticales Aa, Bb, Cc, etc., et l'on inscrira à droite de chacune d'elles la cote d'arrière correspondante, et à gauche la cote d'avant : on fera séparément les deux sommes dont la différence sera précisément celle du niveau des points extrêmes. En effet, considérant les quatre premiers points A,B,C,D, la différence entre A et D sera $AO = Am + no - mn$. Mais $Am = \alpha - \beta$; $no = \alpha'' - \beta''$; $mn - \beta' - \alpha'$, en désignant par $\alpha, \alpha', \alpha''$ les coups de niveau d'arrière, et par β, β', β'' ceux d'avant ; il viendra donc, comme nous l'avons annoncé, en substituant

$$AO \text{ ou } dN = (\alpha - \beta) + (\alpha'' - \beta'') - (\beta' - \alpha') = (\alpha + \alpha' + \alpha'') - (\beta + \beta' + \beta'')$$

Si le nivellement est un peu long, on ne pourra bien compter sur son exactitude qu'après avoir répété l'opération, la première fois de A en E, la seconde de E en A.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que les points soumis au nivellement étaient situés au-dessous du plan horizontal fourni par le liquide de l'instrument. Il peut arriver pour quelques-uns d'entre eux, dans des circonstances très-rares à la vérité, qu'il n'en soit pas ainsi. Supposons que dans le profil à suivre se rencontre un mur de terrasse BC (*fig.* 163). La différence de niveau entre les points A et B sera, comme précédemment, la différence des deux coups de niveau donnés en S ; mais, pour comparer B et D, on voit que ce sera la somme des deux lectures qu'il faudra prendre. On peut déduire de là cette règle que, dans le cas général α, α', etc., β, β', etc., qui servent à déterminer dN, doivent être considérés comme de même signe, et qu'il faut affecter des signes contraires les coups de niveau d'avant et d'arrière d'une station, quand les deux points visés ne sont pas placés du même côté par rapport à la surface du niveau de l'instrument.

188. *Nivellement continu.* On voit à l'inspection de la *fig.* 161 que tous les points du nivellement sont rapportés deux à deux à

des plans différents. Il est souvent plus commode de les rapporter tous au même, afin de connaître immédiatement la différence de niveau de deux quelconques d'entre eux. Pour cela, on imagine un plan général de comparaison situé au-dessus ou au-dessous du profil d'une quantité assez grande pour qu'il ne le coupe pas. Sa position est déterminée par la distance arbitraire à laquelle on le snppose situé par rapport à un point quelconque du profil, au point de départ A, par exemple (*fig.* 161). A*a*,B*b*',C*c*', etc., B*b*,C*c*, etc., sont les cotes obtenues par les coups de niveau d'arrière et d'avant; c'est ce que précédemment nous avions désigné par $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, etc. On retranche A*a* de la cote de départ, si le plan est au-dessus, et la différence est la cote du plan *ab* du liquide pour la station S : en y ajoutant B*b*, on a celle de B; puis de celle-ci, retranchant B*b*', on obtient celle du second plan particulier *b'c* appartenant à la seconde position S' de l'instrument. Celle de C s'en conclut en y ajoutant C*c*, et ainsi de suite. Nous rendrons cela plus clair en donnant la forme du registre dans lequel on fait les calculs, et en y insérant un exemple, après toutefois avoir fait remarquer qu'il ne suffit pas toujours de connaître uniquement le nivellement de la sinuosité du terrain qui suit le profil : souvent il est très-important, comme dans les tracés de routes, canaux, aqueducs, etc., de savoir comment se comporte le terrain à droite et à gauche de l'axe de nivellement. Pour y parvenir, on fait des nivellements en travers : ainsi, par exemple, si A, B, C, D (*fig.* 164), sont des stations de l'instrument appartenant au nivellement en long, il pourra être nécessaire d'y rattacher les nivellements en travers FEBGH, MLCKI. Ceux-ci s'exécutent, comme nous l'avons déjà dit, et se rattachent à l'opération principale par les cotes B et C.

189. Le registre de nivellement peut se mettre sous la forme indiquée par la *fig.* 165 : il se compose de six colonnes. Dans la première s'inscrivent les stations de l'instrument : on les désigne quelquefois par la suite des nombres naturels écrits en chiffres romains : nous les avons exprimés par S, S', etc.; au surplus, la notation est chose fort indifférente, le point essentiel, c'est l'ordre et la clarté. Dans la seconde colonne, on inscrit la désignation des points sur lesquels on donne des coups de niveau : on ajoute parfois quelque indice à la notation du point de repère commun à deux stations pour le faire plus aisé-

ment reconnaître. Ici, la même lettre reproduite aux deux stations ne nous paraît laisser aucun doute. En inscrivant plus de deux points pour chaque station, nous avons supposé qu'à chacune d'elles on avait déterminé les cotes de quelques points en dehors de la ligne que l'on parcourt. La troisième colonne contient les lectures faites sur la mire. La plupart des chiffres que nous y avons insérés indiquent des longueurs plus grandes que les mires usitées, mais il ne s'agit ici que de donner un type de calcul. Dans la quatrième, on écrit les cotes qui marquent à quelle distance du plan général de comparaison est située la surface du liquide de l'instrument dans chacune de ses positions particulières. La cinquième est consacrée à l'inscription des cotes définitives des points nivelés. On voit que dans l'exemple de la *fig.* 165, nous avons supposé que le plan de comparaison était à 100^m au-dessous du sol en A. Ce sera, si l'on veut, la surface des eaux moyennes de la mer, adoptée pour plan général de comparaison dans les travaux de la nouvelle Carte de France. Enfin, la sixième et dernière colonne est destinée aux remarques que croit devoir y placer l'opérateur, pour l'intelligence de ses travaux.

On conçoit aisément que la marche que nous venons d'indiquer n'est pas absolue : nous plaçons ci-dessous un exemple des dispositions adoptées par le Corps des ponts et chaussées et par l'École d'application de Metz. Dans l'un et l'autre, le plan général de comparaison est pris au-dessus du terrain.

Ponts et chaussées.

Cote du point 1.		200^m,000
Coup d'arrière.	—	0 ,655
Cote du plan de nivellement de l'instrument.		199 ,345
Coup d'avant.	+	2 ,115
Cote du point 2.		201 ,460
Coup d'arrière.	—	0, 524
Cote du deuxième plan de niveau.		200 ,936
Coup d'avant.	+	2 ,087
Cote du point 3.		203 ,023

École de Metz.

NUMÉROS des stations.	HAUTEURS du voyant.	Différence de niveau en +	Différence de niveau en —	COTES de niveau.	OBSERVATIONS.
1	0m,655	1m,460	»	200m,000	
2	2 ,115			201 ,460	
2	0 ,524	1 ,563	»		
3	2 ,087			203 ,023	
3	0 ,772	0 ,957	»		
4	1 ,729			203 ,980	
4	2 ,342	»	1m,675		
5	0 ,667			202 ,305	

190. Les clisimètres, en tête desquels nous pouvons placer celui de Chézy, sont généralement employés à trouver l'inclinaison du terrain ou à lui en assigner une.

Pour tracer sur le terrain une ligne d'une inclinaison donnée, on se transporte au point de départ A (*fig.* 166 et 167), établissant dans sa verticale le trou de la petite pinnule (nous supposons qu'on emploie le clisimètre de Chézy). On place l'index de la grande pinnule sur la division qui indique la pente demandée: on fait placer en avant un jalon de la hauteur du trou de la petite pinnule au-dessus du sol, puis on le fait porter d'un côté et d'autre, jusqu'à ce qu'après plusieurs tâtonnements, la ligne de visée passe par le milieu du voyant. Le pied B du jalon est un point du terrain appartenant à la direction cherchée. Si l'on doit opérer dans un alignement donné, on fait hausser ou baisser le voyant jusqu'à ce qu'il effleure la ligne de visée, et la quantité dont il aura fallu lever ou baisser par rapport à sa première position, indiquera la hauteur ou la profondeur du remblai ou du déblai.

S'il s'agit de mesurer la pente du terrain dans une direction assignée, on prend encore une mire de la hauteur de l'instrument; on la fait porter dans la direction à une distance qui permette de bien distinguer la ligne du voyant; on fait glisser dans son châs-

sis la grande pinnule mobile, jusqu'à ce que la ligne de visée coupe en deux le voyant. Le chiffre auquel correspond alors l'index exprime quelle est la pente du terrain. Il est évident que l'on emploie l'oculaire de la petite ou de la grande pinnule, suivant que le point visé est au-dessus ou au-dessous du niveau de l'observateur.

191. *Des sondes.* Un nivellement, pour être complet, doit embrasser aussi les cotes du terrain couvert par les eaux. C'est au moyen de sondes que l'on se procure ces cotes.

Si les eaux sont stagnantes, il suffit d'avoir les cotes relativement à leur niveau supposé connu. Si l'eau est guéable, un homme entre dedans et sonde avec une mire graduée ; on détermine par recoupement les différentes positions qu'il occupe, de deux points connus du rivage. Si l'eau est trop profonde, on se sert d'une barque et d'une sonde, c'est-à-dire d'un cordeau à l'extrémité duquel est suspendu un poids. Les points de sonde sont, comme dans le cas précédent, déterminés par deux observations simultanées. Si les deux observateurs sont dépourvus d'instruments, ils emploient la méthode des alignements.

Supposons connus les points A,D,G,E,C,I (*fig.* 168). Le premier observateur pourra, partant de A, se diriger sur D et s'arrêter en B au moment où il sera sur l'alignement du canot en S et d'un point connu C : la distance AB étant mesurée, on pourra tracer la projection de BC sur le plan. Le second observateur marchant de G en E s'arrêtera de même quand il sera parvenu en H sur l'alignement SI qui, reporté sur le papier, donnera, par son intersection avec BC, la position du canot, et par conséquent le point où la cote doit être inscrite.

Si la surface des eaux à sonder est peu spacieuse ou peu large, on tend, d'un bord à l'autre, une corde dans les directions connues. Cette corde peut être graduée, et, dans ce cas, on fait couler la sonde à chaque division. Par ce moyen, on peut obtenir une connaissance parfaite des formes du terrain submergé.

C'est surtout aux approches des côtes qu'il est essentiel de connaître la profondeur de la mer et la nature du fond ; c'est encore au moyen des sondes que l'on y parvient.

L'instrument employé à cet usage est composé du plomb et de la ligne. Le plomb de sonde est une pyramide tronquée (*fig.* 169), à la base de laquelle on pratique un creux de $0^m,05$ environ de



profondeur pour y mettre du suif. A la base supérieure est fixé un crochet auquel on attache la ligne, qui a ordinairement 200^m de longueur. Le plomb de sonde pèse de 5 à 100 livres. Le suif est destiné à prendre l'empreinte des roches, à retenir du sable ou de la vase, et à faire ainsi connaître la nature du fond. Pour avoir sur le plan les positions du canot, on peut prendre, au moyen de la boussole à réflexion ou de celle de Burnier, les angles que forment entre eux deux ou trois objets situés sur le rivage. Les oscillations qu'éprouve ordinairement l'embarcation rendent cette méthode peu sûre.

On obtient plus de précision par les opérations simultanées faites par deux personnes à terre, et qui, à un signal donné par celui qui opère dans la barque, dirigent chacune un rayon visuel sur un point de mire tel qu'un drapeau. Ici encore, il est assez difficile de saisir l'instant précis du signal, et d'ailleurs il faudrait trois observateurs pour qu'il y eût vérification.

Une autre méthode, préférable encore, consiste en ce qu'un observateur soit embarqué, muni de trois instruments à réflexion, trois sextants par exemple. A l'instant où le plomb de sonde prend terre, il observe, avec l'un des instruments, l'angle entre deux points connus de la côte sans s'occuper de le lire ; il observe rapidement avec un autre sextant l'angle entre l'un de ces points et un troisième également connu ; le dernier instrument est, de la même manière, employé par lui à mesurer le troisième angle que fournissent les trois points visés combinés deux à deux. C'est alors seulement que l'observateur lit les angles et construit la position au moyen des segments capables. Si, comme il peut arriver, les deux circonférences se coupaient sous un angle très-aigu, il devrait se rappeler que la ligne qui unit les deux centres est perpendiculaire à la corde commune aux deux circonférences et la partage en deux parties égales.

Les sondes ainsi obtenues ne sont pas celles que l'on inscrit sur les cartes hydrographiques, puisque la mer variant sans cesse de hauteur, il ne peut exister d'ensemble entre les opérations faites à des instants différents. On les ramène à la surface de basse mer aux équinoxes. Pour opérer cette réduction, il faut connaître de combien la mer était élevée au-dessus de ce niveau au jour et à l'heure auxquels on a sondé. On fait usage pour cela de l'échelle des marées ; c'est un long madrier disposé verticalement à l'entrée des ports, sur lequel est tracé le niveau de la basse mer des équinoxes et son élévation successive de quart

d'heure en quart d'heure, en sorte qu'en notant l'heure précise à laquelle on a mesuré chaque sonde, on aura de suite par l'échelle la plus voisine du lieu de l'opération la quantité qu'il faut ajouter. Quand on n'est pas à portée d'une telle échelle, on en fait élever une provisoire sur le rivage; on y trace les hauteurs de la mer de 15 en 15 minutes, on rapporte les sondes mesurées au point le plus bas de cette échelle, et plus tard, on tient compte de la différence de hauteur de ce terme de comparaison à l'échelle des marées la plus voisine. Si l'on n'a pas de goniomètre à sa disposition, on pourra encore déterminer d'une manière approchée les stations par alignement, connaissant d'avance la position de quelque point remarquable en mer, comme une pointe de roc, une balise, un fort, etc. On s'y transportera, puis on avancera vers un point déterminé de la côte, en comptant les distances entre les stations au moyen du loch.

Si l'on voulait que les sondes du littoral de la France fussent d'accord avec celles inscrites sur la nouvelle carte, c'est-à-dire rapportées au même plan général de comparaison, le niveau moyen de la mer, il faudrait se rappeler que ce niveau, constant pour chaque jour de l'année, est précisément la moyenne entre la plus grande et la plus petite élévation quotidienne, quels que soient les heures de haute et basse mer, l'établissement du port qui varie d'un lieu à un autre en raison des circonstances locales, etc.

Les sondes, dans les cours d'eau, sont de la plus grande utilité, soit pour reconnaître les gués, soit pour calculer le volume d'eau, etc. Pour bien connaître le fond d'une rivière, on pratique un nivellement longitudinal et des nivellements transversaux. Le premier se fait suivant l'axe de la rivière, c'est-à-dire suivant la ligne qui est toujours à égale distance des deux rives : ces distances se comptent et les profils transversaux se font sur les normales à la ligne milieu.

Si AB,AC (*fig.* 170) sont respectivement perpendiculaires aux deux rives, l'angle de ces droites sera le même que celui des bords de la rivière. Soit α cet angle, la normale à l'axe fera avec chacune des lignes AB,AC, un angle $\frac{\alpha}{2}$. Faisant donc en A un angle égal à $100 - \frac{\alpha}{2}$ avec le rivage, on aura la direction du profil transversal dont le point milieu appartiendra au profil longitudinal. Ce que nous disons pour deux rives en ligne droite s'appli-

que également à celles qui sont curvilignes, en les décomposant en petits côtés sensiblement rectilignes.

Pour exécuter le profil transversal, on tend une corde graduée de A en B et l'on sonde à chacune de ses divisions. Afin d'éviter autant que possible l'erreur due à la flexion de la corde, on suspend de forts poids à ses extrémités ou l'on emploie un treuil, si faire se peut. On abandonne ce moyen pour l'un de ceux indiqués précédemment, si le cours d'eau est trop large.

Comme la ligne peut être entraînée par le courant et éprouver une courbure qui donne une indication trop grande, il est bon de calculer la verticale (*fig.* 171) au moyen de la proportion

$$AB : AC :: AD : AE \quad \text{d'où} \quad AE = \frac{AC.AD}{AB}$$

CHAPITRE X.

NIVELLEMENT TOPOGRAPHIQUE ET FIGURÉ DU TERRAIN.

192. Nous avons dit précédemment que la description complète du terrain se composait de deux parties bien distinctes : la projection horizontale, la planimétrie ou la levée et la détermination des ordonnées verticales de tous les points, ou le figuré. L'objet du nivellement topographique est de soumettre à des règles géométriques ce figuré qui jadis s'exécutait d'une manière tout à fait arbitraire et tenant plus ou moins du dessin d'imitation.

C'est ainsi que, dans les cartes anciennes, et dans quelques-unes même d'une date plus récente, les mouvements du terrain étaient figurés par un rabattement sur le plan horizontal ou par une espèce de perspective qu'on appelait *perspective cavalière*. Plus tard, on abandonna ce procédé, qui avait, entre autres inconvénients graves, celui de cacher une grande partie des détails du plan, et l'on exprima la projection horizontale des formes par le moyen de hachures qui indiquaient à peu près le sens des pentes, mais elles n'étaient astreintes à aucune loi, ni pour leur longueur, ni pour leur grosseur, ni même pour leur direction.

On se servait seulement comme auxiliaires des moyens qu'offrent les oppositions de l'ombre et de la lumière dans la nature, ainsi l'on supposait le terrain à représenter éclairé par un faisceau

de rayons lumineux parallèles faisant avec l'horizon un angle de 50ᵍ, et venant du nord-ouest. Cette convention fournissait des effets variés qui faisaient apprécier, jusqu'à un certain point, les relations de hauteur entre les sommités les plus prononcées, et dans les cartes minutes, le travail du lavis venait au secours des hachures tracées préalablement. A mesure que la topographie faisait des progrès, on cherchait à rectifier l'exécution de ces hachures et à les astreindre à certaines conventions. On a fini par les définir rigoureusement sous le nom de lignes de plus grande pente, et enfin par les combiner avec les courbes horizontales.

193. Si l'on prétendait calculer les cotes de tous les points ou obtenir directement tous les points de courbes extrêmement rapprochées, l'opération serait impraticable; on se contente d'un certain nombre qui servent à conclure les autres. Si donc on conçoit le terrain à représenter coupé par une série de plans horizontaux équidistants et assez rapprochés pour que, d'une tranche à l'autre, la ligne droite la plus courte que l'on puisse mener par un point donné, jusqu'aux deux sections, puisse être considérée comme se confondant avec la surface, il est facile de voir que l'on pourra conclure la hauteur verticale d'un point quelconque M (*fig.* 174), de celles des deux tranches qui le comprennent, car si l'on rabat le triangle ABB' formé par la ligne de plus grande pente AB', par sa projection AB et par l'équidistance BB' des plans coupants, le point M se rabattra en M' et sa cote serait évidemment celle du plan inférieur augmentée de MM' qui est égale à l'équidistance BB' multipliée par $\frac{AM'}{A'B'}$ ou par $\frac{AM}{AB}$.

Le problème sera donc ramené à obtenir sur le plan les projections des sections horizontales du terrain. Pour cela, on calculera sur deux bases, s'il est possible, les différences de niveau d'autant de points qu'on pourra, puis on ira de l'un à l'autre en nivelant les profils AB, BC, etc. (*fig.* 175), et marquant sur l'axe du nivellement les points de passage des courbes dont on a assigné d'avance l'équidistance, on repartira de ces points et l'on ira d'un profil AB à un autre AE en nivelant chaque courbe en particulier.

Cette méthode, excessivement longue et pénible, ne peut être employée que dans un espace de terrain très-resserré et pour des plans spéciaux destinés à recevoir des projets de travaux particuliers et levés à une très-grande échelle. La topographie à petites échelles, les levées militaires surtout, exigent des moyens

plus prompts. On se contente de déterminer, comme nous venons de le dire, avec toute l'exactitude possible, les cotes d'un grand nombre de points, particulièrement les plus importants sous le rapport de la forme. On prend aussi de temps en temps les pentes du terrain relativement à l'horizon, et l'on en conclut certains points de passage des courbes. On réunit tous les points qui ont même cote et l'on intercale entre deux points nivelés le nombre de tranches indiqué par leur différenee de niveau. Les inflexions de ees courbes et leur degré de rapprochement entre les points déterminés rigoureusement se déduisent du figuré à vue du terrain. On conçoit donc combien il est important d'exercer son œil à juger aveo précision les ondulations les moins sensibles. Nous allons détailler la marche à suivre dans le nivellement ainsi conçu.

194. La première chose à faire sera de dessiner sur la minute le relief du terrain, en s'aidant pour cela du figuré partiel que l'on a déjà fait autour de chaque station pendant la levée du plan. Pour bien encadrer et saisir chacun des mouvements, on le considérera sous différents aspects, en se transportant sur les points élevés : on marquera avec soin l'origine, la fin et les changements des pentes ; ce premier travail fera reconnaître les parties du terrain uniformément inclinées et celles dont l'inclinaison augmente ou diminue. On devra relever avec la plus scrupuleuse attention les lignes de *faîte* ou de *partage* et les *thalwegs* ou *lignes de réunion des eaux.*

195. Ces deux sortes de lignes que nous allons définir sont, de toutes celles qui servent à figurer rapidement les formes d'une portion du globe, les seules que l'on puisse lever géométriquement, en raison de leurs propriétés caractéristiques. Pour les premières, leur qualification indique assez que de toutes les directions partant d'un point, la ligne de partage est celle qui a le moins de pente, quand on envisage le terrain de haut en bas, de telle sorte que les eaux pluviales qui tombent sur la surface du terrain se séparent suivant cette ligne pour s'écouler à droite et à gauche. De là résulte eneore qu'entre deux plans consécutifs elle est la plus longue de toutes les normales aux sections horizontales. De sa propriété caractéristique, on déduit la manière de la trouver. En effet, l'éclimètre étant placé en un point, on mesure l'inclinaison suivant plusieurs directions, et la plus petite indique la ligne de falte. Ce serait le contraire si l'on était

au bas de la pente et que l'on dût la suivre en montant, car alors la ligne de pente serait la plus inclinée, toute autre direction ferait un plus petit angle avec l'horizon et serait comprise entre la courbe horizontale et la ligne de faîte. Marchant et mesurant sur cette ligne, jusqu'au moment où elle change de direction, une opération analogue en détermine le prolongement et ainsi de suite. Puisqu'elle est la plus longue de toutes les lignes du terrain qui, partant d'un même point, vont aboutir à la section horizontale placée au-dessous, il s'ensuit que sur elle se trouveront les points saillants des courbes, c'est-à-dire, qu'elle sera le lieu géométrique de leurs points de rebroussement. Il en sera de même des *thalwegs :* il est seulement à remarquer qu'ils seront ordinairement beaucoup plus faciles à trouver, parce qu'ils sont indiqués souvent par des rivières, des ruisseaux ou des fossés dans lesquels se réunissent les eaux qui descendent des deux versants. Il faut observer encore ici que la définition d'un thalweg doit exprimer dans quel sens on le considère : si en effet, on l'observe de haut en bas, il est la ligne de plus grande pente : car, en visant à sa droite ou à sa gauche, la direction se rapproche de la courbe horizontale ; quand, au contraire, c'est de bas en haut qu'on l'envisage, il est la ligne de plus petite pente.

Si la surface est telle que l'inclinaison du terrain soit uniforme autour de la station, les normales qui vont rencontrer la courbe inférieure sont toutes de même longueur, et il n'existe pas de ligne de partage. C'est ce qui arriverait sur une demi-sphère (*fig.* 176), ou sur un cône droit (*fig.* 177) : les sections faites dans ces deux solides donneraient des cercles concentriques.

Si nous prenons un cône oblique (*fig.* 178), la ligne de partage SA sera d'autant plus évidente, que l'obliquité de son axe sur le plan horizontal sera plus grande, et les normales en seront aussi d'autant plus inégales de longueur. La figure 178 suffit encore pour faire voir que le maximum de courbure correspond au maximum SA et au maximum SB de longueur des normales. Les propriétés que nous venons de signaler suffisent pour faire sentir de quelle importance sont ces lignes pour obtenir un tracé rationnel des courbes horizontales.

196. Lorsqu'on sera très-exercé au figuré du terrain pour lequel on emploiera les procédés et les signes dont nous parlerons à l'article du dessin topographique, on pourra faire simultanément les deux opérations du dessin à vue et de la recherche des



cotes de niveau. Jusque-là, il est bon de les séparer : on en retirera cet avantage, qu'après la première opération, on saura, d'une manière très-précise, quels sont les points les plus importants à niveler, parce qu'ils caractérisent davantage les formes, et qu'ainsi l'on évitera un grand nombre de tâtonnements et des opérations inutiles.

197. Nous avons donné, §§ 179 et 184, la formule usitée pour le calcul des cotes, et nous avons parlé des tables que l'on y emploie : l'opération est peut-être plus simple encore au moyen d'une table de tangentes, calculée de 5 en 5 minutes pour les dix premiers grades, et de 25′ en 25′ pour les autres jusqu'à 40ᵍ. On n'a qu'une multiplication à faire. Du reste, pour les angles intermédiaires, on fait aussi une interpolation.

Si l'on connaît d'avance les cotes de certains points trigonométriques, on se transporte d'abord et successivement à chacun d'eux pour s'assurer qu'ils s'accordent ensemble, sinon on les rejette. Supposons qu'on n'en ait aucun, on se place à l'un des points de sa propre triangulation, auquel on attribue une cote arbitraire, 100, 0 ou tout autre nombre. On y observe les distances zénithales doubles de tous les autres points du canevas, de ceux du moins qui sont visibles. On emploie, pour cela, la méthode indiquée pour régler l'éclimètre : on lit les deux verniers, et l'on en déduit les distances zénithales aussi parfaites que le comporte l'instrument et, par suite, les cotes de tous les points visés. On opère de même, à chacun des points principaux, pour avoir des vérifications ; puis ensuite, pour les points de détail, on se borne à observer les distances zénithales simples. On se transporte, supposons, au sommet d'un mouvement de terrain d'où l'on découvre plusieurs des points trigonométriques nivelés : on détermine sa position par des alignements, des angles pris sur des repères, etc. ; on prend les distances zénithales de tous les points déjà nivelés visibles et celles d'autres points que l'on juge être importants, et que l'on a déjà remarqués pendant le figuré à vue ; enfin, on relève les angles de pente dans les différents sens où elle paraît uniforme pendant une certaine longueur : tout à l'heure nous verrons dans quel but.

On parcourt de cette manière tout le terrain, en stationnant aux points caractéristiques. On détermine les sommets, plusieurs points des ravins, thalwegs, ruisseaux, etc., les confluents des cours d'eau, leur entrée dans la levée et leur sortie du cadre, les

points où les pentes changent d'intensité, leurs origines supérieure et inférieure. On ne pourra ajouter une grande confiance qu'à ceux qui auront été obtenus par deux observations au moins. Tous les angles observés, la désignation des stations et des points auxquels on ne s'est pas transporté, les hauteurs d'instruments, enfin tous les éléments recueillis sur le terrain, seront insérés dans le registre indiqué § 184.

198. Quand les cotes sont calculées et rapportées, soit au niveau de la mer, soit au point le plus bas du terrain levé, on les inscrit sur la minute; puis, pour tracer les tranches, on part de l'un des points, de A (*fig.* 179) : en ce point, l'on a mesuré les angles de pente suivant AB,AC,AD : on multiplie les cotangentes de ces angles ou les tangentes des distances zénithales qui en sont les compléments, par l'équidistance adoptée, et l'on obtient les distances horizontales des projections de courbes. Ceci est fondé sur les relations qui existent dans un triangle rectangle, entre les deux côtés de l'angle droit et la tangente de l'un des angles. M. le chef d'escadron Maissiat avait calculé des tables qui donnaient immédiatement ce résultat; on y entrait avec l'équidistance et l'angle. M. le capitaine Duhousset, dans son application de la géométrie à la topographie, en a inséré une semblable, modifiée en raison des nouvelles conventions établies pour figurer les accidents du terrain. Si nous supposons que l'équidistance relative à la *fig.* 179 soit 5 mètres, la tranche immédiatement au-dessous de A, dont nous prendrons 63 pour cote, sera 60. Les points de passage *b,c,d* de cette courbe sur AB,AC, AD s'obtiendront en portant sur chacune de ces directions et à partir de A les $\frac{3}{5}$ des distances des courbes, correspondant aux inclinaisons respectives; puis, à partir de *b,c,d*, on portera ces distances horizontales *bb'*, *b*B, *cc'*, *c*C, *dd'*, *d'*D, etc., jusqu'aux points où la pente change; et pour cela, on s'en rapportera au figuré à vue. Réunissant ensuite tous les points qui ont même cote, on arrivera à une expression des courbes horizontales très-rapprochée de la vérité. Pour reproduire les accidents particuliers du terrain qui peuvent exister entre les profils AB,AC, AD, on infléchit les courbes d'après le figuré à vue.

199. Nous terminerons ce qui est relatif au nivellement topographique par quelques remarques sur l'exactitude qu'il comporte et sur les vérifications qui assurent cette exactitude.

On a facilement conclu des paragraphes précédents que le

moyen le plus exact d'effectuer un nivellement est celui qui repose sur la détermination d'une suite de profils, ou sur celle des courbes de niveau suivies pas à pas. Ce moyen, applicable aux travaux du génie militaire ou à ceux qui se rapportent à des projets de construction, ne peut plus convenir, avons-nous dit, lorsqu'il s'agit de lever une carte de quelque étendue. Le nivellement topographique vient alors en aide à l'ingénieur, qui détermine un certain nombre de cotes et qui en conclut indirectement celles de tous les points du terrain levé, par le tracé des courbes. Si on se reporte en pensée à ce que nous avons expliqué relativement à cette dernière opération, on en conclura qu'un tel travail, basé même sur des cotes exactes, n'a pas une précision mathématique ; il ne faut raisonnablement lui demander que des indications approximatives. Pour arriver à ce résultat, les cotes doivent avoir été calculées au moyen d'observations faites elles-mêmes très-exactement, par la formule

$$dN = K \cot.\delta + 0,42.\frac{K^2}{R} + dT.$$

Quelque soin qu'on ait apporté dans les observations, elles seront toujours entachées de quelque erreur.

Pour un nivellement relatif à une levée régulière, le seul instrument à employer est l'éclimètre. Théoriquement, il peut donner les angles avec une grande approximation ; dans la pratique, les résultats seront entachés d'erreurs provenant de plusieurs causes plus ou moins influentes. Ces causes sont les suivantes :

1° Rotation de la lunette autour d'un point différant quelque peu du centre du limbe ;

2° Non verticalité du limbe ;

3° Non parallélisme de l'axe optique et du plan du limbe ;

4° Correction incomplète de l'erreur de collimation ;

5° Imperfection de l'œil et jeu de la lunette (*Optique,—Applications*) ;

6° Lecture de l'angle.

Toutes ces causes combinées entachent les angles d'erreurs plus graves que celles qu'on se croirait, à première vue, en droit de ne pas tolérer.

Influence d'une erreur angulaire. Cette erreur n'a d'influence que sur le terme $K \cot.\delta = K \text{ tang.} H$, en désignant par H l'angle

à l'horizon. Si, au lieu de mettre H dans le calcul de ce terme, on y introduit l'angle affecté d'une petite erreur h, il deviendra, approximativement,

$$K \text{ tang.} H + Kh$$

l'erreur sur la cote sera Kh.

Il sera donc avantageux de se servir de bases petites.

Influence d'une erreur de base. La planimétrie, quelque bien faite qu'elle soit, ne donnera le côté K exactement que par hasard; il sera presque toujours augmenté ou diminué d'une petite erreur k, qui influera sur les deux termes de la différence de niveau; voyons d'abord ce qui aura lieu pour le second. Au lieu de $0{,}42 \frac{K^2}{R}$, on prendra involontairement

$$0{,}42 \frac{(K+k)^2}{R} = 0{,}42 \frac{K^2}{R} + 0{,}42 \frac{2Kk}{R}$$

en négligeant k^2 excessivement petit. L'erreur sur la différence de niveau sera $\frac{2Kk}{R}$, dont le rapport avec le terme lui-même sera $\frac{2k}{K}$.

k sera toujours assez petit par rapport à K, pour que l'erreur résultant du produit du terme $0{,}42 \frac{K^2}{R}$ par le facteur $\frac{2k}{K}$ soit négligeable, puisque nous savons que ce terme est lui-même toujours très-petit.

Il reste à examiner l'influence de k sur le terme principal de la différence de niveau K tang.H.

L'erreur qui en résulte est évidemment

$$k \text{ tang.} H$$

qui sera d'autant plus petite qu'on observera de petits angles à l'horizon.

Influence des erreurs simultanées d'angle et de base. En négligeant la partie qui provient de l'effet des deux erreurs l'une sur l'autre, l'erreur totale sera

$$E = Kh + k \text{ tang.} H.$$

Pour être petite (indépendamment des cas de compensation imprévue), cette erreur exige, outre l'exactitude des opérations, qu'on observe *proche de l'horizon et sur de petites bases.*

Vérifications des cotes et de l'ensemble d'un nivellement. On prend la cote d'un même point sur plusieurs bases, autant que possible, en ne l'admettant que lorsque ses différentes valeurs concordent avec une certaine approximation ; mais, dans ce cas même, en doit-on conclure que la cote est bonne? Non, car il suffit que

$$Kh - K'h' + k\,\text{tang.H} - k'\,\text{tang.H}' < \alpha$$

α désignant la limite tolérée.

Si l'on regardait cette inégalité comme une équation, il y aurait une infinité de systèmes h, h', k, k', pouvant y satisfaire. Si de plus, on suppose à α toutes les valeurs possibles $< \pm$ la différence tolérée, il y aura encore beaucoup plus de chances pour que le système des erreurs réellement commises soit compris dans ceux (en nombre infini) qui satisfont l'inégalité, et cela tout en laissant à h et k, par exemple, des valeurs notables qui donnent une certaine importance à $Kh + k\,\text{tang.H}$, c'est-à-dire à l'erreur commise sur la cote.

Quand, au lieu de deux résultats concordants, on en obtient trois, les probabilités d'exactitude sont plus grandes, car il n'est pas à présumer que les compensations existent toujours ; il peut aussi bien se présenter des aggravations. Remarquons pourtant que certaines causes d'erreur peuvent agir toujours dans le même sens ; il en est ainsi de l'erreur de collimation. Cependant, plus les opérations seront multipliées, pour un même point, plus il y aura probabilité que les erreurs font plus que se compenser et qu'elles sont nulles ou à peu près.

De même, la concordance acquiert une plus grande importance quand elle se rapporte à l'ensemble des opérations multiples d'un travail d'ensemble, car alors il n'est plus admissible que les compensations se soient toujours établies, dans des circonstances très-diverses, avec un instrument réglé plusieurs fois. L'expérience a prouvé qu'on ne pouvait pas demander une concordance moindre que 1 à 2^{m}, pour les différentes cotes d'un même point, obtenues sur plusieurs bases.

Remarquons que cela ne dit pas que la cote est obtenue à 1 ou 2^{m} près ; mais cette approximation, sur la valeur absolue, est d'autant plus près d'être atteinte que l'ensemble du travail est lui-même concordant dans celles des opérations multiples qu'il a effectuées.

Le calcul des cotes sur plusieurs bases a encore l'avantage

d'avertir des erreurs grossières qui auraient pu se produire par inadvertance.

CHAPITRE XI.

DU DESSIN DES CARTES TOPOGRAPHIQUES.

200. Nous avons passé en revue les procédés employés pour déterminer la projection horizontale du terrain considéré dans tous ses détails, et les cotes des points projetés, les unes par un nivellement rigoureux, les autres par interpolation. Les courbes horizontales et équidistantes, que nous avons donné le moyen de construire, résolvent complétement le problème du nivellement, en y joignant toutefois l'expression la plus exacte possible du figuré à vue nécessaire pour rectifier les cotes interposées. Néanmoins on emploie subsidiairement les lignes de plus grande pente pour donner plus d'effet au dessin et faire ainsi mieux juger de suite le relief du terrain. Nous avons, au premier chapitre du livre III, indiqué les propriétés dont jouissent les lignes de plus grande pente : nous rappellerons ici qu'elles sont normales aux sections horizontales, et que leurs projections sont perpendiculaires aux projections de ces sections. Dans la démonstration que nous en avons donnée, nous avons dû considérer seulement un élément de cette normale en supposant les deux courbes assez rapprochées pour que cet élément pût être envisagé comme une ligne droite. L'élément suivant jouit de la même propriété, sans pour cela être sur le prolongement du précédent, et ainsi de suite : leur ensemble formera donc une courbe généralement à double courbure sur le terrain. Elle sera plane, quand les courbes horizontales seront parallèles ; auquel cas sa projection sera une ligne droite, et la même chose aurait lieu, à plus forte raison, dans le cas infiniment rare où le terrain affecterait la forme d'un solide de révolution, tel qu'un cône droit, une demi-sphère, etc.

201. Il n'est vrai de dire qu'un corps grave abandonné à lui-même suivra la ligne de plus grande pente, que pour une première fraction très-petite du temps ; car, ensuite, il se trouve soumis à deux forces : la vitesse acquise dans le premier moment et la nouvelle action de la pesanteur qui l'entraînerait ensuite vers la ligne de la plus grande pente : c'est donc suivant la résultante de ces deux forces qu'il se dirigera dans la seconde por-

tion du temps. Le même raisonnement s'applique à tous les instants consécutifs de la durée de son trajet.

202. Au lieu de tracer les projections des lignes de plus grande pente d'une manière continue, on est convenu de les interrompre à la rencontre des courbes horizontales qui se trouvent ainsi suffisamment indiquées par ces interruptions, surtout lorsqu'on a soin de ne pas prendre les hachures précisément sur le prolongement de celles de la tranche précédente.

203. La longueur des hachures dépendant de l'écartement des plans coupants, on avait d'abord songé à une équidistance constante pour toutes les échelles; mais on a bientôt reconnu que les courbes seraient trop espacées dans les plans à grande échelle ou trop serrées dans le cas contraire. Après plusieurs essais, on est arrivé à faire constant le rapport de l'équidistance à l'échelle, et l'on a adopté $0^m,0005$, c'est-à-dire un demi-millimètre pour l'équidistance réduite.

Il en résulte pour l'échelle de $\frac{1}{5000}$:

$$0^m,0005 = \frac{E}{5000} \quad \text{d'où} \quad E = 0^m,0005 \times 5000 = 2^m,50$$

$$\text{pour } \frac{1}{10000}; \quad 0^m,0005 = \frac{E}{10000}; \qquad E = 0^m,0005 \times 10000 = 5^m.$$

$$\frac{1}{20000} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad E = 10^m.$$

Pour les minutes à $\frac{1}{40000}$ et la gravure à $\frac{1}{80000}$ de la carte de France, les équidistances adoptées sont 10^m pour la première et 20^m pour la seconde, ce qui revient à une équidistance réduite de $\frac{1}{4}$ de millimètre.

De la convention que nous venons d'établir découle un très-grand avantage, c'est de pouvoir comparer la rapidité de terrains représentés sur des cartes d'échelles différentes. En effet, désignant par e l'équidistance réduite et par n (*fig.* 180), une projection de normale, la tangente de l'angle de pente est exprimée par $\frac{e}{n}$ quelle que soit l'échelle. Or, quand sur des plans différents, une même ligne n représente des longueurs doubles, triples, quadruples, etc., sur le terrain, c'est que l'échelle devient elle-même double, triple, quadruple, etc.; et, dans ce cas, en vertu de la convention ci-dessus énoncée, l'équidistance E croît dans le même rapport, et par conséquent l'inclinaison correspondante est toujours la même : donc alors des hachures de même lon-

gueur sur différentes cartes indiquent des pentes égales. Concluant ensuite de tang. (*inclinaison*) $= \frac{e}{n}$ que l'inclinaison est en raison inverse de la longueur de la hachure n, il en résulte que de deux normales comparées (à même échelle ou à des échelles différentes), celle qui est double de l'autre correspond à une pente environ deux fois moindre, et ainsi de suite.

Cette relation entre l'équidistance des différentes échelles est encore avantageuse quand il s'agit de réduire un dessin, puisqu'il suffit de reproduire une courbe sur deux, trois ou quatre, suivant qu'on réduit à la moitié, au tiers ou au quart.

Les longueurs des hachures seront, en raison de ce qui précède,

0m,032 pour 1g, 0,016 pour 2g : 0,0106 pour 3g : 0,0079 pour 4g : 0,0063 pour 5g : 0,0005 pour 50g.

Il serait impossible de tracer des hachures plus courtes que un demi-millimètre : mais aussi les pentes plus rapides que 50g peuvent être considérées comme escarpements et figurées comme telles.

Quant à celles qui correspondent à un grade, elles sont bien difficiles à tracer purement.

On peut éluder la difficulté suivant les circonstances, ou en employant des courbes intercalaires (*fig.* 181), ou en supposant le terrain décomposé en deux portions (*fig.* 182), dont l'une aurait plus de pente, 3g par exemple, et l'autre serait horizontale. Dans le premier cas, les éléments de hachures devront conserver entre eux l'écartement qui conviendrait, si elles étaient tracées d'une manière continue; dans le second, les hachures prendront l'écartement relatif à la pente substituée.

204. La loi relative au tracé des hachures, suffisante pour faire connaître, par réflexion, les formes du terrain, ne précise pas, d'une manière invariable, les positions à donner à ces hachures. On a profité de l'arbitraire restant encore dans leur tracé pour établir des conditions propres à rendre le relief du terrain compréhensible à la seule inspection du dessin.

Dans les anciennes cartes topographiques, on exprimait les mouvements de terrain par des teintes, obtenues de diverses manières, représentant des effets analogues à ceux produits dans la nature par une lumière éclairant ce terrain diversement, suivant sa pente et même suivant la direction des accidents.

On le supposait, à cet effet, soumis à l'action de rayons lumineux inclinés de 50ᵍ à l'horizon et venant de la direction nord-ouest. Ce système a été abandonné en France par ce motif, que les mêmes mouvements étaient rendus avec des intensités de teinte différentes, ce qui exigeait une espèce de calcul mental pour les apprécier. Quelquefois, on y joignait l'usage des ombres portées, ce qui donnait encore plus de vigueur au dessin, mais en outrant encore ce qu'il y avait d'illogique dans ce mode d'opérer.

205. On préfère actuellement se rapprocher de l'effet qui serait produit par une lumière verticale, pour laquelle l'orientation des mouvements de terrain serait indifférente.

Pour nous rendre compte de l'effet à produire, cherchons d'abord celui que présenterait la nature dans l'hypothèse de départ. Supposons, entre deux plans verticaux parallèles, une série de plans passant par la trace horizontale d'un des premiers, et inclinés d'angles différents. Quelle que soit la quantité de lumière zénithale pénétrant entre les plans verticaux, la même quantité sera toujours répartie sur celui des plans inclinés qu'on considérera ; les surfaces de ceux-ci, à largeur égale, seront inversement proportionnelles aux cosinus de leurs inclinaisons à l'horizon ; les quantités de lumière reçue par des éléments superficiels égaux seront en raison inverse des surfaces, et, par suite, en raison directe des cosinus des angles à l'horizon.

Pour rendre l'effet produit par la lumière zénithale, il ne suffit pas de connaître les quantités de lumière reçue, mais il faut encore apprécier les lois suivant lesquelles cette lumière serait renvoyée verticalement, car l'œil est supposé placé au zénith dans les cartes topographiques, par suite de l'existence de la projection horizontale.

On suppose que les surfaces éclairées ne sont pas réfléchissantes, ou du moins qu'elles ne réfléchissent que de la lumière diffuse. C'est, en effet, ce qui a lieu dans la nature. Quelle loi suivent ensuite les rayons diffusés ? Il est impossible de le préciser, d'autant plus que ces lois doivent varier avec la nature de la surface. Il est alors naturel de supposer que cette lumière se disperse également dans toutes les directions, et que par suite deux surfaces éclairées différemment (ce qui résulte d'inclinaisons différentes), paraissent lumineuses dans le rapport des cosinus des angles à l'horizon.

206. On a gardé de cette loi, qui n'est probablement pas exacte,

cette seule conséquence : *les surfaces, dans l'hypothèse de la lumière zénithale, paraissent d'autant plus éclairées qu'elles sont plus proches de l'horizontalité.*

On a appliqué cette conséquence d'une manière arbitraire, en posant cette égalité :

$$\text{la teinte} = \frac{\text{noir}}{\text{blanc}} = \frac{3}{2} \text{ tang. de l'inclinaison.}$$

Les pentes qu'il est utile d'exprimer ne dépassant pas 50^g, on a la ressource de teintes allant de 0 à $\frac{3}{2}$ pour représenter les inclinaisons de 0 à 50^g, et passé cette limite, on confond les pentes avec celle de la limite elle-même.

Cette loi admise pouvait être appliquée de différentes manières, en l'adjoignant aux courbes horizontales, qui précisent plus mathématiquement les formes. Le lavis eût été très-convenable, s'il n'eût pas entraîné une difficulté d'exécution que tout le monde ne peut pas vaincre et qui, dans bien des cas, aurait occasionné des inexactitudes.

On a préféré se servir de la ligne de plus grande pente ou hachure qui, pour nous, n'est sujette jusqu'à présent qu'à la condition d'être normale à la courbe. Par ce moyen, la teinte peut être obtenue, soit en grossissant les traits, soit en les rapprochant. On a utilisé ces deux modes de variation et on les a combinés de telle sorte que le grossissement qui donne de la vigueur, et le rapprochement qui permet mieux de lire les détails de la planimétrie, satisfassent à ces deux conditions, vigueur et clarté.

La planimétrie étant plus visible aux grandes échelles, on peut rendre les traits plus gros pour celles-ci, afin de perdre moins de vigueur, et réciproquement.

207. *Diapason.* On a, en conséquence, établi plusieurs diapasons ou modèles graphiques (*planche* XXIII, *fig.* 58 *bis*) pour les différentes échelles. Pour s'en servir, il suffit de prendre celui qui se rapporte à l'échelle et d'appliquer le tracé des hachures correspondantes à la pente qu'on veut rendre, en copiant celles qui, sur ce diapason, représentent cette même pente.

Mais, sur les dessins topographiques, les inclinaisons du sol ne sont connues que par les longueurs des hachures à tracer. On a donc dû les indiquer de la même manière sur le diapason; aussi, en regard de chaque type de hachures, a-t-on mis l'écarte-

ment des courbes qui correspond à la teinte représentée ou à la pente qu'elle est destinée à rendre.

Mais cet écartement, pour un même angle à l'horizon, dépend de l'équidistance et de l'échelle, car

$$\text{tang.}\alpha = \frac{E}{H} = \frac{e}{h}$$

E,e étant l'équidistance réelle et sa réduction à l'échelle, ou l'équidistance graphique ; H,h désignant la ligne de plus grande pente et la hachure.

Si donc ces longueurs de h ont été calculées avec une seule équidistance graphique, les longueurs des hachures du dessin répondant à la même pente ne seront les mêmes qu'autant que sa propre équidistance graphique sera identique avec celle du diapason.

Si celle du dessin devient e', il faudra qu'on ait

$$\text{tang.}\alpha = \frac{e}{h} = \frac{e'}{h'}$$

d'où
$$h = \frac{e}{e'}\,h'$$

La longueur de hachure qu'il faudra prendre sur le diapason, pour choisir la teinte convenable, sera moitié, par exemple, de celle du dessin, si l'équidistance réduite de celui-ci est double de celle qui a servi à la construction du diapason.

Il est essentiel de bien tenir compte de cette observation et de ne pas agir sans se préoccuper de ce rapport des équidistances graphiques.

Le diapason, tout en rendant des effets assez en harmonie avec ceux qui seraient produits dans la nature par l'existence d'une lumière zénithale, n'en est pas moins entaché de beaucoup d'arbitraire. Il est le résultat de la comparaison d'un grand nombre de dessins dont l'exécution a semblé la plus convenable. Du reste, cet arbitraire importe peu ; le principal mérite de ce guide vient de l'uniformité qu'il est appelé à établir entre les dessins exécutés par des mains différentes, uniformité qu'il était essentiel d'obtenir, du moins d'une manière approchée.

208. Nous allons placer ici quelques observations sur diverses circonstances particulières que présente l'emploi des lignes de plus grande pente. Les hachures extrêmes supérieures ou inférieures d'un mouvement de terrain doivent se terminer aussi

fines que possible, pour rendre moins dur à la vue le passage de la teinte qu'elles produisent au blanc du papier. Cela est d'ailleurs conforme à ce qu'offre la nature dans laquelle les commencements et fins de pente ne se terminent pas brusquement, mais forment une sorte de quart de ronde dans le haut, et de congé vers le bas (*fig.* 183), en passant par une suite d'inclinaisons de plus en plus faibles. Il n'y a d'exception à cette règle que lorsque les terres ont été travaillées par la main des hommes ou lorsqu'elles sont soutenues par des roches.

Il faut bien s'abstenir de figurer des normales suivant la ligne de falte indiquée par une ligne ponctuée sur les figures 181, 182 et 184 : leur suite produirait une ligne continue qui attirerait l'œil, contradictoirement à la convention qui établit que pour les pentes les plus douces le papier doit être le moins couvert par la teinte.

Lorsque, suivant une inclinaison quelconque, il existe un changement de pente brusque, il produit une arête qui coupe les courbes et sur laquelle elles s'infléchissent toutes angulairement. Les portions séparées par cette arête appartenant à des surfaces d'inclinaisons différentes, doivent être représentées par des hachures de grosseurs et d'écartements différents aussi, qui n'aboutissent pas à l'arête sur le prolongement les unes des autres. Dans chacune de ces parties, les hachures ou fractions de hachures seront proportionnelles à l'écartement correspondant des courbes, comme si elles étaient continuées au delà de l'arête, ou en d'autres termes, comme si chacune des deux surfaces conservait son uniformité au delà.

Si l'inclinaison de l'arête est extrêmement faible, celle-ci ne coupera les courbes qu'à de très-grandes distances, et si, au-dessus ou au-dessous d'elles, le terrain n'a qu'une pente extrêmement peu sensible, il sera peut-être impossible de bien l'exprimer par des hachures. Alors, pour pouvoir suivre l'ensemble des courbes et les relier entre elles, peut-être devrait-on les figurer elles-mêmes par des lignes très-fines ou ponctuées (*fig.* 184). Cette circonstance se présente assez souvent dans les pays dont les mouvements sont doux, ou vers le bas des rameaux qui descendent des chaînes principales dans les pays de grandes montagnes.

La position des arêtes doit être déterminée géométriquement comme celles des lignes de faîtes et des thalwegs.

Pour mieux concevoir ce qui précède, relativement à la gros-

seur et à l'écartement des normales qui ne sont pas entières, prenons des surfaces planes et supposons que ABC (*fig.* 185) soit une arête (concave pour conserver plus de vraisemblance) suivant laquelle elles se coupent. Il ne faudra pas conclure de ce que les normales vont en diminuant de longueur dans le segment ADB, que leur écartement doit diminuer et leur grosseur augmenter : car la pente restant la même, rien ne doit changer dans la proportion des hachures. Leur moindre longueur vient de ce que ce ne sont que des portions de hachures dont la véritable dimension sera connue en général, en supposant FB prolongé, et dans le cas particulier que nous considérons, sera la même partout entre les deux sections AE, BF qui sont deux droites parallèles. La ligne d'intersection ABC sera un thalweg, puisque chacun de ses points sera la réunion de deux normales descendant des deux flancs du ravin : elle sera donc le lieu géométrique de tous les points semblables et par conséquent ce que l'on désigne sous le nom de *ligne de réunion des eaux.*

Que le terrain présente une surface concave ou convexe, le même genre de raisonnement s'applique à tous les cas où il y a intersection de surface et non raccordement.

D'après cela, dans les ravins étroits et profonds, il ne faut pas chercher à faire raccorder, pour la direction, les normales partant de AB (*fig.* 186) avec la ligne de fond AC, mais les terminer par un trait délié. Ce cas, au reste, se présente rarement : presque toujours, les deux parties latérales se raccordent avec la ligne du fond par une espèce de surface cylindrique dont le diamètre de la base est très-petit. La normale s'infléchit alors en traversant cette surface et vient s'approcher autant que possible de la ligne AB (*fig.* 187), sans cependant la rencontrer.

Cette restriction est fondée sur ce que la ligne de plus grande pente étant l'intersection du terrain par un plan qui passe par la normale à la surface du terrain et par la verticale du lieu, et ce plan étant unique pour chaque point, celui-ci ne peut appartenir qu'à une seule ligne de plus grande pente. Dans le cas précédent, nous avons dit au contraire qu'à chaque point de la ligne de fond, aboutissaient deux lignes de plus grande pente, parce qu'à ce point commun aux deux surfaces, on pouvait élever une normale à chacune d'elles, imaginer ainsi deux plans verticaux qui coupent le terrain suivant deux lignes de plus grande pente.

Dans le cas où l'on doit représenter un mamelon, il arrive le plus ordinairement que le sommet S (*fig.* 188) est compris entre

deux tranches. Les dernières hachures n'indiquent pas alors la cote de S que l'on inscrit en chiffres, car elles ne sont pas entières ; de plus, elles devraient passer toutes par le point S, et si on voulait les exécuter ainsi, on formerait autour de ce point une teinte très-forte, bien que la pente fût très-douce au sommet. Pour éviter cet inconvénient, on ne tracera que la partie des hachures aboutissant à la première courbe, et on les terminera avant d'atteindre S.

Une circonstance que présente assez fréquemment la nature est celle des cols ou points de partage des eaux. Le point O (*fig.* 189) est le point le plus bas du profil AB et le plus haut du profil CD : les lignes de plus grande pente O*a*, O*b*, O*c*, O*d* appartenant à quatre surfaces, viennent y aboutir et s'y perdre sans être achevées : les autres se comportent comme il est indiqué par la figure.

Les quatre normales O*a*, O*b*, O*c*, O*d* doivent donc être terminées en mourant vers O pour indiquer qu'elles ne sont pas entières. Lorsque le petit plateau dont O est le centre a une pente très-peu sensible, on peut le considérer comme plan et disposer les tranches ainsi que l'indique la figure 190.

Quelquefois on rencontre, sur les flancs des montagnes, des contre-pentes qui affectent la forme dont nous venons de parler : on y retrouve un mamelon séparé de la pente générale par un col (*fig.* 191).

209. Nous allons terminer ce chapitre par quelques mots sur le trait et le lavis des cartes topographiques. D'après les conventions actuelles qui n'admettent plus d'ombres, tous les traits de la planimétrie sont de la même grosseur, attendu que dans l'ancien système on ne les renforçait en certaines parties, que pour indiquer le côté de l'ombre. Néanmoins, on marque d'un trait rouge plus fort les gros murs dans le cas où l'échelle ne permet pas d'apprécier rigoureusement leur épaisseur par deux traits extrêmement rapprochés et comprenant un petit espace teinté avec du carmin. La même observation subsiste pour les ruisseaux dont la largeur ne comporte pas deux traits. Tout ce qui n'appartient pas au figuré général du terrain doit être considéré comme trait : tels sont les petits accidents qui ne sont pas assez considérables pour être indiqués par les tranches, tels que les escarpements, les ravins et les rochers. On pourra, pour ces objets, exécuter un travail qui rentre dans le dessin d'imitation, et qui

deviendra alors signe conventionnel : ainsi les escarpements, les ravins et les rochers seront représentés par des traits dont les contours exprimeront les différentes masses irrégulières projetées horizontalement. Ces traits seront plus ou moins multipliés, suivant que les rochers seront plus ou moins divisés : leur inclinaison sera déterminée à peu près par le gisement des couches. Ils ne seront au surplus assujettis à aucune loi fixe.

Pour distinguer la nature et l'importance des chemins, on a établi des conventions qui les font reconnaître à la simple inspection. C'est ainsi que les routes nationales se tracent au moyen de deux traits pleins avec fossés. Les routes départementales et les chemins de grande communication s'expriment au moyen de deux traits pleins sans fossés. Les chemins vicinaux se représentent par un trait plein et l'autre ponctué ; les chemins d'exploitation par deux traits ponctués, et enfin les sentiers par un seul trait plein ou ponctué. Au surplus, il faut pour tout ce qui est relatif au tracé des routes, chemins, canaux, etc., consulter le tableau qui a été gravé au Dépôt général de la guerre, et qui donne les modèles pour les échelles le plus fréquemment usitées.

Les teintes sont conventionnelles et réduites à la plus grande simplicité pour la facilité et la promptitude du travail. Elles sont uniformes comme le trait, c'est-à-dire posées à plat : il n'y a d'exception que pour les eaux que l'on renforce également sur l'un et l'autre bord par une légère teinte adoucie. Nous rappelons ici succinctement que les bâtiments et constructions se figurent par une teinte peu intense de carmin ; les prés, pâturages et vergers, par des verts plus ou moins bleus. Les bois, par du jaune légèrement modifié par de l'indigo ; les vignes, par une teinte violette composée avec de l'indigo, du carmin et un peu de gomme-gutte ; les broussailles, les bruyères et les friches par du vert peu intense panaché avec de la teinte de bois, du rose ou de la teinte nankin (anciennement consacrée à représenter les terres labourables et formée de gomme-gutte et de carmin) : les eaux douces s'expriment par une faible teinte de bleu indigo ; celles de la mer par la même teinte modifiée avec une très-petite quantité de gomme-gutte ; enfin les sables, par une teinte de jaune et de carmin, un peu plus forte que celle dont on couvrait les terres labourables. On emploie la même couleur pour les escarpements. Quant aux rochers, dont le ton local varie ordinairement avec leur structure, ils seront représentés par des nuances imitées de la nature, de manière à rendre le mieux possible l'es-

pèce des roches, comme la disposition du trait indiquera leur composition par stries, par couches ou par blocs. On ne peut rien dire de plus positif à leur égard, l'habitude du dessin d'imitation suppléera au reste.

Ajoutons encore que, dans un plan de ville, on est dans l'usage de signaler les bâtiments publics, civils ou religieux par une teinte rouge deux fois plus intense que pour les habitations privées : les établissements du génie militaire sont teintés avec du bleu un peu rompu par du carmin pour donner à peu près l'aspect de l'ardoise, et ceux de l'artillerie par une teinte violette composée des mêmes couleurs que la précédente, mais dans une autre proportion.

Peut-être devrions-nous indiquer ici une chose qui nous paraît bonne, quoique pas encore généralement adoptée : elle consiste à employer pour le dessin des fossés et ruisseaux dont la largeur ne comporte pas deux traits, le bleu de cobalt ; on évite par là l'inconvénient d'un trait qui se confond quelquefois avec le noir, lorsqu'il est fait avec de l'indigo.

Tout ce qui peut contribuer à la clarté d'une carte n'est point à dédaigner, attendu qu'après l'exactitude, c'est son principal mérite. Sous ce rapport, il n'est pas indifférent d'écrire de telle ou telle manière les noms propres ou les indications quelconques qui doivent y entrer.

Pour tout ce qui est relatif à la grandeur des lettres, à leur grosseur, leur écartement, etc., il faut consulter les modèles adoptés en dernier lieu au Dépôt de la guerre. On y trouve des types de tous les caractères usités, puis l'indication et les dimensions de ceux qui sont consacrés à tout ce qui doit s'écrire sur une carte. L'usage est d'écrire les noms des villes, villages, bâtiments isolés à droite ; cependant on pourra déroger à cette règle dans le cas où le nom, ainsi placé, couvrirait des détails essentiels. Les noms de routes, chemins, sentiers, et les désignations des communications qu'ils fournissent, s'écrivent parallèlement à leurs sinuosités en choisissant pour le sens de l'écriture celui qui force le moins à tourner la carte pour faciliter la lecture. Le commandant Maissiat a inventé un instrument qu'il a désigné sous le nom de *grammomètre*, et qui donne, avec beaucoup de précision l'écartement des parallèles que l'on trace pour écrire.

210. Un des usages les plus importants, quoique assez peu fréquent, des plans topographiques, est celui que l'on en fait pour



la construction des reliefs. Nous avons prouvé que l'on pouvait obtenir par le tracé des tranches la cote d'un point quelconque; on pourra par conséquent avoir le profil du terrain dans une direction aussi quelconque. On conçoit donc qu'en élevant sur une surface plane des verticales matérielles égales aux cotes trouvées, et en unissant par une matière malléable tous les sommets de ces verticales, on aura une image fidèle du terrain. On peut ensuite facilement, sur les épreuves en plâtre que l'on aura tirées du premier relief, reproduire les courbes horizontales au moyen d'une tige verticale graduée, adhérente à deux règles CD,EF (*fig.* 192), que l'on fait mouvoir sur le bord supérieur et horizontal MNOP d'une boîte ou châssis qui enveloppe le plâtre.

211. Les levées peuvent encore, à la rigueur, servir à faire des vues perspectives du terrain qu'elles représentent; car ce terrain, étant connu par ses projections horizontale et verticale, peut être mis en perspective par les procédés de la géométrie descriptive.

212. Les levées sont enfin d'une grande utilité lorsque l'on doit mettre quelque projet à exécution : car celui-ci étant d'abord tracé sur la carte, le problème se réduit à construire sur le terrain une ligne donnée sur le plan. Si cette ligne aboutit à un point connu et accessible, on s'y transporte, on y décline la planchette, et l'on place l'alidade sur la ligne du plan; on fait établir des jalons dans cette direction et mesurer le nombre de mètres exprimé par la longueur de la droite sur le plan: par ce moyen l'extrémité est déterminée.

CHAPITRE XII.

LEVÉES ET RECONNAISSANCES MILITAIRES.

213. Les levées militaires sont celles que l'on est obligé d'exécuter avec rapidité et parfois en présence de l'ennemi, soit avec des instruments spécialement consacrés à cet usage, soit même le plus souvent sans leurs secours Il est inutile d'insister sur l'utilité de pareilles levées: il suffit de rappeler qu'elles servent de guides pour les mouvements de troupes, de canevas pour les projets de campements, de fortifications de campagne, passages de rivières, positions de troupes; en un mot, qu'elles forment la base de toute reconnaissance militaire.

214. Les reconnaissances, dans toute l'acception du mot, se composent de deux parties distinctes : un plan topographique, y compris les légendes destinées à donner des notions exactes sur des choses que le dessin de la carte ne peut indiquer qu'imparfaitement, et les mémoires statistiques et militaires.

215. Ces mémoires font connaître, avec toute la précision possible, les ressources de toute espèce que peut fournir le pays, et les avantages ou les inconvénients qu'il présente sous le rapport d'une occupation actuelle ou présumée.

La première partie des reconnaissances est tout entière du ressort de la topographie, la seconde se rattache plus particulièrement à l'art militaire : aussi, n'en dirons-nous que quelques mots.

Les mémoires ou rapports doivent donner la description physique et géologique du terrain. Ils contiennent l'indication statistique des ressources que peut offrir le pays, sous le triple rapport des moyens de transport et de la subsistance, ainsi que du logement des hommes et des chevaux.

On y mentionne la nature des routes et des chemins : leur état d'entretien et le genre de leur construction : s'ils sont praticables en toutes saisons ou en été seulement; s'ils peuvent servir ou non aux trois armes, infanterie, cavalerie et artillerie.

On y décrit les positions offensives ou défensives qui s'y trouvent; les obstacles naturels qui peuvent venir en aide ou qu'il s'agirait de surmonter; les travaux qu'il faudrait effectuer dans un cas donné, soit pour l'établissement d'un camp, soit pour assurer le passage de l'armée ou arrêter la marche de l'ennemi.

On y indique encore, et toujours en raison d'événements probables, le nombre d'hommes et les armes qui seraient nécessaires pour défendre une position, une ville, une place, etc., ou pour s'en rendre maître, pour forcer ou défendre un passage de rivière. On a soin, enfin, de relater les voies de communication qui relient le terrain parcouru aux points principaux qui en sont plus ou moins éloignés.

215 *bis*. Les levées militaires ou expédiées faites avec des instruments, ayant pour but de faire connaître le terrain avec toute l'exactitude que comporte le peu de temps dont on peut disposer, il est évident que leurs principes doivent être les mêmes que ceux des levées régulières. Toute la différence consistera dans l'emploi d'instruments plus portatifs et surtout moins volumi-

neux, dans la substitution du mesurage au pas, à celui fait à l'aide de la chaîne; dans l'estimation même à vue de certaines distances, de divers détails, etc. L'habitude fait encore juger des choses sur lesquelles il faut plus particulièrement porter son attention, et de celles que l'on peut négliger sans aucun inconvénient. Il est donc absolument nécessaire d'avoir beaucoup levé régulièrement, pour connaître la marche la plus simple et la plus générale, et pouvoir apprécier les erreurs causées par les avaries que peuvent subir les instruments.

On commencera toujours par déterminer, au moyen d'une triangulation, les points principaux auxquels on devra rattacher ensuite les levées de détails. Tout se réduira donc encore ici à mesurer une base et des angles. Cette base pourra quelquefois être fournie par des cartes régulières appartenant au matériel topographique de l'armée, sinon on la mesure à la chaîne ou au pas.

Dans le cas où l'on doit la mesurer, la base sera prise sur un terrain uni, élevé s'il est possible, et tel que de ses deux extrémités on découvre une grande étendue du terrain à lever. De là, par le plus petit nombre de stations que l'on pourra, on passera à deux points occupant une position centrale dans la levée et susceptibles de servir de stations : de ces deux points, on rayonnera et l'on recoupera tous ceux qui peuvent être reconnus et servir de points de repère pour le détail. De cette manière, on multipliera le nombre des triangles, tout en diminuant la longueur de leurs côtés. Ceux-ci serviront à trouver une foule d'autres points, de telle sorte que le détail intermédiaire se fera facilement au pas et sans erreurs notables.

La levée de détail devra se faire presque entièrement par intersections : car le chaînage régulier entraînant déjà dans des erreurs appréciables, on conçoit combien plus grandes encore seront celles causées par le mesurage opéré d'une manière approximative. Ainsi donc, on se rappellera les principaux moyens que nous avons indiqués pour déterminer un point sans mesurer de ligne : ce sont les méthodes d'intersection et de recoupement, celles des segments capables, des courbes de recherche et par le papier à calquer.

On partira de chaque point de station ainsi déterminé, et l'on figurera à vue et au pas tous les détails qui se trouveront à droite et à gauche d'une direction qui sera celle d'un côté de triangle, ou qui fera avec l'un d'eux un angle que l'on observera et rap-

portera immédiatement. De cette manière, on remplira très-vite et assez exactement la surface de chaque triangle. Ceci est général et doit être appliqué à tous les terrains : si on lève en pays découvert, l'opération est facile ; et si l'on se trouve engagé dans un pays couvert, la difficulté augmente, et cependant on ne devra recourir à la méthode de cheminement qu'à la dernière extrémité.

Si le terrain est libre et que l'on ait quelques hommes et du temps à sa disposition, on fera signaler des arbres remarquables par leur position ou leur élévation ; puis alors, en s'élevant au-dessus du sol par tous les moyens qu'offriront les localités, on déterminera chacun des points qui doivent devenir stations et servir de centres aux petites opérations de détail qui, pour chacun d'eux, ne s'étendront qu'à moitié distance de stations environnantes. Ceux qui ont déjà levé savent combien une faible élévation d'un mètre seulement peut souvent augmenter l'étendue de l'horizon. L'officier à cheval aura donc déjà un grand avantage ; mais alors il faut qu'il emploie un instrument qui n'ait pas besoin d'établissement fixe : tels sont le sextant, la boussole à réflexion, la boussole Burnier et surtout la boussole Hossard. S'il n'a pu faire signaler les points qu'il a choisis, il devra s'efforcer de vaincre la grande difficulté qu'on éprouve à reconnaître le même objet vu sous des aspects différents ou diversement éclairés. Dès lors, tout le guidera : le sommet d'un arbre d'une forme ou d'une couleur particulières, une pointe de rocher, une cheminée, la fumée même qui s'en échappe, si la cheminée cesse d'être visible. Il ne devra pas regarder comme perdu le temps qu'il consacrera à déterminer une bonne station : il le regagnera par la rapidité avec laquelle il opérera dans l'intérieur des triangles, certain qu'il sera de ne commettre que des erreurs médiocres, qui seront promptement rectifiées par la rencontre fréquente de points connus. Il y aura encore économie de temps en ce sens que, sur son croquis, l'officier dessinera avec la certitude de ne pas revenir sur ce qu'il aurait fait précédemment, tandis que, par la méthode du cheminement, il ne tracera une ligne qu'avec la crainte de l'effacer l'instant suivant pour la rectifier; ainsi, non-seulement il dessinera plus vite, mais encore sa minute sera plus nette.

Mais enfin, le pays pourra être tellement boisé qu'il soit impossible d'opérer autrement que par cheminement, et en ne se rattachant que de loin en loin à des repères connus. C'est alors

que le travail devient très-pénible. Il faut déterminer, avec tout le soin possible, les directions principales que l'on suit et les points où elles se coupent : il faut faire, à chaque instant, des excursions à droite et à gauche pour trouver des issues et marcher en quelque sorte par une suite de petites reconnaissances partielles, avant de tracer une seule ligne sur le papier.

Nous avons nommé tout à l'heure quelques-uns des instruments dont on peut se servir dans ces sortes d'opérations : nous ajouterons que, dans le premier cas, celui où l'on peut employer les recoupements et intersections, ce qu'il y a de mieux et de plus prompt peut-être, c'est l'emploi de la planchette, mais de la planchette modifiée en raison des circonstances dans lesquelles on se trouve. Cet instrument de petite dimension se compose de plusieurs règles égales en longueur et largeur, réunies par une feuille de peau ou de forte toile sur laquelle elles sont collées. On les maintient, quand on veut faire usage de la planchette, dans un même plan, au moyen de deux autres règles qui prennent une position rectangulaire sur les premières, en pivotant sur l'une de leurs extrémités; après quoi elles sont fixées par un petit crochet placé à l'autre extrémité (*fig.* 193). Quand on a terminé son travail ou qu'on le suspend, on rend libres ces deux règles, qui alors se superposent sur la première et la dernière de celles qui sont réunies : on roule alors le tout, qui est assez peu volumineux pour pouvoir tenir dans une fonte de pistolet. Cette planchette peut s'adapter sur un bâton armé d'un dard en fer que l'on plante en terre. On peut avoir une très-petite alidade que l'on construit soi-même avec une règle ou un double décimètre triangulaire sur lequel on fixe deux clous ou deux aiguilles. Cette manière de lever est plus prompte, surtout quand on peut y ajouter un déclinatoire, en ce qu'elle évite la perte de temps qu'entraîne le report des angles observés à la boussole.

Cet instrument peut être employé avec ou sans un pied, qui peut être un simple bâton ou le pommeau d'un sabre. Dans le cas où l'on opère en posant simplement la planchette sur la main, la haussant et la baissant alternativement pour s'assurer du pointé et de la lecture du déclinatoire, il ne présente plus la même exactitude que les goniomètres que nous avons mentionnés plus haut. Nous renvoyons au § 168 pour la comparaison des avantages et des inconvénients des différents modes d'opérer.

Une autre méthode approximative d'orientation prompte remédie à l'absence d'un déclinatoire : elle consiste à fixer un style

vertical sur la planchette, et pour cela on peut se servir d'une aiguille ou d'une épingle; on trace, avec le secours d'une montre, les ombres du style pour les différentes heures du jour, et le cadran solaire qui en résulte pourra, les jours suivants, servir à décliner toujours la planchette de la même manière. Il suffira de regarder sa montre chaque fois que l'on s'établira en station, et de faire tourner la planchette jusqu'à ce que l'ombre du style corresponde à l'heure à laquelle on opère. On voit que ce moyen n'est pas d'une exactitude parfaite; mais aussi ne l'indiquons-nous pas pour des levées régulières. Les conditions indispensables sont, que l'on ait une montre et qu'il fasse soleil. Cette dernière condition est satisfaite d'une manière presque certaine et continue pendant les deux tiers de l'année dans les contrées méridionales, comme l'Italie, l'Espagne et l'Algérie.

Quand on opère par cheminement, il nous paraît préférable, pour le détail, de faire des croquis cotés sur carnet. On ferme ainsi des polygones, que l'on rapporte ensuite sur le papier avec la possibilité et la certitude même de faire aboutir les directions parcourues aux points où elles doivent réellement passer. Si la nature du pays n'a pas permis de mesurer une base assez longue, on en construit une de dimension double, au moyen de la méthode indiquée § 166.

Lorsque l'on n'a pas à sa disposition quelqu'un des instruments destinés à l'exécution des levées expédiées, on peut s'en construire soi-même de très-grossiers qui, malgré leur imperfection, pourront être encore utilement consultés pour la mesure des angles : tels sont un rapporteur, une fausse équerre, les deux branches d'un compas, une longueur variable mise à une distance constante de l'œil, au moyen d'une ficelle ou du bras tendu, longueur qui mesure la tangente de l'angle, enfin un triangle variable de forme, dont la base serait formée par une petite règle et dont les autres côtés seraient les deux parties d'une ficelle ayant ses extrémités fixées à la base, ficelle qui, pincée en différents points de sa longueur, donnerait des angles variables de grandeur, compris entre les deux parties qui la composeraient.

Nous avons dit que les levées expédiées et les reconnaissances militaires ne permettant plus l'emploi lent et embarrassant de la chaîne ou de la stadia, on évite autant que possible les mesures de distance en se servant du pas étalonné, pour connaître celles qui sont absolument indispensables.

Pour mesurer des distances sans les parcourir, on construit des petites lunettes à stadia qui, en raison même du but qu'on se propose d'atteindre, ne peuvent pas être accompagnées de mires graduées. (Nous donnerons la description de la longue-vue-cornet de M. Porro, destinée à cet usage.)

La mire est remplacée par un objet se rencontrant souvent dans la nature, comme un arbre d'une essence spécifiée, une fenêtre, une cabane de paysan, un homme, un objet auquel on suppose une dimension constante, souvent inexacte, mais toujours approchée. D'autres fois, imitant alors la stadia à mire variable, on estime à l'œil, la portion de la mire supposée constante, embrassée entre les deux fils d'un réticule invariable.

Le premier procédé, analogue à la stadia à micromètre, exige le remplacement, par un système plus simple, de celui que nous avons exposé au § 123.

On emploie pour cela différentes dispositions dont les principales, représentées *fig.* 1 *et* 2 *bis, planche* XIX, sont : 1° une série de fils parallèles équidistants ; 2° un verre plan mis au lieu du réticule. Sur ce verre sont tracées deux obliques AB,AB', coupées par une suite de parallèles équidistantes. La plus grande des parallèles BB' correspond à la grandeur de l'image de l'objet servant de mire, placé à la plus petite distance à mesurer. On amène l'image entière dans un cas quelconque, de manière à occuper toute la longueur d'une des parallèles, *bb'* par exemple. Si δ est la distance répondant à BB', on aura évidemment, pour la distance correspondante à *bb'* :

$$x = \frac{\delta . BB'}{bb'} = \delta \frac{AB}{Ab}$$

Si A*b* est la moitié de AB, la distance sera double ; les divisions sont tracées de manière à amener une lecture facile, et δ est choisi de sorte que la multiplication soit simple.

3° Au point où se forme l'image dans la lunette, on place quelquefois un diaphragme ou cercle plein, évidé intérieurement d'un autre cercle portant différents crans *c,c',c''*, vides également ; les dimensions de ces ouvertures, mesurées perpendiculairement aux rayons, sont dans des rapports simples. Par exemple

$$c : c' : c'' :: 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4}.$$

Si, après avoir reconnu que l'objet placé à 50^{m} embrassait tout

le cran c, on le trouve, dans une nouvelle circonstance, occupant le cran c', la distance sera de 100^m, etc. Les distances intermédiaires seront estimées approximativement par l'étendue des images interceptées dans l'un des trois cas principaux.

Lorsqu'on n'a pas à sa disposition une quelconque de ces petites lunettes à stadia, on peut, comme nous l'avons déjà dit pour la mesure des angles, se construire soi-même un instrument en tenant lieu.

Un double décimètre AB (*fig.* 3 *bis*, *planche* XIX) est placé à une distance constante de l'œil, soit en tendant le bras, soit par le moyen d'un double fil de longueur constante. On mesure ainsi le nombre des millimètres n interceptés par l'objet ; les distances seront inversement proportionnelles aux lectures ainsi faites

$$s : s' :: n' : n, \quad s = \frac{s'n'}{n}$$

s' et n' déterminés par une expérience préalable qui fournit leur produit, il n'y a plus, dans chaque cas, qu'à diviser par la lecture n.

Cet instrument permet également, ainsi que nous l'avons déjà dit, de mesurer l'angle par sa corde.

Tous les procédés précédemment décrits exigent l'observation d'un même objet ayant servi à l'opération préalable de graduation de l'instrument. On a proposé le moyen suivant, permettant d'opérer sur un objet inconnu.

Après avoir observé cet objet AB (*fig.* 4 *bis*) du point S situé à une distance s, on exécute la même opération d'un second point S' situé à la distance s'. Si n et n' sont les deux lectures, on aura toujours, quelle que soit la grandeur de AB :

$$\frac{s}{s'} = \frac{n'}{n}$$

Mais si, marchant de S en S', on s'est dirigé directement sur AB, la distance parcourue $a = s - s'$. Cette équation, jointe à la première, fait connaître $s = \frac{an'}{n' - n}$.

Il nous semble qu'il y a peu à compter sur l'exactitude, même relative, de ce procédé, et qu'il vaut mieux avoir recours au moyen habituellement employé. Il suffit, en effet, de se transporter de S en S', latéralement, de mesurer SS' et les angles en S et S', pour pouvoir tracer le triangle SS'A. L'opération n'est



pas plus longue que pour la double observation de la stadia, et elle a l'avantage de conduire à la résolution d'un triangle ASS', beaucoup mieux conformé que celui ASS', que résout indirectement le premier procédé.

On comprend cependant qu'il y ait des circonstances dans lesquelles on devra avoir recours à ce mode d'opérer, lorsque, par exemple, des obstacles situés à droite et à gauche ne permettront pas le déplacement latéral.

Nous terminerons les renseignements relatifs à la mesure approximative des distances par quelques indications conduisant au même résultat, d'une manière encore plus grossière, mais néanmoins de sorte à pouvoir être consultées quelquefois avec fruit.

Le pas de l'homme pourra être remplacé par celui du cheval expérimenté préalablement.

Pour les longues distances, l'obligation de compter un très-grand nombre de pas devient fastidieuse et sujette à erreur. On pourra, dans ce cas, combiner le temps employé à la marche avec les renseignements suivants : un fantassin parcourt 50^m, 60^m et 70^m à la minute, suivant que le pas est ordinaire, de route ou accéléré ; un cheval parcourt 100^m, 200^m, 300^m au pas, au trot ou au galop modéré pendant le même laps de temps. Ces indications ne sont évidemment qu'approximatives.

Enfin on pourra, dans quelques circonstances, se servir de la vitesse du son, qui est de 337^m par seconde de temps, lorsqu'une indication quelconque aura fait connaître le moment précis de la production de ce son : un coup de fusil aperçu et entendu, par exemple. Le vent sera une cause d'erreur qui devra faire augmenter un peu la valeur estimée de la distance, lorsqu'il sera dans la direction suivie par le son et qui devra la faire diminuer dans le cas contraire.

216. Dans une levée militaire, le figuré du terrain est au moins aussi essentiel que le plan. La marche à suivre pour effectuer le nivellement est encore la même que pour les levées régulières : c'est toujours par des cotes calculées au moyen de la base et de l'angle de pente que l'on rectifiera ce que peut avoir d'inexact le figuré à vue. Après avoir mesuré une inclinaison, on pourra, sans calculer le triangle, trouver immédiatement la différence du niveau au moyen de la *fig.* 194, dans laquelle la base AB, divisée en parties égales, représentera la longueur de la base à l'échelle. Du point C partent les droites C 5, C 10, C 15, etc., qui forment,

avec CA, des angles de 5, 10, 15 grades : les perpendiculaires élevées par les points de division de la base complètent plusieurs séries de triangles rectangles semblables, dont les hauteurs, multipliées par le dénominateur de l'échelle, sont précisément les différences de niveau cherchées. On comprend que l'on n'atteint pas ainsi une précision extrême : mais il s'agit seulement de levées expédiées.

Comme il est probable que l'on n'a pas à sa disposition une grande boussole armée d'un éclimètre, on peut employer une petite boussole dont on dispose le limbe verticalement. Au pivot est suspendue librement une aiguille dont le poids suffit pour la maintenir dans la position verticale. Si la boussole n'a pas été déclinée, le perpendicule marque 100g quand la lunette est horizontale, et donne la distance zénithale de la direction à laquelle correspond l'axe optique de la lunette. Si, au surplus, on avait quelque raison de douter du parallélisme du diamètre zéro—200g et de la lunette, on s'assurerait du chiffre que couvre le perpendicule quand elle est horizontale, et ce chiffre servirait de point de départ.

Le clisimètre de Burnier est préférable, puisque c'est pour ce genre d'opérations seulement qu'il a été conçu. Dépourvu de toute espèce d'instrument, on peut encore obtenir graphiquement les angles principaux. Pour cela on plante une canne ou un jalon en terre; on s'assure de sa verticalité au moyen d'un fil à plomb; on trace sur du papier, sur une feuille du carnet, si l'on veut, une droite que l'on applique au long du jalon ; on appuie sur le papier la règle ou le décimètre que l'on dirige sur l'objet dont on veut connaître la hauteur relative; on trace cette ligne au crayon, et, en retranchant l'angle droit de celui que forment les deux lignes sur le papier s'il est obtus, ou le retranchant de l'angle droit s'il est aigu, on a l'angle de dépression ou d'ascension. On peut encore trouver la différence de niveau entre deux points au moyen de deux jalons de hauteurs différentes : on place, si l'on veut, le plus court au point où l'on est en station, et l'on cherche pour l'autre, sur la direction du point dont on veut trouver l'élévation au-dessus de la station, une position telle, que les sommets des deux jalons et le point visé soient en ligne droite; on forme ainsi deux triangles semblables qui fournissent une proportion dont le quatrième terme est la hauteur cherchée, tandis que les trois autres sont la distance des deux jalons, celle des deux objets et la différence de hauteur des jalons. Si l'on était au contraire au point

le plus haut, ce serait là que se placerait le plus grand, tandis que celui qui l'est le moins serait établi quelque part en avant. Ceci suppose que les deux jalons sont plantés en terrain horizontal. S'il en était autrement, le quatrième terme de la proportion ne donnerait que la hauteur du point visé au-dessus du terrain incliné sur lequel l'opération a été faite.

Nous terminerons ce qui a rapport à ce sujet en indiquant un procédé très-simple et très-ingénieux : il consiste à suspendre une petite règle AB (*fig.* 195) par un cordon ACB ; le point de suspension est choisi avec soin, tel que la règle AB soit horizontale. On l'élève jusqu'à la hauteur de l'œil et l'on remarque à quel point D du terrain correspond le rayon visuel dirigé suivant AB : on s'y transporte en mesurant la distance par laquelle on sait que l'on s'est élevé d'une quantité égale à la hauteur de l'œil au-dessus du sol. Arrivé en D, on recommence l'opération, et ainsi de suite. Si l'on voulait en même temps connaître l'inclinaison d'une station à l'autre, il faudrait résoudre le triangle tel que SAD qui donnerait $\frac{AS}{SD}$ pour le sinus de l'inclinaison.

Les instruments employés au nivellement expédié, savoir le clisimètre Burnier et le niveau à perpendicule, auxquels on pourrait joindre le niveau à bulle graduée, tel qu'il sera décrit en géodésie à l'article relatif à la mesure des bases, ne sont pas plus exacts que ceux destinés à la planimétrie expédiée. Dans l'exécution du nivellement régulier, l'emploi de l'éclimètre, beaucoup plus exact que l'instrument correspondant de la planimétrie, ne conduit à la connaissance des cotes qu'à 1 ou 2^{m} près, lorsque les opérations sont très-exactes. Les mêmes causes d'erreur qui influent sur les résultats auront une bien plus grande influence lorsqu'on se servira, pour le nivellement, d'instruments ne présentant pas plus d'exactitude que ceux d'une planimétrie expédiée.

Il est utile d'avoir une projection, même approximative ; mais en est-il de même des cotes d'un nivellement, cotes dont la variation est toujours petite dans la nature ? Une erreur, qui serait légère en position horizontale, pourra changer considérablement les hauteurs relatives des mouvements de terrain.

Aussi, pensons-nous qu'il ne faudrait accorder qu'une très-médiocre confiance aux résultats obtenus par le moyen des clisimètres.

Faut-il donc pourtant renoncer complétement à spécifier les

hauteurs relatives des mouvements de terrain. Non, car on peut éviter l'influence de l'erreur la plus grave, celle qui provient de l'erreur de base souvent considérable dans l'exécution d'une planimétrie expédiée. Il faut pour cela se borner à l'emploi d'un instrument toujours portatif, ne donnant que la ligne du niveau apparent. Le niveau réflecteur de Burel est dans ce cas; son emploi ne résoudra pas le cas général qui se présente dans la recherche d'une différence de niveau, mais si son usage est plus restreint, il sera du moins plus sûr que celui des elisimètres.

217. *Levées à vue.* Les besoins de l'armée exigent très-souvent que l'on ait de suite des renseignements sur un terrain, en présence de l'ennemi. Alors tout doit être sacrifié à la promptitude de l'exécution, l'exécution elle-même. L'officier est livré à ses propres ressources et n'a plus même à sa disposition les instruments les plus simples. C'est donc de la rapidité et de la justesse du coup d'œil que dépend le succès de sa mission, et c'est en cette occasion surtout qu'il sentira la nécessité de l'avoir exercé. Moins il pourra compter sur l'exactitude de ses opérations de détail, plus il devra mettre d'attention à suivre la marche que nous avons indiquée. Ce seront toujours de grands triangles qu'il formera et dont il remplira la surface par le détail dessiné à vue autour de chaque station. Les angles seront en général tracés à vue; cependant, pour ceux que forment de longues directions, on fera bien d'employer la méthode suivante : soient SA,SB (*fig.* 196) les directions que l'on veut rapporter sur le papier. On élève, par l'un des moyens indiqués, SB′ perpendiculaire à SA′; on partage ASB′ en deux parties égales, par la droite SB″ que l'on jalonne, on subdivise ensuite celui des deux angles de 50^g qui renferme SB : l'angle B″SB‴, dans lequel se trouve cette droite, est encore partagé en deux, et l'on poursuit le cours d'opérations analogues jusqu'à ce qu'on obtienne une ligne SB‴ par exemple, assez voisine de SB. Sur le papier, et à l'aide du compas, on répète le même nombre de subdivisions, et l'on obtient ainsi la projection de ASB en *asb* avec l'approximation que l'on juge convenable. Quoique ce travail ne soit pas excessivement long, néanmoins comme, dans les circonstances que nous supposons, le temps est extrêmement précieux, il ne faut user de cette méthode qu'à la dernière extrémité. Il serait bien plus prompt de mesurer trois côtés d'un triangle, savoir : deux sur les directions dont on s'occupe et le troisième entre les deux.

Pour le nivellement, on se borne à figurer les mouvements à vue, et l'on ne détermine que le commandement des hauteurs. La règle indiquée au paragraphe 216 et représentée (*fig.* 195) est très-bonne à cet usage. On arriverait au même but en employant une équerre le long de l'un des côtés de laquelle serait suspendu un fil à plomb, tandis que l'autre servirait de ligne de visée. L'œil placé à l'extrémité s'assurerait par ce moyen, si l'horizontale passe par-dessus ou au-dessous du mamelon ou de la position que l'on compare à celle où l'on se trouve. On pourrait même estimer à peu près quelle est la différence.

218. *Levées de mémoire.* L'officier chargé d'une reconnaissance n'a quelquefois pas le temps de s'arrêter : il doit voir et plus tard transmettre sur le papier, une image aussi fidèle que possible de ce qu'il a vu. Il n'y a aucun précepte à donner sur ce genre de travail. Il faut que l'officier soit familiarisé avec les formes qu'affecte toute espèce de terrain, avec les lois de la nature qui procède presque toujours par analogie dans les mêmes localités. Il faut qu'il sache conclure, jusqu'à un certain point, ses parties masquées, à l'aide de celles qui sont visibles.

219. *Reconnaissances par renseignements.* Il peut arriver enfin que l'officier isolé sur un point, et dans l'impossibilité de tenir la campagne, soit obligé de rapporter des notions du pays où il se trouve. Les renseignements recueillis auprès des habitants seront alors sa seule ressource : toute l'habileté consistera à les avoir exacts et à discerner avec tact le degré de confiance qu'il devra leur accorder. Du reste, il construira encore des triangles par les trois côtés au moyen des distances itinéraires qu'on lui indiquera, et il achèvera le détail par tâtonnement en rapportant chaque point par l'intersection de deux ou trois arcs de cercles dont les rayons seront les distances à des points déjà placés. C'est ainsi qu'il établira les fermes, les maisons isolées, les cours d'eau, puits, fontaines, etc.

Les mêmes renseignements, épurés par une critique judicieuse, lui fourniront les moyens d'exprimer les mouvements du terrain. Il sera indispensable, pour tout cela, qu'il ait une table de réduction des mesures du pays en mètres. Il sera même plus sûr de faire estimer les distances en heure de marche. Les mouvements seront le plus ordinairement représentés par les hachures privées du secours des tranches préalables, mais toujours d'autant

plus serrées et plus courtes qu'elles exprimeront une pente plus rapide.

Telles sont les réflexions générales que l'on peut faire sur les reconnaissances.

L'esprit de méthode, qui devra servir de guide, sera le même, quel que soit le genre de reconnaissance qu'il faudra exécuter; ainsi, peu importe que l'on ait à reconnaître une route, une rivière, une position : seulement, dans le cas où l'on devra opérer à vue et avec rapidité, il faudra sacrifier quelques détails pour s'occuper plus particulièrement de ceux d'une utilité spéciale. Les instructions du général et la connaissance de l'art militaire devront en diriger le choix.

CHAPITRE XIII.

PLANS COTÉS.

220. Nous avons, en exposant les premiers principes de la topographie, § 76, parlé de l'impossibilité qu'il y aurait d'appliquer à cette branche de la science descriptive la méthode dans laquelle on fait usage de deux plans de projection. Nous avons dit comment on pouvait supprimer l'un d'eux en indiquant, par des chiffres, sur l'autre, les distances des points principaux à ce dernier. Ce procédé, qui convient parfaitement lorsqu'il s'agit de décrire des corps ou des surfaces de formes peu compliquées, facilement définissables, manquerait le but qu'on veut atteindre, lorsqu'il s'agit de question de topographie proprement dite. Aussi avons-nous de suite indiqué quelles modifications on y apporte, lorsqu'il faut représenter, sur une surface plane, les différentes circonstances que présente le terrain. Les sections horizontales cotées, les lignes de plus grande pente dont on fait usage ne sont qu'une modification, ou plutôt qu'une application de la théorie que nous allons exposer dans ce chapitre.

C'est particulièrement dans les projets, dans les tracés de fortification, qu'on se sert avec fruit des plans cotés, et qu'on résout ainsi une grande quantité de problèmes dont la solution serait infiniment moins simple, si l'on ne savait se servir que des méthodes générales de la géométrie descriptive.

221. Les objets que l'on peut se proposer de décrire se rapportent nécessairement à l'une des catégories suivantes :

Un point ;
Une ligne droite ou courbe ;
Une surface plane ou courbe.

Un point est parfaitement déterminé par sa projection et sa cote.

La position d'une droite étant établie, par la condition qu'elle passe par deux points, il s'ensuit qu'il suffit de connaître les projections et les cotes de deux de ses points.

Si la ligne est une ellipse, dont la projection doive être un cercle, la position de trois points et leurs cotes suffisent.

Pour une courbe quelconque, plane ou à double courbure, les projections des points donnés doivent être d'autant plus multipliées, qu'on veut obtenir plus de précision. Quant aux cotes, il suffit d'en connaître trois, pour le cas où la courbe est plane.

Une surface est décrite par des sections horizontales équidistantes, qui donnent des droites parallèles lorsque la surface est plane, et des courbes pouvant affecter les formes les plus variées, lorsqu'on s'occupe de surfaces qui ne sont pas planes.

222. L'échelle de pente d'une droite ou d'un plan fournit le moyen de connaître l'inclinaison de l'un ou l'autre sur le plan de projection.

Soit A'B' (*fig.* 11, *planche* XX), la projection d'une droite que nous supposons rabattue sur le plan horizontal. Ce rabattement, procédé dont on ne fait pas usage dans la méthode des plans cotés, n'est figuré ici que pour aider les esprits qui ne sont pas encore familiarisés avec cette branche de la géométrie.

Désignons par α et β les cotes qui représentent les distances AA' et BB' des points A et B au plan horizontal. La tangente de l'inclinaison de la droite est $\frac{\beta-\alpha}{A'B'}$.

Si l'on veut diviser A'B', de manière que les divisions soient les projections de points qui s'élèvent ou s'abaissent successivement les uns sur les autres de mètre en mètre, on cherche la ligne AD correspondant à une verticale CD qui soit un mètre : elle est fournie par la proportion

$$\beta-\alpha : AE :: 1^m : AD \quad \text{d'où} \quad AD\,\frac{AE}{\beta-\alpha}.$$

Maintenant, pour diviser la ligne totale et même prolongée au besoin, en portions égales à AD, et faire en sorte que les points A' et B' occupent exactement, sur l'échelle, la position qu'indi-

quent leurs cotes, on cherche, toujours à l'aide de la même proportion modifiée, l'intervalle horizontal qui doit séparer l'un d'eux du nombre entier de mètres le plus voisin. La même figure suffit pour faire mieux comprendre, puisque l'on peut tout aussi bien supposer que CD représente une fraction quelconque du mètre. Dans ce cas, A D′ indique la fraction correspondante de l'horizontale. (Voir l'exemple représenté par la *fig.* 12.)

En opérant de la même manière par rapport au second point donné, on a un moyen de vérification.

La projection ainsi divisée est l'échelle de pente de la droite.

La suite des normales, qui aboutissent les unes aux autres sur les sections consécutives d'un plan topographique, sont autant d'échelles de pente partielles qui varient d'intensité si les courbes se rapprochent ou s'éloignent horizontalement. Lorsque l'échelle du dessin est assez grande, et quand l'inclinaison est assez faible pour le permettre, on divise l'une des parties qui correspondent à 1^m, en 10, quelquefois même l'une de celles-ci en 10 encore, et l'on a les bases de hauteur exprimées en décimètres et en centimètres. Rien de plus facile maintenant que de trouver la cote d'un troisième point C d'une droite, lorsqu'on en connaît la projection, ou réciproquement, de trouver la projection du point qui aurait pour cote un nombre fixé d'avance.

Si d'abord la projection D′, *fig.* 12, *planche* XX, est donnée, on a A′B′ : A D′ : : $\beta - \alpha$: DC, d'où la quantité à ajouter à la cote du point inférieur, ou $CD = \frac{A'D'}{A'B'}(\beta - \alpha)$.

En second lieu, CD est connu, c'est A′D′ que l'on cherche, donc il faut transformer la proportion en l'équation suivante:

$$A'D' = \frac{A'B'}{(\beta - \alpha)} CD.$$

223. Lorsque les données du problème sont, la projection de la droite, la projection et la cote d'un seul de ses points et l'inclinaison exprimée par le rapport $\frac{1}{m}$, on prend, avec le compas, *m* mètres sur l'échelle horizontale, puis on porte cette longueur sur la projection de la droite, à partir du point donné. Celui où aboutit l'ouverture du compas aura une cote différente de celle connue précisément d'un mètre. Telle sera l'unité de division de l'échelle de pente qui pourra dès lors être tracée, comme il est dit plus haut.

224. *Faire passer par un point connu une droite d'une inclinaison $\frac{1}{m}$.*

La solution ressemble beaucoup à la précédente. Il est à remarquer néanmoins que le problème est indéterminé, c'est-à-dire qu'une infinité de droites satisferont à l'énoncé.

On prend sur l'échelle horizontale une longueur représentant m mètres ; on s'en sert comme rayon, pour décrire une circonférence dont le centre est la projection du point donné P. Toutes les droites partant de cette circonférence qu'on cotera d'un mètre en plus ou en moins que P, pour s'appuyer constamment sur le point, seront inclinées à l'horizon dans le rapport de $\frac{1}{m}$.

225. *Deux droites étant connues par leurs projections et par les cotes de deux de leurs points, pour connaître si elles se coupent, il faut calculer la cote du point de chacune d'elles qui se projette à l'intersection des projections de droites.* Elles se rencontrent dans l'espace lorsque le résultat du calcul donne le même chiffre pour les deux. Ce problème ne présente aucune difficulté nouvelle : car nous avons indiqué précédemment comment on trouve la cote d'un point dont la projection est connue.

Si ces droites sont contenues dans un même plan vertical, elles se rencontrent inévitablement, à moins qu'elles ne soient parallèles. Soit donc $\alpha'\beta$ (*fig.* 13, *planche* XX), la projection commune aux droites AB, A'B'. On cherche les cotes de deux points de l'une d'elles, ayant mêmes projections que deux connus de l'autre.

C'est pour mieux faire comprendre ce qui se passe dans le plan vertical, que nous employons encore un rabattement.

Ce sont ici les points A'' et B'' de AB qui ont mêmes projections que A' et B' de la seconde droite.

Le rabattement met en évidence deux triangles semblables dont le sommet commun C est le point cherché.

Ces triangles fournissent la proportion

$$A'A'' : B'B'' :: CD' : CD \quad \text{ou} \quad A'\alpha' - A''\alpha' : B''B' - B'\beta' :: \alpha'\gamma : \beta'\gamma$$

$A''\alpha'$ et $B''\beta'$ sont les cotes des points auxiliaires employés. On sait les trouver.

La première proportion peut encore se transformer en la suivante

$$A'A'' + B'B'' : B'B'' :: CD' + CD \quad \text{ou} \quad DD' : CD.$$

On en déduit enfin $$CD = \frac{B'B'' \times DD'}{A'A'' + B'B''}$$

Nous donnerons un peu plus loin, § 235, une autre méthode qui nécessite l'emploi de plans auxiliaires, et que, par ce motif, nous expliquerons, après avoir parlé des propriétés particulières aux plans.

L'opération est plus simple lorsqu'on a préalablement établi les échelles de pente des deux droites, puisqu'on peut trouver de suite sur la projection ou sur son prolongement un point de cote commune aux deux échelles.

226. *Faire passer par un point donné une droite parallèle à une autre droite connue de position.*

Il est évident que les projections doivent être parallèles et les échelles de pente égale. Il suffit donc, pour résoudre le problème, de tirer, par le point, une parallèle à la projection connue; d'unir ce point à celui de l'échelle de pente de la droite donnée qui a même cote, puis de mener à cette ligne de jonction des parallèles par les points de division de la première échelle, jusqu'à celle à construire.

227. *Un plan est déterminé de position par l'ensemble des horizontales qu'il contient ou par son échelle de pente.*

Celle-ci se projette perpendiculairement à la trace ou à l'ensemble des horizontales.

Ainsi, pour un plan illimité, il est complétement défini par une horizontale cotée et l'échelle de pente.

228. *Faire passer un plan par trois points donnés.*

Soient A,B,C, ces trois points, qui ont pour cotes 10, 15 et 13. On joint ceux dont les cotes sont la plus forte et la plus faible : tels sont A et B dans la *fig.* 14, *planche* XX. On cherche sur cette ligne le point D qui a même cote que C. On unit C à D par une droite qui est l'une des horizontales du plan ; on mène par toutes les cotes entières de AB des parallèles à CD ; on leur élève une perpendiculaire EF, et celle-ci est l'échelle de pente du plan.

229. *Mener par une droite un plan d'une inclinaison donnée.*

Soient A et B les deux points cotés de la droite et $\frac{m}{n}$ l'expression de l'inclinaison du plan.

Si l'on peut construire un cône droit dont la hauteur et le rayon de la base soient dans le rapport prescrit $\frac{m}{n}$, tous les plans tangents à ce cône seront inclinés à l'horizon dans ce rapport, et

celui d'entre eux qui contiendra la droite donnée sera celui que l'on cherche.

Cette opération est très-facile et consiste à décrire dans le plan horizontal contenant B et du point A comme centre, une circonférence dont le rayon soit à $\alpha - \beta$ (différence de cote des deux points), dans le rapport de n à m.

La *fig.* 15, *planche* XX, indique toute l'opération. Le rayon cherché est AE et le rabattement fait voir qu'on a A''E' ou $R = \frac{n}{m}(\alpha - \beta)$.

Cette circonférence est la base d'un cône dont le sommet est en A'. Si maintenant nous cherchons les traces des plans tangents qui passent par B, le problème sera résolu.

Il est à remarquer seulement que, dans le cas le plus général, il y aura deux plans qui résoudront le problème : ils seront symétriques par rapport à AB. Leurs traces passant l'une et l'autre par B seront BC, BD, et leurs échelles de pente auront pour direction CA, CD.

C'est ainsi que la question se présente lorsque l'inclinaison imposée au plan est plus grande que celle de la droite.

Le rabattement de la *fig.* 15 étant celui du plan vertical qui contient la droite, met en évidence son inclinaison A'B'A'' sur le plan horizontal de B.

Si cette inclinaison était précisément égale au rapport $\frac{m}{n}$, les deux lignes A'B', A'E' se confondraient. La droite donnée serait elle-même une génératrice du cône; on ne pourrait mener par son pied B qu'une tangente BD (*fig.* 16, *planche* XX) à la circonférence. BD serait la trace du plan dont l'échelle de pente se confondrait avec celle de la droite.

Enfin, le problème n'aurait pas de solution possible si l'inclinaison $\frac{m}{n}$, indiquée pour le plan, était plus faible que celle de AB. La *fig.* 17, *planche* XX, fait suffisamment voir qu'on ne peut mener de tangente à la circonférence par B qui tombe dans l'intérieur.

Si l'inclinaison de AB est très-faible, ou si la pente $\frac{m}{n}$ est très-forte, ou mieux encore, lorsque ces deux circonstances se présentent simultanément, la base du cône sur le plan horizontal de B est une circonférence d'un trop court rayon, et il peut en

résulter de l'indécision dans la détermination des traces des plans tangents.

On cherche alors ces traces sur un plan inférieur à A et B. Les plans cherchés doivent contenir chacun deux droites parallèles et inclinées toutes deux dans le rapport $\frac{m}{n}$ prescrit. Ces lignes peuvent être considérées comme génératrices de cônes qui ont leurs sommets en A' et B', *fig.* 18, *planche* XX, et dont les bases sont dans le plan horizontal indiqué sur le rabattement par MN. Désignons sa distance verticale à B par γ. Les rayons des deux cônes seront

$$Ab = \frac{n}{m}(\gamma + \alpha - \beta) \quad \text{et} \quad BK = \frac{n}{m}\gamma.$$

Les droites *ge*, *dl* tangentes aux deux circonférences seront les traces sur le plan auxiliaire, et l'on aura exactement, s'il est nécessaire, les traces B*c*, B*d* sur le plan horizontal de B. Elles n'ont d'ailleurs aucune utilité spéciale, puisque sans elles déjà on possède tous les éléments nécessaires à la construction des échelles de pente.

230. *Par un point* A *situé dans le plan connu de position, faire passer une droite dont l'inclinaison soit exprimée par* $\frac{m}{n}$.

On connaît donc la trace et l'échelle de pente du plan. Dans ce plan, on imagine une horizontale située à M^m au-dessous de A. Par la projection de ce point, considéré comme centre, on décrit une circonférence d'un rayon $\frac{n}{m}$ M^m. Les deux points où elle coupe l'horizontale tracée sont les extrémités inférieures de deux droites qui résolvent le problème.

Si la distance de la projection de A à l'horizontale est égale à $\frac{n}{m}M^m$, il n'y a qu'une droite, celle qui joint A au point de tangence, qui remplisse la condition voulue.

Si cette distance est plus grande que $\frac{n}{m}M^m$, il n'y a pas de solution : et, en effet, un plan ne peut contenir de droite plus inclinée à l'horizon qu'il ne l'est lui-même.

231. *Trouver la cote d'un point donné sur un plan.*

Il suffit de mener par ce point une horizontale jusqu'à l'échelle de pente.

232. *Trouver l'intersection de deux plans donnés.*

Dans chacun d'eux, on trace deux horizontales ayant respectivement mêmes côtes. Ces lignes se rencontrent deux à deux en des points qui appartiennent à l'intersection et la déterminent.

233. Si les horizontales tracées dans ces plans devaient se rencontrer trop loin, on parerait à cet inconvénient en employant denx plans auxiliaires d'une position et d'nne inclinaison quelconques. Cela se bornerait à tracer deux couples de lignes parallèles ; à attribuer à chacune d'elles la cote de deux horizontales appartenant aux plans proposés : à unir convenablement, comme l'indique la *fig.* 19, *planche* XX, ces huit points de rencontre qui déterminent ainsi les intersections des plans donnés par les plans de construction. Les intersections des deux premiers par l'un des autres se croisent sur la ligne cherchée. Ayant ainsi deux points appartenant à cette droite, elle serait déterminée.

Si les horizontales des deux plans sont parallèles, leur intersection aura la même direction : il snffira donc de connaître l'un de ses points et par conséquent d'employer un seul plan auxiliaire.

234. *Trouver le point où une droite perce un plan.*

On imagine, comme ci-dessus, un plan auxiliaire, mais avec la condition qu'il passe par la droite. On cherche son intersection avec le plan donné : cette ligne et la droite donnée se trouvant dans un même plan, le plan de construction, se rencontrent au point cherché.

Par les points cotés 8 et 14 de la droite (*fig.* 20, *planche* XX), on mène, suivant nne direction facultative, deux parallèles jusqu'aux horizontales 8 et 14 du plan connu. Leurs rencontres en B et C fonrnissent l'intersection des deux plans, et enfin le point A, où se croisent BC et la droite proposée, est celui où cette dernière perce le plan donné.

235. Nous avons annoncé, au § 225, qu'un peu plus loin, nous indiquerions un autre procédé pour trouver la rencontre de deux droites, situées dans un même plan vertical. Ce procédé est celui qui déjà vient de nous servir dans les questions précédentes.

Soient AB, CD (*fig.* 21, *planche* XX), les projections se confondant en direction des droites proposées.

Par les points cotés 11 et 15, par exemple, de l'une, on fait passer deux droites que l'on considère comme horizontales d'un plan de construction : par les mêmes cotes de la deuxième droite,

on mène aussi les horizontales d'un second plan. Celles-ci coupent les premières en EF, et la ligne EF est évidemment l'intersection des plans. Son point de rencontre H avec la projection commune aux droites données est celui où ces dernières se coupent. Il est indipensable, si les échelles de pente sont tracées sur la figure, que la cote de H concorde avec ces deux échelles. Elles n'ont d'ailleurs été indiquées que comme moyen de vérification ; et en effet, elles dispensent, ainsi que nous l'avons dit plus haut, de toute construction subsidiaire.

236. *Par un point connu faire passer un plan parallèle à un plan donné.*

Il faut joindre le point à celui qui a même cote sur l'échelle de pente du plan donné : tracer celle du plan cherché parallèlement et déterminer les divisions de cette dernière par une suite de droites parallèles partant des cotes de la première.

237. *Par deux droites données, conduire deux plans parallèles entre eux.*

AB,CD (*fig.* 22) représentent les droites ou, pour mieux dire, les portions de ces droites comprises entre les mêmes cotes.

Par B on mène BE parallèlement à CD ; par D, la ligne DF parallèle à AB. La distance entre les cotes 16 et 12 de BE sera égale à DC, et pour DF elle égalera AB.

Donc, AE sera l'horizontale d'un plan passant par les trois points A,B,E ; de même CF sera l'horizontale 12 du plan CDF.

Ces plans, passant chacun par l'une des droites données, seront parallèles entre eux. De plus, leurs échelles s'obtiendront en élevant des perpendiculaires aux horizontales AE, FC. Pour l'une, la cote 12 sera en G, et pour l'autre en K. Enfin, les divisions qui doivent avoir même longueur pour toutes deux seront connues en menant l'horizontale d'un second point, qui sur la figure est D. Elle aboutit en H dont la cote est 16, celle de H ; puis, enfin, l'on divise GH en autant de parties qu'il y a d'unités entre les cotes de G et de H.

Si les droites données se coupent, les deux plans se réduisent à un seul.

Si elles sont parallèles, le problème est indéterminé.

238. *Abaisser d'un point donné une perpendiculaire sur un plan.*

La projection de la ligne cherchée sera parallèle à l'échelle de

pente du plan, et son inclinaison sera complémentaire de l'inclinaison du plan. Si la tangente de celle-ci est exprimée par $\frac{m}{n}$, celle de la droite le sera par $\frac{n}{m}$.

Pour trouver le point de rencontre de la normale et du plan, il faut employer la méthode indiquée § 234. Pour connaître la longueur de la normale, il est nécessaire de trouver la cote de son pied sur le plan ; mener par ce point, et dans le plan, une horizontale jusqu'à son échelle de pente, et enfin, se rappeler que la longueur d'une droite dans l'espace est fonction de sa projection et de la différence des cotes extrêmes.

La *fig.* 23, *planche* XX, est destinée à faire voir que, quelle que soit la position adoptée pour le plan qu'on imagine par la perpendiculaire abaissée du point donné C sur le plan dont l'échelle de pente est MN, toujours on trouve, comme cela doit être, la même position A pour le pied de la perpendiculaire.

C'est ainsi que BP et BP′ étant les horizontales de B dans deux plans différents qui, tous deux, passent par la normale BC, les horizontales du plan donné se coupent avec celles des plans de construction suivant deux droites PQ et P′Q′ qui croisent la normale au même point A.

239. *Trouver l'intersection d'un plan donné avec une surface connue par ses courbes horizontales.*

On trace sur le plan les horizontales qui ont mêmes cotes que les sections de la surface, et les points de rencontre déterminent l'intersection demandée.

240. *Trouver l'intersection d'une droite et d'une surface.*

On fait passer par cette droite, et d'une manière arbitraire, un plan dont on détermine la ligne d'intersection avec la surface, comme il vient d'être dit au paragraphe précédent. Le point où cette ligne rencontre la droite donnée est évidemment celui qu'on voulait trouver.

241. *Par un point, mener un plan perpendiculaire à une droite.*

La trace de ce plan doit être perpendiculaire, et par conséquent l'échelle de pente parallèle à la projection de la droite. Quant à la division de cette échelle, elle est, comme nous avons déjà eu occasion de le dire, complémentaire de celle de la droite. Pour mieux faire comprendre ceci, employons encore une fois un rabattement, totalement étranger d'ailleurs à la méthode des plans cotés :

AB (*fig.* 24, *planche* XX) est la projection d'une droite ; P est celle d'un point. En rabattement, cette droite est représentée par *ab*, dont la tangente d'inclinaison est $\frac{m}{n}$ ou le rapport de *aa'* à *a'b*. L'inclinaison du plan sera *ba''b'* dont la tangente sera exprimée par $\frac{bb'}{ba''}$, c'est-à-dire par $\frac{n}{m}$. Les longueurs des bases sont d'ailleurs, pour une même hauteur, en raison inverse des pentes ; donc $\frac{n}{m}$ représentant la distance horizontale sur l'échelle de pente de la droite correspondant à l'unité en hauteur, ce sera $\frac{m}{n}$ qui exprimera cette même quantité sur celle du plan.

Si $\frac{aa'}{ba'}=\frac{2}{3}$, on aura $\frac{bb'}{ba''}=\frac{3}{2}$, et les divisions des échelles de la droite et du plan seront dans le rapport de $\frac{2}{3}$ à $\frac{3}{2}$ ou de 9 à 4.

242. *Faire passer par une droite donnée un plan perpendiculaire à un autre plan aussi donné.*

Il faut abaisser, d'un des points de la droite, une perpendiculaire sur le plan, ainsi qu'il a été dit au § 238.

On sait donc trouver sa projection, son échelle de pente et sa longueur. Si l'inclinaison du plan est représentée par $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$, etc., celle de la perpendiculaire sera 4, 5, $\frac{4}{3}$, et les divisions des deux échelles seront entre elles : : 4 : $\frac{1}{4}$, : : 5 : $\frac{1}{5}$, : : $\frac{4}{3}$: $\frac{3}{4}$, etc., ou en réduisant : : 16 : 1, : : 25 : 1, : : 16 : 9, etc.

Nous réunissons sur la *fig.* 25, *planche* XX, toutes les opérations que nous venons d'indiquer.

AB, projection de la droite.

MN, échelle de pente du plan.

CD, projection de la normale à ce plan, abaissée de C. Elle est, comme nous le savons, perpendiculaire à la trace du plan, et par suite parallèle à son échelle de pente.

Par C et D, points de la normale, dont on sait déterminer la différence de hauteur, on mène dans une direction arbitraire deux droites parallèles, CE, DF, représentant les horizontales d'un plan de construction. Par les points de l'échelle du plan donné, ayant les mêmes cotes β et α que C et D, on trace les horizontales de ce plan. Les points de rencontre avec les deux premières sont E, F, qui appartiennent à l'intersection des deux plans et la déterminent. Cette droite EF et la normale CD étant l'une et l'autre dans le plan auxiliaire, se rencontrent réellement

dans l'espace au point projeté en G, et ce point est le pied de la normale.

On a ainsi deux droites AB et CD qui sont situées dans le plan cherché. Pour terminer l'opération, il suffit de considérer les trois points de l'ensemble de ces droites, C point commun, B et G.

On cherche sur AB le point H, qui a même cote γ que G. En les unissant, on obtient l'une des horizontales du plan demandé. Par B et C, on trace deux nouvelles horizontales. Elles rencontrent en K et L la perpendiculaire élevée à GH ou une ligne qui lui soit parallèle, et qui peut être prise pour l'échelle du nouveau plan. K et L ayant mêmes cotes β, δ que C et B, il en résulte que la division de l'échelle de pente est facile à construire, et qu'ainsi le problème est résolu.

243. *Par un point donné faire passer un plan tangent à un cylindre.*

Le point peut être pris sur la surface du cylindre, comme A (*fig.* 26, *planche* XX) ou comme A'.

Le cylindre est défini par sa trace à laquelle nous pouvons attribuer la cote zéro, et par la projection cotée en un point au moins de l'une des génératrices BD.

Dans le premier cas, on mène la génératrice qui passe par A jusqu'à sa trace T, sur celle du cylindre. Cette ligne AT est celle de contact du plan tangent. Son échelle de pente est la même que celle de BD. La droite BD étant horizontale, il faudra, pour graduer l'échelle de AT, faire passer par tous les points de division de celle de BD, des parallèles jusqu'à la rencontre de AT. Si la cote de A est inconnue, elle se trouve déterminée par cette opération; si elle était donnée d'avance, il en résulterait une vérification.

Quant à l'échelle de pente du plan tangent perpendiculaire à sa trace, qui n'est autre chose que la tangente MN à la base du cylindre, elle suivra la direction du rayon CT, et ses divisions s'obtiendront en menant par celles de AT les parallèles à MN.

Si le point A' donné est extérieur, on trace une droite A'T' parallèle à DB et l'on trouve le point T' où elle perce le plan de la base, en unissant A' au point D' qui a même cote que lui et en menant, par B, une parallèle BT' à A'D'.

La ligne A'T' est la projection de l'intersection des deux plans tangents que l'on peut faire passer par A'. Les lignes T't et T't' sont les traces de ces deux plans.

244. *Mener un plan tangent à un cylindre, parallèlement à une droite donnée.*

Par un point A de cette droite on mène une parallèle aux génératrices du cylindre. Au moyen de l'échelle de pente de la droite, on trouve le point B où elle perce le plan de la base. On trouve également la trace C de la parallèle aux génératrices que l'on a fait passer par A.

La jonction de ces deux points B et C détermine la trace d'un plan parallèle au plan cherché. On aura donc celle de ce plan en menant une tangente à la base du cylindre, parallèlement à BC.

245. *Par un point donné sur une surface, faire passer un plan tangent à cette surface.*

La surface est décrite par ses sections horizontales. Le plan tangent devra contenir la tangente à la section produite par le plan horizontal qui contient le point donné. Il contiendra aussi l'élément de la génératrice qui aboutit au point de tangence. Cet élément est normal à la courbe et à la tangente qui, dans un espace très-restreint, se confond avec elle. Sa projection est également perpendiculaire à la tangente. Celle-ci est donc la direction des horizontales du plan cherché, dont l'échelle de pente a, par conséquent, la même direction que la projection de la normale. Quant aux divisions de l'échelle, elles dépendent du rapport qui existe entre l'équidistance et la longueur de la projection de la normale.

246. *Trouver l'intersection d'une surface quelconque par un plan connu de position.*

Il suffit de tracer toutes les horizontales du plan qui correspondent par leurs cotes aux sections de la surface. Leurs points de rencontre, réunis par une ligne, donnent l'intersection cherchée.

247. *Trouver l'intersection de deux surfaces.*

La marche est identiquement la même que celle suivie dans le problème précédent.

Ce sont des courbes qui se rencontrent deux à deux, au lieu d'être des droites et des courbes.

248. *Faire passer, par une droite donnée, un plan tangent à une surface connue.*

Ce plan doit, comme il vient d'être dit plus haut, avoir deux éléments communs avec la surface, ceux de la normale et de la



courbe, au point de tangence. Si l'on conçoit les plans qui produisent les sections horizontales suffisamment rapprochés, l'élément de la normale sera rectiligne, et les tangentes qui passent par ses extrémités seront parallèles.

Il faut d'abord tracer, par tous les points de l'échelle de pente de la droite AB (*fig.* 27, *planche* XX), qui ont mêmes cotes que les sections horizontales, des tangentes à ces sections. S'il s'en rencontre deux consécutives parallèles, elles seront contenues, ainsi que l'élément, rectiligne dans ce cas, de la normale qui unit les deux points de tangence, et si, à plusieurs hauteurs différentes, cette condition se trouve remplie, il y aura plusieurs solutions possibles. Cette circonstance peut ne pas se rencontrer, surtout parce que l'équidistance des sections est souvent trop grande : mais alors on peut remarquer que si les tangentes partant de AB vont en convergeant, après avoir divergé ou réciproquement, il doit y avoir un point intermédiaire tel que sa tangente et la voisine soient parallèles. Cette dernière est celle qui sépare les divergences des convergences. Sa propriété caractéristique est qu'elle forme la limite *maxima* ou *minima* de la série des angles qui précèdent, et, par conséquent, la limite *minima* ou *maxima* des angles qui viennent ensuite.

Cette circonstance se présente deux fois dans la figure pour les horizontales 4 et 8. Il y a donc deux solutions. Les échelles de pente des deux plans sont respectivement perpendiculaires aux tangentes 4 et 8, et leurs divisions sont fournies par la longueur des normales aux points de tangence, avec lesquelles d'ailleurs elles se confondent en direction.

249. Si la ligne donnée AB (*fig.* 28, *planche* XXI) est horizontale, il y a lieu de modifier le procédé dont il vient d'être fait usage. Cette ligne est en effet parallèle à la trace du plan cherché, à toutes ses horizontales, et par suite à celle qui doit être en même temps tangente à une section de la surface.

Il faut donc d'abord tracer toutes les tangentes horizontales des courbes : mais le problème n'est pas encore résolu, puisqu'on peut faire passer par toutes ces tangentes des plans qui auraient AB pour trace commune. La plupart d'entre eux couperaient la surface et ne satisferaient pas à l'énoncé du problème. Il faut trouver celui qui contient l'élément de la normale qui, suffisamment prolongée, aboutira sur la ligne AB.

Pour sortir de l'indécision où l'on se trouve, voici comment on

doit procéder. On divise AB en parties proportionnelles à l'équidistance des sections, c'est-à-dire égales entre elles.

Par un point quelconque de AB, on mène une ligne AB′ dans une direction facultative, avec la condition seulement qu'elle rencontre toutes les tangentes aux courbes, sous un angle qui restreigne l'opération dans les dimensions de l'épure. On joint les divisions 1, 2, 3, 4, 5, 6 de AB, qui indiquent des multiples de l'équidistance avec les points où AB′ rencontre la 1re, la 2e..., la 6e tangente. Ces lignes de jonction seront convergentes ou divergentes; quelques-unes pourront être parallèles entre elles. Elles le seraient même toutes s'il s'agissait d'une surface conique régulière (*fig.* 29, *planche* XXI). En effet, la génératrice SD, lieu géométrique de tous les points de contact des tangentes aux sections équidistantes, ayant une inclinaison constante de la base au sommet, les points de rencontre des tangentes seront distants entre eux comme le sont les plans horizontaux coupants. Il y a équidistance verticale entre ceux-ci, il y aura donc équidistance horizontale entre les divisions de AB′. Il devient évident que chacune des lignes AB et AB′ étant divisée en parties égales, les droites qui uniront les points correspondants de l'une et l'autre seront parallèles.

Revenant à la question principale, nous dirons que, si deux lignes de jonction sont parallèles, elles détermineront un plan qui coupera celui qu'on peut faire passer par les deux tangentes correspondantes et consécutives suivant une ligne droite. Cette droite, prolongée suffisamment, viendra rencontrer la trace AB, et puisqu'elle est contenue aussi dans le plan des deux tangentes, ce plan passera également par la ligne horizontale donnée AB.

S'il n'y a pas deux lignes de jonction parallèles, mais si elles sont d'abord convergentes, puis divergentes ensuite, ce sera, comme il a été dit plus haut lorsque le raisonnement s'appliquait aux tangentes horizontales, ce sera celle qui est l'intermédiaire entre les unes et les autres, et qui forme l'angle maximum d'un côté et minimum de l'autre avec AB′, ou aussi avec AB.

Si, enfin, ces lignes, qui servent à découvrir les tangentes favorables à la solution du problème, sont toutes convergentes ou toutes divergentes, cela exprime qu'il n'y a pas possibilité de résoudre la question.

250. *Soient donnés, une surface par ses sections horizontales, un plan vertical par sa trace et un point contenu dans ce plan par*

sa projection et sa cote, on demande de faire passer par le point donné un plan tangent à la surface en un point de l'intersection de la surface par le plan vertical.

PQ est la trace du plan vertical et P la projection du point (*fig.* 30, *planche* XXI). Par ce point, on mène une droite PR, faisant un angle quelconque avec PQ, et on la divise en parties égales, que l'on joint avec les points de cotes analogues, sur l'intersection des courbes par le plan vertical PQ. PR représente alors, comme dans plusieurs circonstances précédentes, une droite dans l'espace, plus ou moins incliné à l'horizon, selon que ses divisions sont plus ou moins serrées. Cela importe peu, puisqu'il s'agit seulement de trouver une suite d'horizontales, afin de reconnaître si, entre toutes, il y en a deux consécutives parallèles.

S'il en est ainsi, elles sont comprises l'une et l'autre dans un plan passant par PR, et, par conséquent, par P. L'intersection de ce plan, par le vertical donné, est une droite projetée suivant PQ; AB, élément de la surface proposée, appartient à cette droite qui représente la tangente menée par P à la courbe d'intersection verticale. Le plan tangent demandé est alors connu: car il doit contenir cette tangente et la tangente horizontale AT. La trace est parallèle et l'échelle de pente perpendiculaire à cette dernière. De plus, la division de l'échelle dépend des cotes de P et de A. Le problème est donc résolu.

Il ne résulte pas nécessairement de ce qui précède que le plan tangent passe aussi par BV, c'est-à-dire que AT et BV soient parallèles. Le plan est tangent au point A seulement, et peut-être sécant en B : mais, réciproquement, on peut mener un plan tangent en B, qui serait sécant en A. L'élément AB est alors l'intersection de deux plans tangents très-voisins.

S'il ne se rencontre pas deux lignes de jonction consécutives parallèles, celle qui détermine le point de tangence demandé est toujours, comme nous l'avons dit pour un cas semblable, la droite où se terminent les convergences et où commencent les divergences des autres lignes de construction. La direction AB n'est point celle d'un élément normal de la surface, puisque son inclinaison est quelconque par rapport à la section horizontale de A et à sa tangente. Mais elle n'en est pas moins, dans une très-petite partie du moins, commune à la surface et à son plan tangent.

Peut-être demandera-t-on si la droite PR, dont la direction et

l'inclinaison sont arbitraires, donnera dans toutes ses positions, si du moins cela a lieu pour l'une de ses positions, deux horizontales consécutives de cotes constantes? S'il n'en était pas ainsi, le procédé serait vicieux, puisqu'il indiquerait un point de tangence différent, plus ou moins élevé suivant que la droite auxiliaire aurait telle ou telle direction, telle ou telle inclinaison.

La figure 31, planche XXI, indique pour la droite auxiliaire, trois projections différentes, PR, PR', PR'', et fait voir que pour chacune d'elles, c'est toujours la même ligne de jonction (3 sur la figure), qui sépare la suite des angles divergents de celle des angles convergents. On comprend aisément, d'ailleurs, que le changement de position de la ligne PR ne modifie que d'une même quantité angulaire celles des horizontales qui s'appuient sur ses points de division. Leurs projections conservent donc la même relation entre elles, pour telle position qu'il convient de donner à PR.

Ainsi, la direction de PR est indifférente : mais ce qui ne l'est pas, c'est son inclinaison à l'horizon. On la fait évidemment varier, en augmentant ou diminuant la dimension arbitraire donnée aux divisions de PR. Si l'on trouve donc, dans un premier essai, toutes les lignes de jonction divergentes ou toutes convergentes, c'est une preuve que l'inclinaison donnée à la droite auxiliaire ne convient pas. On la fait varier et l'on procède de la même manière jusqu'à ce qu'on ait réussi.

251. *Par un point donné, faire passer un plan tangent à une surface, en un point de l'une de ses courbes.*

Dans le problème précédent, on imposait la direction PQ sur laquelle devait se trouver le point de tangence. Ici, cette direction est inconnue ; mais la hauteur est fixée. C'est sur la section AB, par exemple (*fig.* 32, *planche* XXI), qu'il doit être.

Observons d'abord qu'une droite telle que Pm, soit dans l'espace, soit en projection, rencontre la courbe inférieure ou sa projection en un point n qui divise Pm proportionnellement aux hauteurs de m et n au-dessus de P. Le rabattement annexé à la figure le ferait voir au besoin. Ce fait est le résultat de la similitude des triangles qui, là, sont représentés par $pc\gamma$ $pc'\gamma'$.

Si par les points m et n, on mène deux lignes parallèles, elles couperont une autre droite quelconque PC, PD, PE, partant de P dans le même rapport que Pm, Pn ; et, dans le cas où ces deux lignes seraient tangentes aux courbes, le problème serait résolu

puisqu'elles détermineraient, combinées avec PC, PD ou PE, le plan tangent passant par P.

Cette considération rend la solution du problème facile. En effet, du point P, comme centre, on trace deux arcs de cercles, dont les rayons sont plus ou moins grands, pourvu toutefois qu'ils soient entre eux dans le rapport que nous mentionnions tout à l'heure, celui des différences de niveau de la courbe AB et de celle qui lui est immédiatement inférieure ou supérieure, par rapport à P. On trace un certain nombre de rayons PC, PD, PE, jusqu'à ce qu'on rencontre celui qui convient, comme nous allons le dire.

Des points E et E', de l'un d'eux, on mène deux tangentes horizontales aux sections dans les plans desquelles elles se trouvent. Les points de tangence sont en *m* et *m'*; mais E*m*, E'*m'* ne sont pas parallèles; *m* et *n* ne conviennent donc pas. On continue à opérer ainsi par tâtonnement, c'est-à-dire que l'on essaie les points D,D' d'un autre rayon, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on rencontre deux points C,C', tels que les tangentes qui les unissent aux courbes horizontales soient bien parallèles. C'est ce que présente la figure 21.

M et N unis entre eux sont un élément de la surface: MC et NC' sont des horizontales du plan : sa trace passe par P dans la direction de MC : puis, enfin, l'échelle de pente se divise en raison de la différence de hauteur de M ou de AB et de P.

L'élément MN, si les sections étaient infiniment rapprochées, serait normal aux tangentes : dans la pratique, il n'en est pas toujours ainsi. Le plan tangent doit passer, dans tous les cas, par MN et par les deux tangentes.

Si cependant, les opérations de tâtonnement n'amenaient pas à la découverte de deux tangentes exactement parallèles, celle qu'il conviendrait de prendre serait toujours, comme dans d'autres cas analogues, l'intermédiaire entre les horizontales convergentes et divergentes.

252. *Mener un plan tangent à une surface, parallèlement à un plan donné.*

MN et AB (*fig.* 33, *planche* XXI) sont la trace et l'échelle de pente du plan donné. Les horizontales et la trace du plan cherché doivent être parallèles à MN. L'échelle de pente, parallèle à AB, aura des divisions de même dimension que les siennes. Après avoir tracé toutes les tangentes aux courbes, parallèlement à MN,

on cherche la zone dont l'inclinaison est la même que celle indiquée par AB : car il y aura contact, suivant l'élément de la normale, entre la surface et le plan cherché. Pour trouver cette zone, on prend, en un lieu quelconque de l'échelle AB, l'écartement de deux horizontales correspondant à l'équidistance des courbes qui décrivent la surface. Dans la figure, nous avons supposé l'échelle AB divisée de mètre en mètre et l'équidistance de deux mètres. Cherchant quelles sont les deux tangentes contiguës qui sont écartées horizontalement d'une quantité égale à FG, nous trouvons que ce sont celles des points C et D. Ce sera donc suivant l'une de ces deux tangentes que passera le plan cherché. Ce plan sera représenté en rabattement par C′ P′. Sa trace PQ sera déterminée en portant en contre-bas de C la distance CD ou FG autant de fois qu'est répétée l'équidistance entre C et P.

Il peut se faire qu'on ne trouve nulle part entre les tangentes un écartement précisément égal à FG.

Si toutes sont plus ou moins distantes, le problème n'est pas réalisable : si les écartements varient assez pour qu'il y en ait de plus grands et de plus petits que FG, la tangente qui détermine la position du plan est celle qui sépare les trop grands écartements des trop petits.

253. *Déterminer la courbe de contact d'un cône dont le sommet est donné, avec une surface à laquelle il doit être tangent.*

Les méthodes, indiquées aux §§ 250 et 251, permettent de déterminer par points la courbe de contact.

254. *Déterminer la courbe de contact d'un cylindre tangent à une surface et dont les génératrices sont parallèles à une droite donnée.*

MN (*fig.* 34, *planche* XXI) représente l'échelle de pente de la droite dont nous supposons l'origine *o* en M dans le plan de la section horizontale inférieure de la surface proposée. La courbe de contact s'obtiendra encore par points en cherchant successivement celui de tangence de chaque génératrice avec l'intersection de la surface par le plan vertical qui contient cette génératrice.

On se rappelle que, pour y parvenir, on joint par des droites les points cotés de même sur la projection de la droite et sur la trace du plan vertical. S'il n'y en a pas deux consécutives parallèles, nous savons où est placé le point cherché. Si, au contraire,

cette circonstance se présente, au lieu d'un point, c'est une ligne de contact qui est la portion d'intersection des deux plans comprise entre les parallèles.

En imaginant un plus ou moins grand nombre de plans verticaux, on obtient un pareil nombre de points ou d'éléments communs.

Pour éviter la confusion qu'entraînerait la multiplicité des lignes partant des divisions de l'échelle de pente MN, on pent agir plus simplement, en remarquant que si deux divisions quelconques de l'un ou l'autre des plans verticanx sont distantes entre elles comme lenrs correspondantes sur l'échelle, les lignes de jonction sont parallèles ; que si, au contraire, cela n'a pas lieu, mais que, dans la suite des distances inégales de courbes sur PQ ou toute autre, elles deviennent plus petites après avoir été plus grandes ou réciproquement qu'une division de l'échelle, cela indique que le point de contact est sur la ligne de démarcation des unes et des autres. Il suffit donc de prendre, avec le compas, une ouverture égale à la division de l'échelle, qui correspond à l'équidistance, et de la présenter successivement sur les traces de tous les plans verticaux. C'est ainsi que nous avons obtenu la courbe de contact représentée sur la *fig.* 34.

255. *Par un point donné, mener un plan tangent à deux surfaces.*

Ce plan devra contenir les tangentes des sections des denx surfaces aux points de contact. De plus, ces tangentes horizontales elles-mêmes et contenues dans un même plan sont parallèles.

Le problème est donc ramené à la recherche de ces parallèles, et pour le résoudre, voici comment on peut s'y prendre.

On imagine le plan tangent cherché coupé par un plan arbitraire ; puis, considérant l'intersection qui en résulte et le plan tangent par rapport à l'une des surfaces, seulement d'abord, il est facile, par ce que nous avons vu, § 248, de trouver la tangente qui détermine la position de ce plan tangent. On se rappelle qu'il faut mener, par toutes les divisions égales et cotées de l'intersection, des tangentes aux courbes qui ont respectivement les mêmes cotes, qu'entre toutes, on sait reconnaître celle qui appartient au plan tangent passant par la droite d'intersection et par conséquent par le point donné. On opère précisément de la même sorte à l'égard de l'autre surface. Si les deux tangentes trouvées de part et d'autre sont parallèles, cela signifie claire-

ment que les deux plans se confondent en un seul, qui est celui cherché. Si le contraire arrive, ce qui est infiniment plus probable, cela prouve que la droite, qu'on a prise arbitrairement, n'étant pas contenue dans le plan tangent unique cherché, n'est que l'intersection des deux plans tangents partiels. Il faut donc répéter longtemps et par des tâtonnements successifs, des essais semblables, basés sur des inclinaisons diverses de la droite auxiliaire.

Lorsqu'on a enfin trouvé les deux parallèles, tangentes chacune à l'une des courbes de chaque surface et satisfaisant à la condition indispensable, plusieurs fois déjà énoncée, on peut dire que la trace et l'échelle de pente du plan demandé sont connues. Voir, sur la *fig.* 35, *planche* XXI, les opérations qui viennent d'être décrites : P projection du point donné ; PQ celle d'une droite arbitraire ; les chiffres placés à droite et à gauche indiquent deux essais relatifs à deux inclinaisons différentes.

Dans la première opération, représentée par les chiffres de gauche de l'échelle de pente PQ, les tangentes 6 A et 2 B sont parallèles, mais ne satisfont qu'à cette condition ; tandis que 4 A et 5 B non parallèles déterminent la position de deux plans tangents se coupant suivant PQ.

Arrivant au second essai, en passant sous silence ceux qu'on aurait pu faire encore, sans plus de résultats que dans le premier, les chiffres de droite nous indiquent que l'inclinaison de PQ, plus grande que la première, satisfait à la solution du problème, puisque les tangentes 3 A et 5 B sont en même temps parallèles et limites entre les convergences et les divergences.

256. *Mener à deux surfaces un plan tangent parallèle à une droite donnée.*

Nous emploierons une marche analogue à la précédente :

Soit MN la projection et l'échelle de pente de la droite. Le plan tangent contiendra une droite parallèle à la première et dont la projection peut être représentée par PQ. Son inclinaison étant la même, il nous est facile de la diviser proportionnellement à l'équidistance.

Supposons l'équidistance des sections de surface égale à 2^m, les divisions de PQ seront doubles de celles de MN. Si nous connaissions l'intersection de la ligne projetée en PQ par l'un des plans horizontaux qui déterminent les sections des deux surfaces, nous connaîtrions également, en vertu de l'équidistance,

tous les autres points de la droite compris dans les plans coupants. Par ces points on mènerait des tangentes aux sections des surfaces; on rechercherait de part et d'autre celle qui jouit de la propriété de déterminer le plan tangent; puis, si les deux lignes qui satisfont à cette condition pour les deux surfaces étaient parallèles, le problème serait résolu, car le plan est parallèle à MN, puisqu'il passe par PQ; et il est tangent aux deux surfaces, puisqu'il contient les deux tangentes parallèles qui aboutissent à PQ.

Mais on ne connaît que la projection PQ et l'intervalle de ses divisions : il faut donc nécessairement opérer par tâtonnement, en attribuant au hasard une cote quelconque à l'un des points, P par exemple, et en l'augmentant ou la diminuant, jusqu'à ce qu'un dernier essai fournisse le parallélisme des tangentes caractéristiques pour chaque surface. La *fig.* 36, *planche* XXI, fait voir que trois essais ont été tentés. Nous avons attribué successivement à P, les trois cotes 1, 2 et 3. Les cotes des autres divisions étaient la conséquence de ces trois points de départ, et les opérations sont distinctes sur la figure, parce que les lignes qui y sont relatives sont discontinues, ou pleines ou ponctuées. On reconnaîtra facilement que c'est le système représenté par des lignes pleines qui résout la question, puisque les tangentes aux courbes cotées 5 sur les surfaces A et B sont parallèles et séparent les tangentes divergentes des convergentes. La trace du plan cherché est donc parallèle à ces tangentes 5 et son échelle perpendiculaire. L'une et l'autre sont indiquées sur la figure.

Généralement, il est probable qu'il faut varier les cotes attribuées aux divisions de PQ par des fractions quelconques de l'équidistance. Ce que nous avons supposé ne peut être qu'un cas particulier préféré pour rendre l'opération plus simple à pratiquer et à décrire.

257. Rien ne serait plus facile maintenant que d'indiquer une application immédiate de la plupart des problèmes résolus dans ce chapitre, en parlant des opérations du défilement. Nous ne le ferons pas : ce serait trop nous écarter du sujet principal de notre ouvrage et empiéter bien téméraireement sur une science qui est du domaine spécial du génie militaire.

CHAPITRE XIV.

COPIE ET RÉDUCTIONS DES CARTES ET PLANS.

258. Si l'on veut reproduire un dessin à même échelle, on en partage la surface en carrés ou rectangles par deux systèmes de lignes parallèles tracées légèrement au crayon : on trace, sur une feuille de papier, un même nombre de carrés égaux à ceux de l'original et l'on y dessine de proche en proche tous les détails compris dans les rectangles correspondants de la minute ; cette opération se fait, soit à vue, soit en rapportant chaque point par des coordonnées, soit enfin en décrivant deux arcs de cercles dont il est l'intersection. Les directions des lignes droites s'obtiendront en plaçant deux de leurs points, ou en les imaginant prolongées jusqu'à la rencontre des côtés du rectangle qui les comprend, et en reportant les points de rencontre au moyen du compas. Dans les parties du dessin plus chargées de détails, on pourra multiplier les carreaux ou les diviser par des diagonales.

259. Si le dessin à copier est trop précieux pour y tracer aucune ligne, on pourra le couvrir d'un papier transparent ou d'un verre sur lequel on établira toutes les lignes de construction. Lorsqu'il n'est pas chargé de détails, ou que l'échelle est un peu grande et le trait assez apparent, on peut le calquer à la vitre sur le papier même qui doit recevoir la copie. Si l'on n'y voit pas assez clair, c'est une feuille de papier transparent (huilé, végétal ou de gélatine) que l'on calque d'abord, puis on reporte cette première copie sur la feuille à l'aide de papier plombé.

260. S'il s'agit de changer l'échelle de la copie de telle sorte que les côtés homologues soient dans un rapport donné $\frac{m}{n}$, on commence par tracer un cadre dont les côtés soient dans ce rapport avec ceux du cadre de l'original ; puis on le divise en un même nombre de carreaux. On opère ensuite comme ci-dessus, en réduisant toutefois dans le rapport indiqué les longueurs prises au compas sur le modèle. On se sert pour cela ou d'un angle ou d'un compas de réduction.

Pour construire un *angle de réduction*, on trace deux lignes AB, BC (*fig.* 197) de longueurs telles que l'on ait $\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}$; on achève le triangle en unissant A et C, puis on mène dans l'inté-

rieur des parallèles à BC, qui forment ainsi une série de triangles semblables. Il résulte de là qu'une ligne telle que *bc* est toujours la réduction de la base correspondante A*b*. Il est superflu d'ajouter que les droites AB,BC font entre elles un angle quelconque.

261. Le *compas de réduction* se compose de deux branches AD, BC (*fig.* 198) se croisant en un point O, qui est la charnière du compas dont A,B,C et D sont les pointes : les branches sont disposées de manière que toujours la ligne qui unirait A à B soit parallèle à celle qui irait de C en D : il s'ensuit que l'on a AB : CD :: AO : OD, et par conséquent que CD étant la longueur d'un côté sur le modèle, AB sera son homologue sur la copie, si l'on a pu établir d'avance entre AO et OD le rapport des deux échelles. C'est à quoi l'on parvient facilement en raison de la construction de l'instrument. Le pivot O (*fig.* 199) traverse les joues du compas par deux fentes longitudinales dans lesquelles on peut le faire glisser, seulement quand elles se superposent. L'une des branches AD porte des graduations qui indiquent que le pivot leur correspondant, le rapport de AO à OD est $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc.

262. Quelquefois, les points principaux du dessin à réduire sont d'avance placés sur la feuille de la copie, mais dans un autre système de projection : on ne peut alors diviser l'original et la copie en un nombre égal de carreaux, puisque les projections d'un même point n'occuperaient pas identiquement la même position dans deux carrés homologues. On commence, dans ce cas, par unir tous ces points principaux par des lignes qui forment une suite de triangles un peu dissemblables sur l'une et l'autre feuille, en raison de la différence de projection, puis on divise de la même manière les triangles correspondants.

263. Si l'on demande que les surfaces et non les côtés homologues soient dans nn rapport donné $p : q$; en représentant par S,S′, A,A′ les surfaces des deux dessins et les deux côtés homologues, on aura $S : S' :: A^2 : A'^2 :: p : q$, d'où $A' = A \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}$. Pour trouver A′, on peut employer la méthode graphique suivante :

Sur une droite, on porte bout à bout deux longueurs BE,CE (*fig.* 200) entre elles comme p et q. Par le point E, on élève une perpendiculaire, et sur BC, on décrit une demi-circonférence : unissant leur point de rencontre D à B et C, on forme deux triangles semblables qui, ayant même hauteur, sont entre eux comme

leurs bases : leurs surfaces sont proportionnelles aux carrés des côtes homologues, donc $\overline{BD}^2 : \overline{CD}^2 :: BE : EC$. En faisant le rapport des côtés pour les deux dessins, le même que celui de BD à CD, on aura donc résolu le problème. On peut, si l'on veut, dans l'angle BDC, mener des parallèles à la base, et l'on est assuré que les portions de l'un des côtés de l'angle limitées à ces parallèles sont les réductions des portions correspondantes sur l'autre.

Il sera toujours facile de déduire l'échelle nouvelle de la construction précédente : en effet, si l'échelle première est $\frac{1}{10000}$, on porte sur BD un décimètre, par exemple de D en G ; il représente 1000^m ; et par conséquent DH équivaut également à 1000^m sur le nouveau plan. On mesure DH et l'on trouve que cette ligne a $0^m,025$, supposons; il s'ensuit que $0^m,025$ représente 1000^m, et que l'échelle nouvelle est $\frac{1}{40000}$. Les différents moyens que nous venons d'indiquer deviennent fort longs quand il s'agit de plans détaillés et d'une grande étendue : on y supplée par l'emploi de deux instruments qui abrègent beaucoup les opérations et dont nous allons donner la description et indiquer l'usage.

264. *Pantographe.* Cet instrument se compose de quatre règles AB,DC,AD,BC égales en longueur, ou tout au moins égales deux à deux : elles sont unies par quatre articulations A,B,C,D (*fig.* 201), de manière que leur ensemble forme toujours un losange ou un parallélogramme dont les angles seuls varient. A un point fixe K est adapté un calquoir : en M est placé un axe vertical traversant une douille qui est adhérente à la branche CD. Tout l'instrument peut ainsi se mouvoir autour de cet axe qui est maintenu par une masse de plomb dans laquelle il est vissé. Pour rendre plus doux les mouvements du pantographe, il repose sur des roulettes placées en A et aux extrémités des côtés AB,AD prolongés.

Cela posé, démontrons que si un crayon est fixé en P sur le prolongement de AD et à la rencontre de la droite MK, il décrira une figure semblable à celle que l'on fera parcourir au calquoir, et de plus le rapport des côtés homologues des deux figures sera le même que celui des distances de P et K au pivot M : en effet, les côtés AK et DM étant constamment parallèles et de longueurs invariables de même que AP et DP, il en résulte que les triangles AKP,DMP sont toujours semblables et fournissent les proportions (*fig.* 202)

$$AK : DM :: AP : DP :: KP : MP, \quad A'K' : D'M :: A'P' : D'P' :: K'P' : MP'$$

et puisque $AK = A'K', DM = D'M$ on déduit $KP : K'P' :: PM : P'M$

ou $KM + MP : K'M + MP' :: PM : P'M$ et enfin $KM : K'M :: PM : P'M$.

Il est évident maintenant que les triangles KK'M, PP'M sont semblables, puisqu'ils ont un angle égal M compris entre des côtés homologues proportionnels : ainsi, les lignes KK' et PP' parcourues par le calquoir et le rayon sont parallèles, et dans le même rapport que KM et MP.

265. Si l'on veut que les échelles des deux plans soient entre elles comme m et n, il faut faire en sorte que KM et MP le soient aussi. Reste donc à trouver la position de M sur DC, et celle de P sur AD qui satisfassent à cette condition.

La comparaison des triangles semblables AKP, DMP donne $AK : DM :: KM + MP : MP$ et $AD : DP :: KM : MP$. Désignant par a et b les longueurs constantes AD et AK, par x et y les variables DP et DM, et substituant m et n aux lignes MP et MK, les deux proportions ci-dessus se transforment en

$$b : y :: m + n : m \quad \text{et} \quad a : x :: n : m.$$

d'où
$$y = b\,\frac{m}{m+n}, \; x = a\,\frac{m}{n}.$$

En attribuant des valeurs diverses à m et à n, on a calculé celles de x et de y correspondant à différentes échelles, et on les a tracées sur les deux branches du pantographe. On peut s'assurer de l'exactitude des nombres trouvés pour x et y en plaçant une règle sur K et M ; puis en voyant si elle passe bien par le point P trouvé.

266. *Micrographe.* Cet instrument, que l'on nomme aussi *prosopographe*, diffère du précédent en ce que ce n'est pas par le déplacement des points P et M (*fig.* 203) sur les règles DC et AD qu'on modifie le rapport des échelles, mais par celui des deux pivots B et D. Puisque M est invariable de position sur DC, nous pouvons l'établir en C : ceci n'est au surplus d'aucune importance.

267. Comme pour le pantographe, la similitude des triangles AKP, DMP entraîne toujours celle des figures parcourues par K et P. Dans ce premier instrument, nous avons calculé DM et DP en fonction des constantes AD et AK que nous désignions par a et b ; dans le micrographe, c'est en fonction de la même longueur

AK ou b et de AP qui est ici la seconde constante a qu'il faudra trouver les inconnues $MD = y$, $DP = x$: nous aurons toujours

$$DM : AK :: PM : PM + KM, \quad \text{c'est-à-dire} \quad y = \frac{bm}{m+n}.$$

Pour trouver DP, que nous nommerons x, nous aurons

$$DP : AP :: CP : PK \quad \text{d'où} \quad x = a\,\frac{m}{m+n}$$

Ordinairement, les deux règles AK et AP étant égales de longueur, $a = b$ et les expressions de x et de y sont égales entre elles et représentées par $b\,\frac{m}{m+n}$.

S'il s'agit de copier un dessin à la même échelle ou de le réduire, on a

pour	$\frac{m}{n} = 1$	$x = \frac{1}{2}b$	$y = \frac{1}{2}b$
	$\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{3}b$	$y = \frac{1}{3}b$
	$\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$	$x = \frac{1}{4}b$	$y = \frac{1}{4}b$
	$\frac{m}{n} = \frac{1}{4}$	$x = \frac{1}{5}b$	$y = \frac{1}{5}b$, etc

268. Les règles AP et MB portent des divisions AD, Ad, Ad', Ad'', etc., mB, mb, mb', mb'', (*fig.* 203), qui sont la moitié, les deux tiers, les trois quarts, etc., de AP ou de son égal AK. Les règles AK, MD seront divisées de manière que AB, Ab, Ab', etc., MD, md, md', etc., soient la moitié, le tiers, le quart, etc., de la même longueur AP. Quand on fera correspondre AB avec MB et AD avec MD, on sera certain que la copie aura même dimension que l'original : si ce sont les divisions Ab, mb, Ad, md, que l'on réunit, la copie sera au tiers du modèle, etc.

Des trous sont percés à ces points de division de manière à y pouvoir placer à volonté les pivots B et D (*fig.* 204). On pourrait encore mieux pratiquer de longues rainures dans les quatre règles, ce qui permettrait des divisions beaucoup plus rapprochées que ne le comportent les trous entre lesquels il faut, pour la solidité, laisser un certain intervalle. En C est une pointe d'acier qui entre dans la table pour fixer l'instrument et autour de laquelle se meut le micrographe. Des roulettes adaptées en A, B et D rendent plus doux le jeu de l'instrument.

269. Nous ajouterons à la théorie du pantographe une courte description de sa construction. La figure 202 n'en donne que les lignes mathématiques : la figure 205 présente les coulisses dans lesquelles on place le calquoir K et le crayon P, les roulettes adaptées aux moyens de pinces aux extrémités des branches extérieures de l'instrument, la tige à laquelle tient le crayon et qui est surmontée d'une cuvette dans laquelle on peut placer un poids plus ou moins considérable, en raison de la dureté du crayon et de l'intensité du trait que l'on veut obtenir. Le fil indiqué par une ligne ponctuée passant par l'agrafe du pivot A tient à la partie inférieure du porte-crayon et traverse le tube dans lequel il a la faculté de monter et de descendre. Le dessinateur en tient constamment l'autre extrémité, de manière à soulever le crayon et éviter qu'il trace une ligne sur le papier, lorsqu'il veut porter le calquoir sur un autre point de l'original.

L'axe vertical M traverse la branche CD et est vissé à sa partie inférieure dans une masse de plomb garnie en dessous de pointes d'acier très-courtes et très-aiguës qui assurent la position du pantographe. Des vis de pression placées sur les trois coulisses de K, M et P en arrêtent le mouvement lorsqu'elles sont une fois placées convenablement. Deux séries de divisions sont tracées sur les deux branches DC et DP. L'une donne des positions correspondantes de M et de P pour reproduire un dessin de manière que les côtés homologues soient dans un rapport donné : l'autre sert lorsque c'est le rapport des surfaces qui est déterminé.

270. Pour obtenir les graduations relatives à cette seconde circonstance, nous allons modifier les expressions de x et y trouvées plus haut : elles sont $x=a\frac{m}{n}$, $y=b\frac{m}{m+n}$ pour le pantographe, et $x=b\frac{m}{m+n}$, $y=b\frac{m}{m+n}$ pour le micrographe.

Si les surfaces doivent être dans le rapport de p à q, on aura, en désignant par S, S′ les surfaces, et par A, A′ deux côtés homologues de la minute et de la réduction

$$S:S'::A^2:A'^2::p:q; \quad \text{mais on a aussi} \quad A:A'::m:n$$

donc $$m:n::\sqrt{p}:\sqrt{q}$$

d'où $$\frac{m}{n}=\sqrt{\frac{p}{q}};\ \frac{m}{m+n}=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}};\ \frac{n}{m+n}=\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$$

et ainsi, pour le pantographe $x=a\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; pour le micographe, $x=b\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$, et pour l'un et l'autre

$$y=b\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}.$$

271. Ce serait une opération peu exacte que d'augmenter les dimensions de la copie, c'est-à-dire de passer d'une petite échelle à une grande. Si cependant on avait besoin de procéder de la sorte pour un motif quelconque, on conçoit que rien ne serait plus simple : il suffirait en effet de changer de place entre eux le calquoir et le crayon ; si les échelles devaient être dans le rapport de 1 à 3, on amènerait les index des coulisses M et P aux divisions qui, sans cette mutation, auraient donné celui de 1 à $\frac{1}{3}$.

272. Les deux instruments et leurs mêmes divisions serviraient encore à reproduire les dessins, si le pivot était mis en P et le crayon en M : ici, les figures semblables des deux dessins seraient tournées dans le même sens par rapport au dessinateur, tandis que l'une d'elle est renversée dans l'état habituel de l'instrument. Il y aurait un inconvénient : ce serait d'établir les deux feuilles trop près l'une de l'autre ; elles se superposeraient pour peu que leurs surfaces eussent trop d'étendue.

273. Si le pantographe était dépourvu de divisions, on pourrait encore opérer par tâtonnements. On disposerait le pivot, le calquoir et le crayon en ligne droite, et l'on ferait parcourir au calquoir, une ligne quelconque de la minute : on verrait si le trait produit par le crayon est à cette ligne dans le rapport voulu. S'il n'en était pas ainsi, on déplacerait le pivot dans le sens convenable, on modifierait la position du crayon, pour toujours satisfaire à la condition que K, M et P soient en ligne droite, et l'on ferait un nouvel essai.

274. Si le dessin à réduire est d'une grandeur telle qu'on ne puisse se dispenser de déplacer le pantographe durant l'opération, il faudra, avant ce dérangement, tracer des lignes de repère homologues, Soit AB, *ab* ces deux lignes : après avoir donné à l'instrument sa nouvelle position, on place le calquoir sur A et on amène *a* de la copie sous la pointe du crayon : par le mouvement général on fait dévier le crayon, pour permettre d'enfoncer une aiguille en *a* : on place le calquoir sur B ; puis on fait pivoter autour de *a* la feuille de la copie, jusqu'à ce que *b* arrive préci-

sément sous le crayon. Dans cet état de choses on peut poursuivre le cours de la réduction.

275. Nous terminerons ce qui est relatif au pantographe en disant qu'au moyen d'une légère modification, on est parvenu pour la gravure à réduire immédiatement sur le cuivre. Il fallait pour cela obtenir une réduction symétrique ou renversée de l'original, et c'est ce qui arrive lorsqu'au lieu du crayon on place un traçoir d'acier dont la pointe est en haut. La planche de cuivre est au-dessus et présente sa face, enduite de vernis, à la pointe qui appuie contre elle par l'effet d'un ressort placé en contre-bas. On fait parcourir les contours de l'original par le calquoir, et le traçoir reproduit la figure symétrique sur le cuivre en enlevant le vernis et mettant le métal à découvert. Une glace placée sous le pantographe permet au dessinateur de pouvoir suivre plus facilement les progrès de son travail. Il est presque superflu de dire que, dans ce cas, le fil qui, du traçoir, arrive au moyen de poulies de renvoi à la main du dessinateur, produit, quand on le tire, un effet contraire à celui que nous avons indiqué n° 269, c'est-à-dire, qu'il fait descendre la pointe.

CHAPITRE XV.

LEVÉES PAR PERSPECTIVES.

276. Une levée régulière, avec des cotes et des courbes horizontales, permet l'exécution de dessins perspectifs. Réciproquement, il est possible de tirer de ceux-ci, convenablement exécutés, la projection et les cotes relatives des points principaux d'un terrain.

Soient SAS′ un angle formé par les plans verticaux contenant deux rayons visuels qui, partant de l'œil situé en S, vont passer par A et S′. Soit également tt', *fig.* 207, le tableau vertical situé à une distance $S\Sigma$ de l'œil. Si l'on rabat ce tableau autour de tt' comme charnière, les perspectives de A et S′ viendront en a et s' sur les perpendiculaires $a\tau$, $s'\Sigma'$ à tt', et le point de vue sera en s sur la perpendiculaire $s\Sigma$.

Réciproquement, si par un procédé quelconque on a obtenu une perspective $t\tau$, *fig.* 208, indiquant la direction HH′ de la ligne d'horizon, la position s du point de vue, et si l'on connaît la dis-

tance de l'œil au tableau, on pourra refaire en sens inverse la construction précédemment indiquée. Il suffira pour cela de mener tt, parallèle à la ligne d'horizon, de prendre S sur la perpendiculaire $s\Sigma$, à une distance de tt' égale à celle de l'œil au tableau, et de joindre le point S avec les pieds des perpendiculaires abaissées sur tt', des points de la perspective; l'angle qui en résultera sera celui formé par les plans verticaux.

Si de plus, on veut avoir les angles à l'horizon formés par les lignes SA, SS', il suffira de construire les triangles rectangles $S\alpha a_1$, $S\Sigma' s_1$, dont les bases seront $s\alpha$ et $s\Sigma'$, et les hauteurs celles des perspectives a, s', au-dessus de la ligne d'horizon.

La même opération effectuée en un second point s' dont la perspective aura figuré sur le premier tableau, permettra de construire le triangle de la nature SAS', si SS' est connu en longueur.

Ce que nous avons dit du sommet inconnu A se rapportera à tout autre; en sorte que par le moyen de deux perspectives seulement on aura à la rigueur la possibilité de construire un canevas renfermant les projections de tous les points visibles également des deux stations.

En augmentant le nombre de ces stations, on déterminera de nouveaux points, on vérifiera les premiers, et on pourra choisir les recoupements convenables.

277. Les avantages que présente ce mode d'opérer sont les suivants : 1° dans certaines circonstances, il n'est pas permis de faire ouvertement une levée. Les dessins perspectifs pourront en tenir lieu jusqu'à un certain point, pour la confection du canevas.

2° Les stations habituelles de la planchette ou de la boussole ne permettent pas la détermination d'un grand nombre de points, par suite de la difficulté que présente, à une seconde station, la reconnaissance de points visés à une première, à moins qu'ils ne soient très-remarquables, et par suite fort rares. Cette difficulté se trouve levée en partie par l'existence simultanée des deux dessins.

L'usage de dessins perspectifs peut donc être avantageux dans certains cas, mais il exige de grands soins pour la détermination de la ligne d'horizon, de la projection du point de vue et de sa distance au tableau. Il est bien vrai qu'en réalité, ces trois quantités ne seraient pas déterminées dans chaque circonstance, mais leur constance admise nécessiterait l'emploi de précautions propres à l'assurer.

Il est évident que les perspectives dont nous parlons ici ne sont pas des dessins exécutés simplement à vue, mais bien avec le secours de certains instruments, comme le diagraphe Gavard, la chambre claire modifiée de manière à donner une échelle constante (comme il sera dit au livre traitant de l'optique), ou mieux encore, le daguerréotype. Ce dernier instrument serait bien préférable, en ce sens qu'il exige beaucoup moins de temps pour l'exécution d'un dessin, sur lequel il donne tous les détails prévus ou non prévus plus exactement que les autres; il aurait de plus le mérite de fournir des dessins entièrement achevés, au lieu d'esquisses moins faciles à reconnaître.

278. Quel que soit le procédé employé, chaque perspective ne pourra jamais embrasser qu'un angle assez petit, souvent insuffisant pour renfermer toutes les directions qui seront à relever. Il faudra alors multiplier les positions du tableau à chaque station, et on opérera comme il suit; soient T, T', T'', *fig.* 209, une suite de positions du tableau rabattues autour de charnières parallèles à la ligne d'horizon et situées à égales distances de cette dernière. Si les tableaux n'ont aucune partie commune, et s'ils comprennent tout le paysage, deux arêtes consécutives *om*, *om'* de deux rabattements voisins, représenteront la même ligne ou plutôt le même vertical de la nature. Le point de vue sera projeté en S, centre d'un polygone régulier, si tous les tableaux ont même largeur, condition à laquelle il sera bon de s'astreindre pour la simplification des opérations. Cette projection S sera, dans ce cas, commune à tous les tableaux.

Les choses ainsi disposées, rien ne sera plus simple que d'avoir l'angle formé par les plans verticaux qui, partant de S, vont passer par deux points A et B. Soient *a* et *b* les perspectives de ces points. On les projetera en α et β, et l'angle cherché sera mesuré par $\alpha S \beta$.

Quant aux angles à l'horizon, comme ils ne se rapportent qu'à un seul point à la fois, il n'y a pas lieu de modifier le procédé indiqué premièrement.

LIVRE IV.

OPTIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA LUMIÈRE.

279. La topographie et la géodésie exigeant l'emploi de quelques instruments d'optique, il est nécessaire que l'officier qui doit s'en occuper, et, par conséquent, faire un fréquent usage de ces instruments, en connaisse bien la théorie. Il faut qu'il soit à même de remédier aux dérangements accidentels qu'ils peuvent subir, et que ses connaissances théoriques lui permettent d'y apporter des modifications ou de les changer entièrement, s'il trouve des combinaisons nouvelles et préférables. Il faut surtout qu'il puisse éviter, dans l'usage des instruments de précision, de commettre des erreurs qui détruiraient l'exactitude qu'on est en droit d'attendre de ces instruments.

280. *Hypothèses au moyen desquelles on explique les phénomènes de la lumière.*

La lumière, comme tous les autres phénomènes de la nature, ne nous est connue que par ses effets : quant à sa composition intime, elle nous échappera probablement toujours. On ne peut faire à cet égard que des hypothèses dont la meilleure serait celle qui expliquerait également bien tous les faits. Il n'en est point ainsi des deux admises aujourd'hui : l'une satisfait mieux dans certains cas et moins dans d'autres. Quoi qu'il en soit, nous allons dire quelques mots des deux systèmes :

Par le premier, on imagine que la lumière émanant d'un corps lumineux rayonne dans tous les sens comme le calorique ; qu'elle se dirige en ligne droite avec une vitesse extrême, traverse les corps transparents, et n'est arrêtée dans sa marche que par les corps opaques. Ce seraient donc des particules du corps lumineux, des molécules, si l'on peut s'exprimer ainsi, infini-

ment petites et légères, qui se sépareraient de lui, par l'effet d'une force inhérente au corps;

Le second suppose toutes les parties du corps animées d'un mouvement propre qui les fait osciller sans cesse autour d'une position moyenne. Ce mouvement, communiqué aux molécules d'un fluide sans poids appelé éther, produit ainsi, dans tous les sens, une multitude de vibrations qui, se propageant de proche en proche, produisent le phénomène de la vision, pour toute personne dont les yeux sont atteints par ces vibrations. Cette explication force à supposer que le vide parfait n'existe pas dans l'immensité qui nous sépare des astres: car, sans cela, nous ne les verrions pas.

281. *Propriétés générales de la lumière.*

Quelles que soient la cause et les conjectures faites à son égard, la lumière jouit de certaines propriétés constatées par les faits et les expériences : nous allons les passer sommairement en revue :

1° *La lumière se propage en ligne droite.* On le prouve au moyen de deux plans disposés parallèlement, et qui laissent arriver la lumière, tant qu'ils ne sont pas en contact; tandis que, si l'on les courbe, on cesse d'apercevoir la lumière longtemps avant la coïncidence;

2° *L'intensité de la lumière varie en raison inverse du carré de la distance.* Pour se rendre compte de cette loi, il suffit de supposer un corps lumineux placé successivement au centre de plusieurs sphères creuses opaques. Par ce moyen, tous les rayons lumineux seront employés à éclairer les différentes surfaces sphériques. Il résulte évidemment de là que ces surfaces seront d'autant moins lumineuses qu'elles auront plus d'étendue; d'ailleurs, les surfaces sont entre elles comme les carrés de leurs rayons respectifs. Ces rayons représentent les distances du foyer lumineux aux surfaces éclairées : donc l'intensité de la lumière, répandue sur un corps, est en raison inverse du carré de la distance;

3° *L'angle d'incident est égal à l'angle de réflexion.* Si un rayon lumineux rencontre une surface polie, sa direction change, il fait avec la normale à la surface un angle égal et symétrique à celui qu'il faisait avant d'atteindre le corps poli. La normale, le rayon incident et le rayon réfléchi, sont situés dans un même plan. Ce plan est d'ailleurs perpendiculaire à la surface réfléchissante, puisqu'il contient sa normale.

Pour s'assurer que les angles d'incidence et de réflexion sont égaux, on peut faire l'expérience suivante : on place près d'un miroir horizontal MM' (*fig.* 219), un instrument ACB propre à mesurer les angles : il est muni d'un niveau AB et d'une lunette EF : ce peut être l'éclimètre adapté à une boussole. Après avoir placé le limbe de l'instrument vertical, on vise successivement un objet éloigné S ou S', ainsi que son image S'' réfléchie par le miroir, et l'on obtient ainsi un angle d'ascension ECA, et un angle de dépression ACD qui sont égaux : le premier est égal à SDM complément de l'angle d'incidence, car ils ont tous deux leurs côtés respectivement parallèles : l'autre angle ACD est égal à CDM' complément de l'angle de réflexion, puisque ce sont des angles alternes internes : donc les angles d'incidence et de réflexion, ayant des compléments égaux, sont égaux.

On désigne sous le nom de faisceau lumineux l'assemblage des rayons qui viennent frapper la surface réfléchissante. L'expérience a prouvé que jamais la totalité n'est réfléchie : qu'une partie des rayons est absorbée par le corps lui-même, et que cette portion est d'autant plus considérable, que l'angle d'incidence est plus petit. C'est donc lorsque la lumière frappe normalement que la perte est la plus grande. La proportion entre la lumière réfléchie et celle qui est absorbée varie en raison de la nature du corps poli qu'elle a rencontré. Ce que nous signalons ici se constate journellement quand on porte ses regards sur la surface des eaux. Elles réfléchissent tous les objets environnants ; mais les images les plus nettes sont celles des points les moins voisins de l'observateur. Cela tient à ce que, pour ceux-ci, une plus grande quantité de lumière réfléchie par eux vers la surface du liquide est employée à reproduire leurs images. La différence est la plus sensible, lorsque l'observateur, abaissant ses regards normalement, voit son image beaucoup plus sombre que celles de tous les objets qui apparaissent plus ou moins obliquement. Quand l'eau est peu profonde, on aperçoit simultanément le fond sur lequel elle repose, et les objets réfléchis par sa surface. Dans le premier cas, c'est la portion de lumière qui a pénétré le liquide qui produit l'impression : ce sont les rayons brisés à la surface qui donnent lieu à la seconde.

4° *Réfraction.* La portion de lumière qui n'est pas réfléchie est absorbée par le corps s'il est opaque, ou le traverse s'il est transparent : mais alors la direction du faisceau n'est plus la même que dans l'incidence ; l'angle de réfraction est plus petit

ou plus grand que l'angle d'incidence, suivant que le corps transparent est plus ou moins dense que le milieu que traversait d'abord la lumière. On prouve que le rapport des sinus de l'incidence et de la réfraction est constant pour deux milieux; quelle que soit d'ailleurs l'amplitude de l'incidence.

Soient α et α' (*fig.* 220) les angles d'incidence et de réfraction d'un rayon RA rencontrant un corps transparent MM',*mm'*, on a $\frac{\sin.\alpha}{\sin.\alpha'}=C$. Cette constante C a été trouvée, par l'expérience, égale à $\frac{4}{3}$ ou 1,333 pour l'air et l'eau, et $\frac{3}{2}$ ou 1,5 pour l'air et le verre. En supposant qu'un rayon lumineux soit parallèle à la surface de l'eau, l'angle d'incidence serait droit et son sinus égal à l'unité : de là résulte que $\sin.\alpha'=\frac{3}{4}=0,75$. Son logarithme 9.87506 correspond à un angle de $53^g,99$ ou plus simplement 54^g. Telle est donc la plus grande obliquité sous laquelle un rayon lumineux peut pénétrer dans l'eau. On trouve de la même manière, lorsqu'il s'agit du verre, qu'à $\alpha=100^g$, correspond $\alpha'=46^g,40'$. S'il s'agit d'un corps solide et transparent, terminé par deux plans parallèles, comme l'indique la *fig.* 220, il devient évident que la lumière, après l'avoir traversé, déviera de nouveau pour reprendre une direction parallèle à la première, si le milieu qui enveloppe le corps MM'*mm'* est homogène, car on aura alors $\frac{\sin.\alpha''}{\sin.\alpha'''}=\frac{\sin\alpha'}{\sin.\alpha}$ et parce que α' et α'' sont égaux, il s'ensuit que $\alpha=\alpha'''$.

Il résulte de ce qui précède que si la position d'un objet dans l'eau et les circonstances extérieures ne lui permettent pas d'envoyer à la surface du liquide des rayons lumineux sous un angle plus petit que 54^g, cet objet ne sera pas visible au dehors. La lumière qu'il envoie sera réfléchie entièrement dans l'eau. Si le milieu est du verre, le fait est le même, tant que les rayons venant de l'objet font, avec la normale, un angle compris entre 46^g40 et 100^g.

C'est à la réfraction qu'est due l'illusion qui trompe nos yeux, lorsqu'un bâton plongé en partie et obliquement dans l'eau nous paraît coudé au point de l'immersion.

Soient MM' et ABC (*fig.* 221), la surface du liquide et le bâton : considérons quelques-uns seulement des rayons de lumière qui de l'extrémité C arrivent à la surface en n et n' : ils s'écarteront de la normale en passant dans l'air, et prendront les nouvelles directions no,$n'o'$. Si l'œil de l'observateur est situé sur cette

nouvelle direction, l'impression sera celle d'un point C′ situé à leur rencontre. Les points intermédiaires à B et C produiront des effets analogues : ils seront relevés de manière à faire voir, au lieu de BC, une ligne continue BC′. Quant à ceux qui sont placés de A en B, la marche des rayons lumineux qu'ils envoient en ligne droite vers l'œil n'offre rien de particulier.

282. *Mirage.* Disons, en passant, quelques mots du phénomène connu sous le nom de *mirage* et dans lequel on est tenté d'expliquer par la réflexion seule un effet dû à la combinaison de celle-ci et de la réfraction.

Soit MN une section dans la surface du sol, A un objet, O l'œil d'un observateur.

Les parallèles à MN tracées dans la *fig.* 37, *planche* XXI, au-dessus de cette ligne représentent les traces des plans fictifs assez rapprochés pour que l'on puisse, sans erreur sensible, considérer la densité comme uniforme entre deux plans consécutifs.

En général, la densité de ces couches augmente à mesure qu'elles s'approchent de la terre, en raison de la pesanteur de l'air et conséquemment de la pression plus grande qu'elles exercent les unes sur les autres. De là résulte l'inflexion de la trajectoire lumineuse qui présente sa concavité au sol. Mais si, sous l'influence d'un soleil ardent, la terre vient à s'échauffer au delà de certaines limites, elle communique une partie de son excessive chaleur à la couche d'air en contact avec elle. Cette cause diminue, détruit ou même dépasse l'action de la pesanteur, de telle sorte, dans ce dernier cas, que la première couche devient moins dense que la seconde. Par le même motif, celle-ci peut perdre une partie de sa densité, de même de la troisième et ainsi de suite. On conçoit cependant qu'à une certaine hauteur ces influences partielles et successives disparaissent, et qu'au delà les choses suivent la marche générale.

Supposons que PQ soit la séparation des couches dont les unes augmentent et les autres diminuent de densité à mesure qu'elles approchent de la terre.

Parmi tous les rayons lumineux qui émanent de A ou qui sont réfléchis par lui, si nous considérons l'un de ceux qui viennent rencontrer la surface PQ, celui qui l'atteint en B, par exemple, il cesse, dès ce moment, d'affecter la même courbure qu'avant, puisqu'en traversant des couches dont la densité diminue, son inclinaison sur la normale augmente sans cesse, jusqu'au mo-

ment où, voisine de 100^g, en G, la réfraction cesse, pour être remplacée par une réflexion totale. Le rayon lumineux rentrant alors, pendant sa marche inverse, dans des couches dont les densités augmentent, se recourbera symétriquement de G en O : s'il rencontre en ce point l'œil d'un observateur, celui-ci reçoit l'impression de l'objet A, par la tangente au dernier élément de la courbe et croit le voir en A''. Il peut d'ailleurs apercevoir A directement aussi, en son lieu véritable ou, pour parler plus exactement, un peu plus haut en A'. Donc cette double sensation simultanée produit le même effet qu'un objet et son image réfléchie par une nappe d'eau.

L'illusion est d'autant plus complète que cette image est vue renversée. Cette dernière circonstance s'explique très-facilement (*fig.* 38, *planche* XXI).

Le rayon efficace qui part de D rencontre la surface limite PQ, en C, plus promptement que celui de A, par la raison que D est moins élevé que A. Il est d'ailleurs moins incliné à l'horizon : car, s'il lui était parallèle, il ne passerait pas au point O. Par ce double motif, le point de rebroussement H est placé, par rapport à G, ainsi que l'indique la figure, et enfin les tangentes aux deux rayons réfractés se trouvent situées de manière à faire voir renversée l'image D'A'.

Il faut ajouter ici que le phénomène du mirage ne se manifeste que dans certaines conditions. Il ne produit pas l'image d'un objet, quelle que soit sa hauteur au-dessus de l'horizon. Sa position doit être telle que les rayons lumineux qui en émanent ou qu'il réfléchit, modifiés dans leur direction par l'accroissement de densité successif, à mesure qu'ils traversent des couches inférieures, arrivent à la limite où la réfraction cesse pour être remplacée par la réflexion. La marche du rayon arrivé à ce point désigné par G ou H dans les *fig.* 37 *et* 38, *planche* XXII, devient symétrique à ce qu'elle était avant de l'atteindre.

5° *Vitesse de la lumière.* Elle a été conclue de l'observation de certains phénomènes astronomiques, et trouvée égale à 34,500,000 lieues en 8' 13'', ou 69,981 lieues par seconde : en sorte que nous devons regarder comme instantanée, la sensation de la lumière qui nous arrive des objets terrestres.

6° *Composition de la lumière.* Un rayon de lumière, quelque délié qu'il soit, peut toujours être décomposé en sept rayons principaux, diversement colorés. Cette décomposition, obtenue au moyen d'un prisme en verre (*fig.* 222), est due à ce qu'en y pé-

18.

nétrant, ils se séparent, animés qu'ils sont de réfrangibilités différentes. Cette propriété se nomme *dispersion;* ses effets varient suivant la nature des milieux qui la produisent.

Quelle que soit l'explication qu'on en donne, les choses se passent comme si, de chaque point d'un corps, un rayon se propageant en ligne droite venait frapper notre œil et y produire la sensation de la vue de ce point; et que, de plus, la nature du corps décomposât la lumière qu'il reçoit, de manière à renvoyer seulement les rayons de la couleur qui lui est propre et à absorber tout le reste.

283. *Lumière diffuse.* Les corps dont les surfaces ne sont pas polies ne sont plus soumis aux lois de la réflexion indiquées précédemment. Ils renvoient alors la lumière dans tous les sens, sans lois précises et d'une manière qui dépend de l'état de leur surface. Il en est de même de certains corps transparents dont la surface n'est pas polie. La lumière réfléchie ou réfractée est alors appelée lumière diffuse. Presque tous les objets de la nature sont dans le premier de ces cas. C'est à cette diffusion que l'on doit d'en pouvoir connaître les formes. On les voit, tandis que les corps parfaitement réfléchissants ou parfaitement transparents ne donnent connaissance que des objets qu'ils réfléchissent.

284. *Clarté des objets.* Cette clarté dépend de la lumière envoyée par le corps, qu'elle lui soit propre ou qu'elle provienne d'une réflexion diffuse; nous n'avons rien à dire à ce sujet. Mais, toutes circonstances égales d'ailleurs, la distance n'influera-t-elle pas sur cette clarté? Nous avons vu précédemment que les quantités de lumière venue d'une même source, reçues par une même surface, étaient proportionnelles à $\frac{1}{d^2}$ (d étant la distance). Il en sera donc ainsi de celles qui frappent la pupille. Mais, d'un autre côté, l'objet considéré paraît plus petit en s'éloignant; ses dimensions linéaires sont proportionnelles à $\frac{1}{d}$, et ses dimensions apparentes en surface, proportionnelles à $\frac{1}{d^2}$. Le rapport entre les quantités de lumière et les surfaces qu'elles éclairent sera égal à l'unité, quelle que soit la distance, et par suite un même objet paraîtra également éclairé à toutes les distances.

Ceci n'est vrai toutefois qu'en faisant abstraction de l'atmosphère.

285. *Perspective aérienne.* Quelque transparente que soit

cette atmosphère, elle absorbe une partie de la lumière qui la traverse. Son interposition plus ou moins efficace changera-t-elle la loi qui dit que l'intensité de la lumière reçue est en raison inverse de la distance? Et dans quel sens ce changement aura-t-il lieu?

Considérons un cône lumineux terminé aux deux surfaces S et *s* situées à des distances R et *r* du sommet de ce cône (*fig.* 206). La même quantité de lumière émise par le point O arrive sur l'une ou l'autre surface, mais diminuée dans chaque cas d'une perte proportionnelle aux nombres des molécules d'air rencontrées. En désignant par *n* le coefficient de la lumière absorbée par chaque molécule, et par 1 la lumière totale, les surfaces *s* et S recevront des quantités représentées par

$$1-nr^2 \quad \text{et} \quad 1-nR^2.$$

L'intensité est proportionnelle elle-même à ces nombres et inversement aux surfaces apparentes de l'objet.

Sur *s* et S les intensités seront donc

$$\frac{1-nr^2}{r^2} \quad \text{et} \quad \frac{1-nR^2}{R^2}$$

et leur rapport $$\frac{i}{I}=\frac{1-nr^2}{1-nR^2}\,\frac{R^2}{r^2}$$

Si $R>r$, le coefficient $\frac{1-nr^2}{1-nR^2}$ sera >1 et $\frac{i}{I}>\frac{R^2}{r^2}$.

Si on reporte cette conséquence dans le paragraphe précédent, on voit que l'intensité de la lumière devenant proportionnelle à une quantité $<\frac{1}{d^2}$, tandis que la surface reste proportionnelle à $\frac{1}{d^2}$, la clarté représentée par leur rapport deviendra <1. A deux distances R et *r*, le rapport des clartés sera rigoureusement

$$\frac{C}{c}=\frac{1-nR^2}{1-nr^2}$$

et si l'on suppose une des distances, $r=1$

$$C=c\,\frac{1-nR^2}{1-n}$$

pour une valeur donnée $\frac{c}{1-n}=\alpha$, on aura

$$C=\alpha\,(1-nR^2),$$

La clarté, au lieu de rester constante, diminue donc en réalité de quantités proportionnelles au cube de la distance, et cela d'une manière d'autant plus sensible que n est plus grand ou que l'atmosphère est moins transparente.

L'aspect sous lequel on aperçoit les objets dépend de la nature et de l'intensité de la lumière qu'ils envoient, lumière d'autant plus diminuée (du moins proportionnellement aux surfaces), que la distance est grande; cet aspect dépend également des rayons réfléchis dans tous les sens par les molécules de l'atmosphère, rayons qui frappent l'œil en même temps que les premiers. Alors donc que la distance vient à croître, la première influence diminue et la seconde augmente. L'effet particulier à la réflexion atmosphérique devient de plus en plus sensible, et les objets prennent la teinte de cette atmosphère, c'est-à-dire la couleur bleue, qu'à l'état de pureté l'air réfléchit plus facilement que toute autre.

L'ensemble de ces deux causes combinées constitue la *perspective aérienne.*

Ce qui précède s'applique aux objets terrestres, mais n'influe en rien sur la clarté des astres, dont les rayons traversent toujours la totalité de l'atmosphère. Il semble y avoir désaccord avec les observations des étoiles, dont les éclats divers devraient être expliqués par des pouvoirs lumineux différents, indépendamment des distances. Mais, sans nous arrêter à l'interposition de l'éther qui, quelqu'élastique qu'on le suppose, peut jouer avec une intensité moins grande le rôle dévolu à l'atmosphère, remarquons que les raisonnements qui précèdent ne s'appliquent pas aux étoiles. Nous nous sommes appuyé, en effet, sur cette considération que les objets paraissent sous des dimensions d'autant plus petites qu'on les éloigne davantage, et il n'en est pas ainsi des étoiles, qui apparaissent toujours comme des points. La loi simple des intensités lumineuses en raison inverse des carrés des distances reste donc applicable à ces astres.

286. *Conditions d'existence et de visibilité des images.* Quelle que soit l'explication qu'on en donne, il est certain qu'un point lumineux envoie individuellement, dans tous les sens, des rayons essentiellement divergents. L'œil qui doit donner connaissance de ce point a été disposé, par la nature, de manière à agir sur la sensation lorsqu'il est frappé par des rayons placés dans ces circonstances naturelles. Si donc l'homme peut parvenir à rem-

placer les objets de la nature par des images de ces objets, il doit employer des instruments qui satisfassent à ces deux conditions :

1° Un point de l'objet doit donner naissance à un point unique de l'image, à très-peu près du moins;

2° Les rayons définitifs d'un même point de l'image doivent être livrés à l'œil, à l'état divergent.

287. *Images réelles.* Avant d'être ainsi divergents, les rayons soumis à l'influence d'un appareil optique ont pu se rencontrer, et leur point de rencontre a été *l'image réelle* du point correspondant de l'objet.

Si, au lieu même où se forme cette image, on a placé un corps ne renvoyant que de la lumière diffuse, soit par réfraction, soit par réflexion (*fig.* 210), le point de l'obstacle frappé par le faisceau devient lumineux lui-même et envoie dans tous les sens des rayons divergents dont l'œil peut avoir sensation, dans une position quelconque. Si, au contraire, on a laissé ces rayons continuer librement leur chemin, l'œil est obligé, pour apercevoir l'image, de se placer dans l'espace embrassé par le faisceau (espace généralement très-restreint), *fig.* 211, et au delà du point de rencontre.

Images virtuelles. Les rayons peuvent être divergents, sans pourtant s'être rencontrés (*fig.* 212); ils sembleront alors partir d'un point n'existant pas réellement, de *l'image virtuelle.* Mais peu importera à un œil placé en O', pour lequel ces rayons arriveront toujours à l'état convenable, c'est-à-dire à l'état de divergence.

288. Il résulte de ce qui précède qu'une image peut être aperçue par trois moyens :

1° *Fig.* 210, réellement, avec le secours d'un écran. Ce moyen est peu employé, parce que l'existence même de cet écran diffusant les rayons dans tous les sens, n'en laissera parvenir qu'un petit nombre à la pupille, dans chaque position de celle-ci, position efficace toujours, mais *peu* efficace;

2° *Fig.* 211, réellement encore, en laissant libres les rayons émergés et en plaçant l'œil en arrière de l'image, dans une position O précisée par les conditions suivantes : se trouver dans l'épaisseur du faisceau et à une certaine distance en deçà de laquelle les sensations sont diffuses;

3° *Fig.* 212, virtuellement, en précisant comme ci-dessus la

position de l'œil en O'. Ce dernier moyen est de beaucoup préférable au précédent ; voici pourquoi.

Les images sont toujours assez peu lumineuses ; aussi s'arrange-t-on de manière que l'œil ne puisse considérer qu'elles seules, en l'empêchant de recevoir des rayons latéraux venus directement d'objets étrangers ; ces images, fussent-elles même très-éclairées, il y aurait encore avantage à opérer ainsi, la sensation unique d'un objet étant beaucoup plus nette que celle qui a lieu lorsque l'œil reçoit simultanément d'autres impressions. Pour arriver à ce but, l'instrument est prolongé jusqu'à la position qu'occupera l'observateur.

On voit alors que le premier système (*fig.* 211), relatif à l'image réelle, exigerait l'adjonction d'un appendice matériel assez long à la partie efficace de l'instrument ; tandis que le second système, celui de l'image virtuelle, pourra être disposé de telle sorte que l'œil se place directement contre l'instrument lui-même.

CHAPITRE II.

EFFETS DE LA RÉFLEXION.

289. ***Miroirs plans.*** Pour étudier les effets de la réflexion produite par les surfaces polies, nous allons nous occuper d'abord de ce qui a lieu quand la surface est plane. Plaçons un point lumineux A (*fig.* 223), vis-à-vis un miroir MM' : il pourra être considéré comme le sommet d'un cône formé par les rayons incidents, et dont l'axe serait le rayon AB, qui tombe normalement sur le miroir. Ce dernier rayon se réfléchira sur lui-même, et si tous doivent se rencontrer en un seul point, il en sera le lieu géométrique. Un autre rayon, tel que AC, se réfléchira, d'après la loi connue suivant CD : il divergera donc par rapport à AB, et ce ne sera que les prolongements qui se rencontreront en A'. Les distances de A et A' à la surface du miroir sont égales : car les deux triangles rectangles ABC, A'BC, sont égaux comme ayant un côté commun et leurs angles en C égaux : donc AB=A'B ; concluons de là que, pour tout autre rayon, le prolongement de sa réflexion passera également par A'. Ce point de réunion est ce que l'on nomme le foyer ou l'image de A. Une personne placée devant le miroir apercevra le point A, comme si, abstraction faite de la surface réfléchissante, il était situé en A'. Ce sera seu-

lement une illusion produite par le petit cône réfléchi, qui aura pour base la prunelle de l'œil. Un foyer tel que A', formé par la rencontre des rayons prolongés, n'existe donc pas réellement. Il est désigné sous le nom de *foyer virtuel*, par opposition à ceux qui, formés par la réunion des rayons eux-mêmes, sont dits *réels*.

290. Si, au lieu d'un point, nous supposons qu'il s'agisse de la réflexion d'un objet AB (*fig.* 224), l'image de chacune de ses parties se construira comme précédemment, et l'œil en saisira l'image totale par l'ensemble de tous les petits cônes, qui ayant pour base commune la prunelle O, auront leurs sommets en chacun des points de A'B'. En résumé, nous dirons que, par rapport à un miroir plan, l'image est virtuelle, droite, de même grandeur et à même distance du miroir que l'objet.

De ce qui précède il résulte encore que, si le miroir MM' (*fig.* 225), est rapproché de A d'une quantité *bb'*, la distance entre A et A' diminuera deux fois plus. Ainsi, une personne placée vis-à-vis un miroir, ne voyant pas son image assez nette, peut, en rapprochant le miroir d'une certaine quantité, diminuer la distance à son image d'une quantité double.

291. Nous avons indiqué, § 157, l'emploi d'un miroir ou d'un prisme dans la boussole à réflexion : c'est ici le lieu de donner quelques nouveaux détails à ce sujet.

L'œil O reçoit la sensation du point T (*fig.* 226) par les rayons qui arrivent horizontalement suivant TM : en même temps, il éprouve une autre impression, c'est celle du chiffe qui est placé en P sous la verticale de M. En effet, les rayons qui de P arrivent en M sur le miroir, se réfléchissent bien suivant MO : l'œil aperçoit donc P dans la position P', et par conséquent voit l'objet T et lit l'angle qui lui correspond. La substitution au miroir d'un prisme lenticulaire, c'est-à-dire d'un prisme dont la face plane MM' fait fonction de miroir et dont les deux autres faces sont des segments de sphère, a pour but, d'abord d'éviter l'inconvénient attaché à tout miroir, de se détériorer par l'altération ou la disparition du tain ; puis ensuite de rendre plus grandes les dimensions apparentes de la graduation, au moyen de la convexité de deux des faces du prisme. Plus loin, nous dirons comment cet effet est produit par la réfraction. Nous devons expliquer ici pourquoi la face plane étant inclinée à 50^g, jouit de la propriété de réfléchir les rayons lumineux qui arrivent de P (*fig.* 227), et cela,

sans qu'il soit nécessaire d'appliquer une lame opaque sur la face plane. L'addition de cette dernière a un autre but : c'est d'éviter qu'il n'entre par ce côté de la lumière qui, venant se croiser avec celle qui produit l'image P', la rendrait confuse. Nous venons de voir, § 281, que pour qu'il y ait réfraction, le plus grand angle sous lequel la lumière peut traverser le verre est 46 ou 47g avec la normale, puisqu'à ce moment le rayon réfracté sortirait en glissant sur la surface : au delà de cette limite, il n'y a que réflexion, et c'est ce qui arrivera pour le rayon lumineux PC (*fig.* 227), puisqu'il est incliné de 50g sur la normale CN.

292. *Miroirs concaves.* La théorie des miroirs courbes se déduit très-simplement de celle des miroirs plans, en remplaçant pour chaque point d'incidence, la surface supposée connue, par son plan tangent : on est alors à même de déterminer l'image d'un point. Dans la pratique, on ne se sert, pour plus de simplicité, que de miroirs sphériques d'un très-grand rayon, comparativement du moins aux dimensions du segment qui forme le miroir. Nous aurons donc à considérer les miroirs sphériques, concaves et convexes.

Soit C (*fig.* 228) le centre d'une calotte sphérique réfléchissante dont l'arc MO représente une section, et S un point lumineux. Parmi tous les rayons qui émanent de ce point, il en est un, SC, qui arrive normalement et qui se réfléchit sur lui-même. Un autre rayon SM se réfléchira suivant FM, de telle sorte que SMC = CMF. Pour que le point lumineux S soit remplacé par une image, il faut, avons-nous dit précédemment, que tous ses rayons réfléchis aillent passer par un même point. Nous savons déjà que cette image, si elle existe, doit se trouver sur SC ; elle sera donc en F. Nous serons assurés que ce point F est unique si nous trouvons pour FC ou pour OF des valeurs constantes, avec le même miroir et le même point lumineux. Ce que nous disons de la section représentée sur la figure s'appliquera de même à toutes les sections passant également par S et par C, sections dont l'ensemble renferme le miroir entier et tous les rayons qui émanés de S vont frapper ce miroir.

Il suffira donc de prouver que, approximativement du moins, tous les rayons réfléchis sur la figure vont passer par le même point F du rayon normal à la surface réfléchissante.

Considérons d'abord un cas particulier.

293. *Foyer des rayons parallèles.* Le miroir MM′ (*fig.* 229), étant placé perpendiculairement au faisceau lumineux qui l'atteint, nous dirons encore que tous les rayons réfléchis se rencontreront sur l'axe. Ce que nous cherchons, c'est la distance OF. Pour cela menons un rayon quelconque SM, sa réflexion MF complétera un triangle FMC, dans lequel les angles en M et C sont égaux; en effet, FCM = CMS comme alternes internes : FMC = CMS comme incidence et réflexion; donc FCM = FMC : dont les côtés opposés MF, CF sont égaux. Actuellement, menons la tangente MT, elle terminera un triangle MTF : nous aurons MTF = VMS comme correspondants : TMF = VMS comme compléments de deux angles égaux, l'incidence et la réflexion : donc encore MTF = TMF, et par suite MF = TF, donc enfin FT = FC; d'ailleurs, la sous-tangente OT est extrêmement petite : donc on peut dire que le foyer principal est sensiblement placé à égale distance du miroir et de son centre.

294. Il y aurait encore, en faisant différentes suppositions, à voir quelles relations existent entre les positions de S et de son foyer, mais au lieu de les tirer des modifications qui en résulteraient dans le tracé de la figure, cherchons une formule qui établisse cette relation; puis nous en déduirons d'une manière plus élégante et plus générale tous les cas particuliers.

En considérant l'angle OCM extérieur au triangle CMS (*fig.* 228), nous voyons que l'on a OCM = CSM + CMS. L'expression de ce même angle déduite du triangle FCM sera OCM = OFM — FMC, et comme FMC = CMS, il en résulte qu'en ajoutant les deux valeurs de OCM, il vient 2 OCM = OFM + OSM.

Les angles en C, en F et en S étant toujours très-petits, on peut, sans altérer la vérité, leur substituer leurs sinus ou leurs tangentes (pour 10 grades, amplitude que n'atteignent jamais les angles dont nous nous occupons, la différence entre le sinus et la tangente étant moindre que 0,002, celle de l'une de ces lignes trigonométriques à l'arc est d'environ 0,001). Cela posé, abaissons de M la perpendiculaire MP, et nous formerons ainsi trois triangles rectangles dont MP sera un côté commun, et dont les troisièmes angles seront en C, F et M; ils nous fourniront les relations suivantes

$$\sin C = \frac{MP}{MC};\ \sin.F = \frac{MP}{MF};\ \sin.S = \frac{MP}{MS}$$

Substituant ces sinus à la place des angles, il vient

$$2.\frac{MP}{MC}=\frac{MP}{MF}+\frac{MP}{MS} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{MC}=\frac{1}{MF}+\frac{1}{MS}$$

ou encore, en désignant par r, f et s les distances OC, OF et OS que l'on peut mettre à la place de MC, MF et MS

$$\frac{2}{r}=\frac{1}{f}+\frac{1}{s} \qquad (1)$$

Cette formule symétrique par rapport à f et s indique que l'objet et son image peuvent occuper réciproquement la place l'un de l'autre : toutes les couples de points tels que F et S sont dites *foyers conjugués.*

Pour connaître la position du foyer principal dont nous désignerons la distance au miroir par F, faisons dans la formule ci-dessus $s=\infty$, il en résultera $\frac{1}{F}=\frac{2}{r}$ ou $F=\frac{r}{2}$; expression conforme à ce que nous a donné la démonstration synthétique. On peut, si l'on veut, substituer dans la formule (1) $\frac{1}{F}$ à $\frac{2}{r}$, ce qui la change en celle-ci $\frac{1}{F}=\frac{1}{f}+\frac{1}{s}$, qui établit une relation entre la distance focale principale et celles de deux foyers conjugués quelconques.

Nous avons vu qu'à $s=\infty$ correspond $f=\frac{r}{2}$
si $s=r$ on a aussi $f=r$

c'est-à-dire que le point lumineux étant au centre, le foyer s'y trouve également.

Quand $s>r$. . . . . $\frac{1}{s}<\frac{1}{r}$ donc $\frac{1}{f}>\frac{1}{r}$ ou $f<r$

$s<r$. . . . . $\frac{1}{s}>\frac{1}{r}$ $\quad \frac{1}{f}<\frac{1}{r}$ $\quad f>r$

$s=\frac{r}{2}$. . . . $\frac{1}{s}=\frac{2}{r}$ $\quad \frac{1}{f}=o$ $\quad f=\infty$

$s<\frac{r}{2}$. . . . $\frac{1}{s}>\frac{2}{r}$ $\quad \frac{1}{f}<o$ $\quad f<o$

c'est-à-dire que le point lumineux étant situé entre le foyer principal et le miroir, les rayons réfléchis divergent et ne se rencontrent que par leurs prolongements, au delà du miroir pour y former un foyer virtuel.

Enfin, si $s = o$, on a $\frac{1}{f} = \frac{2}{r} - \frac{1}{o}$, ce qui exige, pour ne pas impliquer d'absurdité, que f soit aussi égal à zéro : car de (1) l'on tire $f = \frac{rs}{2s - r}$ qui fait voir que f et s sont nuls simultanément.

Si le point lumineux est situé en S', hors de l'axe du miroir, la relation indiquée par l'équation (1) existe toujours par rapà la droite S'M' (*fig.* 230) qui passe par le centre, et par suite les foyers conjugués ne sont pas situés du même côté de l'axe, excepté quand s étant plus petit que $\frac{r}{2}$, le foyer devient virtuel.

295. Au lieu de ne considérer qu'un point, supposons un objet AB (*fig.* 231), nous construirons facilement les foyers de tous ses points : mais pour ne nous occuper que des extrémités A et B, traçons les deux rayons qui, passant par le centre, vont rencontrer le miroir en M et M' : l'image sera évidemment comprise dans l'angle MCM'. Pour avoir la réflexion d'un second rayon partant de A, nous pouvons prendre celui AN, qui étant parallèle à l'axe, vient passer par le foyer principal F, et sa rencontre en A' avec AM' sera le foyer de A. On obtient de même B'. L'image est réelle, renversée et toujours plus petite que l'objet. Quand celui-ci est à l'infini, son image se réduit à un point en F. AB se rapprochant, A'B' augmente et devient précisément égal à AB, lorsqu'ils arrivent tous deux simultanément au centre. L'image peut diminuer par deux causes : ou, comme nous venons de le dire, quand l'objet s'éloigne ; ou, quand restant à la même place, c'est le centre qui se rapproche du miroir : car, dans l'un et l'autre cas, l'angle ABC diminue et, par suite, son opposé par le sommet dans lequel est comprise l'image. C'est d'ailleurs ce qu'indique parfaitement l'expression de A'B' au paragraphe suivant, § 296.

Les figures 232 et 233 indiquent comment se forment les images d'un point ou d'un objet situé entre le miroir et le foyer principal. On voit que, dans la seconde, on a encore mené par les extrémités A et B, les rayons qui passent par le centre, et les rayons parallèles. Ici, l'image est toujours droite, virtuelle et agrandie. Elle est toujours agrandie : car elle est comprise dans le même angle A'CB' que l'objet AB, et, en outre, elle est plus éloignée du sommet C. On pourrait ajouter cependant que l'impression, pour un observateur, dépendra du point d'où il verra l'image. En effet, si l'œil est en C, l'image et l'objet soustendant le même

angle visuel paraîtront de même grandeur : si l'œil est en H, HB paraîtra plus grand : ce sera le contraire, si l'œil est placé vers K au delà du centre.

Pour éprouver la sensation produite par une image virtuelle, il faut nécessairement que l'œil se trouve dans la direction de l'un des faisceaux lumineux réfléchis ; tandis que l'image réelle peut être vue, ou de la même manière, ou en la recevant sur un corps translucide, suivant que l'œil est du même côté que le miroir, par rapport à l'image ou du côté opposé.

296. Si nous voulons connaître la relation qui existe entre les dimensions de l'objet et celles de son image, en raison de la distance du premier au miroir, remarquons que nous tirons des triangles semblables ABC,A'B'C (*fig.* 231), la proportion

$$A'B' : AB :: CF' : CS :: r - f : s - r.$$

Pour éliminer f, substituons sa valeur $\frac{rs}{2s-r}$ déduite de l'équation (1), nous aurons

$$A'B' : AB :: r - \frac{rs}{2s-r} : s - r :: \frac{2rs - r^2 - rs}{2s-r} : s - r :: rs - r^2 :$$

$$(s-r)(2s-r) :: r : 2s - r \qquad \text{d'où} \quad A'B' = AB\frac{r}{2s-r}.$$

D'où il résulte que le rapport entre les dimensions de l'objet et de son image est précisément le même que celui des distances focales conjuguées.

Tant que $s > r$, le coefficient de AB est plus petit que l'unité et par suite $A'B' < AB$.

Si $s = \infty$, $A'B' = 0$: quand $s = r$, on trouve $A'B' = AB$. Lorsque $s < r$, le dénominateur $2s - r$ est plus petit que r et l'image est amplifiée. Si $s = \frac{r}{2}$, le dénominateur devient nul, et A'B' est d'une grandeur infinie. En supposant $s < \frac{r}{2}$, on a $2s - r$ négatif et plus petit que r; par conséquent A'B' négatif et plus grand que AB. Enfin $s = o$ produit $A'B' = -AB$, c'est-à-dire que l'image vient se réunir à l'objet sous la même dimension, comme il arrive quand l'objet est au centre du miroir. Ajoutons que renversée au centre, elle est droite à la surface du miroir. Tous ces résultats sont conformes à ce que nous avons trouvé, n° 295, en



modifiant la figure suivant les différentes hypothèses que nous venons de faire.

297. *Détermination pratique du foyer principal.* On présente le miroir concave au soleil; on reçoit l'image sur uu carton blanc que l'on varie de position jusqu'à ce qu'elle soit la plus petite, la plus nette et la plus brillante possible : on mesure et l'on a ainsi la distance focale principale. Si l'on veut connaître le rayon de courbure, on se rappelle qu'il est double de cette distance.

298. *Miroirs convexes.* Une marche analogue à celle que nous venons de suivre va nous expliquer les effets produits par un miroir convexe placé devant un objet lumineux. Soit S (*fig.* 234) le point lumineux et MM′ le miroir : MN étant la normale, il est évident que les rayons réfléchis divergent, et que ce ne sont que leurs prolongements qui se rencontrent au delà du miroir. Nous pouvons donc conclure déjà que le foyer est virtuel. Si S s'éloigne pour se placer en S′, le foyer s'éloigne aussi du miroir et se trouve en F′. Quand S est à l'infini, le foyer est le plus loin qu'il puisse se trouver du miroir : il est placé à très-peu près à égale distance du miroir et de son centre. Nous ne reproduirons pas ici la démonstration géométrique qui est tout à fait celle donnée pour le miroir concave. S'il s'agit de construire l'image de AB (*fig.* 235), il faut unir les points A et B au centre C. Sur AC et BC se trouveront les points de réunion des rayons lancés par A et B; puis, en construisant la réflexion d'un autre point quelconque, ou, en particulier, de celui qui, entre tous, est parallèle à l'axe, on aura les points A′ et B′. Le rayon parallèle est préféré, parce qu'on sait que le prolongement de sa réflexion passe par le foyer principal F. Il résulte de là que l'image est virtuelle, droite et plus petite que l'objet : cette dernière circonstance est évidente, puisque l'objet et son image soustendent le même angle ACB dont le sommet est au centre, et que c'est l'image qui est la plus voisine du sommet.

299. Pour obtenir la formule qui établit une relation entre les distances de l'objet et du foyer, considérons les triangles MCF SMC (*fig.* 234), ils donnent MCF = MFS — CMF et MCS = RMC — MSC, et comme CMR = CMF, il vient en ajoutant, 2,MCF = MFS — MSC : abaissons la perpendiculaire MP qui forme les trois triangles rectangles desquels nous tirons les valeurs des tangentes des angles en C, F et S. Substituant les tangentes aux angles, on trouve pour équation finale $\frac{2}{r}=\frac{1}{f}-\frac{1}{v}$.

Ici, les signes contraires, qui affectent f et s, nous font voir que l'objet et l'image ne sont pas situés du même côté du miroir, tandis que l'image et le centre le sont. Nous voyons encore, ce qu'indique au surplus le simple bon sens, que l'objet et l'image ne peuvent point alterner de position, puisque la formule n'est pas symétrique par rapport à f et à s.

Il est un cas cependant où l'image peut devenir réelle, et par conséquent se trouver située en deçà du miroir : c'est celui où les rayons lumineux arrivent sur sa surface en convergeant. Cela n'a lieu, comme nous le verrons n° 336, à l'occasion du télescope de Cassegrain, qu'autant que ces rayons auront préalablement rencontré un miroir concave qui les aura rendus convergents. Alors ils sont réfléchis convergents aussi par le second miroir qui est placé entre le premier et son foyer. Pour que la formule s'applique à cette circonstance, il faut changer les signes de s et de f : elle devient donc

$$\frac{2}{r}=\frac{1}{s}-\frac{1}{f}$$

Discutons maintenant la formule $\frac{2}{r}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s}$, en attribuant différentes valeurs à s. Nous trouverons d'abord le foyer principal en faisant $s=\infty$: car alors

		$\frac{1}{s}=0$	$\frac{1}{F}=\frac{2}{r}$	ou	$F=\frac{r}{2}$
Si	$s>r$	$\frac{1}{s}<r$	$\frac{1}{f}<\frac{3}{r}$	et	$f<\frac{r}{3}$
	$s=r$	$\frac{1}{s}=\frac{1}{r}$	$\frac{1}{f}=\frac{3}{r}$		$f=\frac{r}{3}$

Ainsi, l'objet s'approchant du miroir, de l'infini à une distance égale au rayon, l'image ne s'en approche que de $(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})\,r$, c'est-à-dire du sixième du rayon

$$s<r \qquad \frac{1}{s}>\frac{1}{r} \qquad \frac{1}{f}>\frac{3}{r} \qquad f<\frac{r}{3}$$

$$s=\frac{r}{2} \qquad \frac{1}{s}=\frac{2}{r} \qquad \frac{1}{f}=\frac{4}{r} \qquad f=\frac{r}{4}$$

Si $s=0$, l'équation mise sous la forme $f=\frac{rs}{2s+r}$ fait voir que f est aussi nul.

Si, comme pour le miroir concave, nous voulons trouver l'ex-

pression du grossissement, nous aurons, en désignant par AB et A'B' l'objet de son image,

$$A'B' : AB :: r-f : r+s \quad \text{et} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{r-f}{r+s}$$

Substituant pour f sa valeur $\frac{rs}{2s-r}$ et effectuant les réductions, on retombe, pour le rapport de A'B' à AB, sur l'expression même qui représente $\frac{f}{s}$, c'est-à-dire que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{f}{s} = \frac{r}{2s+r}$.

Ce rapport ne diffère de celui trouvé pour les miroirs concaves que par le signe de r au dénominateur.

Puisque dans les miroirs, soit concaves, soit convexes, on a toujours

$$A'B' : AB :: f : s,$$

cela prouve que l'objet et son image sous-tendent un même angle dans le premier cas, et deux angles opposés égaux dans le second, qui ont leurs sommets sur la surface du miroir.

La construction des figures avait d'ailleurs fait voir que AB et A'B' sous-tendent aussi deux angles opposés dont le sommet commun est au centre du miroir concave, et un seul angle ayant son sommet au centre du miroir convexe.

Il résulte de ces deux faits en les groupant ensemble :

1° Que, pour les miroirs concaves, l'angle commun aboutit à la surface et que les angles opposés aboutissent au centre;

2° Que, dans les miroirs convexes, au contraire, c'est au centre que se trouve le sommet de l'angle commun, tandis que les côtés des deux angles opposés s'entre-croisent sur la surface.

On pourrait très-bien tirer parti de cette observation pour construire exactement l'image d'un objet mis en présence d'un miroir sphérique.

Revenant à l'expression $A'B' = AB\,\frac{s}{2s+r}$, on remarque que le coefficient de AB est toujours plus petit que l'unité, autant du moins que s est positif; et nous savons qu'il n'en peut être autrement dans le cas général, c'est-à-dire tant que les rayons envoyés par l'objet arrivent divergents sur la surface réfléchissante.

On voit encore au moyen de $\frac{A'B'}{AB} = \frac{r-f}{r+s}$ que $A'B' = AB$, lorsque $s = o$, puisque alors f est aussi égal à zéro. Si s augmente,

l'image diminue ; s devenant infini, elle se réduit à un point. Quand enfin s devient négatif par le fait de la convergence des rayons incidents, l'image, qui d'ailleurs est droite et réelle, a toujours de plus grandes dimensions que l'objet.

$s=r$, $A'B'=\frac{1}{3}AB$: $s=2r$, $A'B'=\frac{1}{5}AB$: $s=3r$, $A'B'=\frac{1}{7}AB$

$s=4r$, $A'B'=\frac{1}{9}AB$: $s=5r$, $A'B'=\frac{1}{11}AB$: $s=6r$, $A'B'=\frac{1}{13}AB$.

300. *Détermination du foyer principal.* On couvre la surface du miroir de papier d'une couleur ou d'un enduit quelconque qui absorbe la lumière, en réservant toutefois en deux points A et B (*fig.* 236) la surface du miroir à nu. On présente le miroir au soleil en dirigeant son axe parallèlement aux rayons de lumière. On place en avant du miroir une feuille de papier ou de carton blanc, DH', évidée au milieu, suivant une circonférence dont le diamètre est plus grand que AB, parce qu'alors le faisceau lumineux, qui passe dans l'évidement, rencontre directement A et B qui réfléchissent leurs images sur la surface DH, dont on fait varier la distance jusqu'à ce que $A'B'=2AB$. Il est évident qu'en cet instant $KL=LF$: ainsi la distance mesurée du corps au miroir donne la distance focale principale ou la moitié du rayon CL.

301. Tableau comparatif *des distances focales des miroirs concaves et convexes correspondant à différentes distances du corps lumineux.*

Miroir concave.		*Miroir convexe.*
$\frac{2}{r}=\frac{1}{f}+\frac{1}{s}$		$\frac{2}{r}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s}$
$f=\frac{r}{2}$ lorsque	$s=\infty$	$f=\frac{r}{2}$
$f=\frac{100}{199}r$	$s=100\,r$	$f=\frac{100}{201}r$
$f=\frac{50}{99}r$	$s=50\,r$	$f=\frac{50}{101}r$
$f=\frac{10}{19}r$	$s=10\,r$	$f=\frac{10}{21}r$
$f=\frac{5}{9}r$	$s=5\,r$	$f=\frac{5}{11}r$
$f=\frac{2}{3}r$	$s=2\,r$	$f=\frac{2}{5}r$
$f<r$	$s>r$	$f>\frac{r}{3}$
$f=r$	$s=r$	$f=\frac{r}{3}$
$f<r$	$s<r$	$f<\frac{r}{3}$

$f = \infty$	$s = \frac{r}{2}$	$f = \frac{r}{4}$
$f = -r$	$s = \frac{r}{3}$	$f = \frac{1}{5}r$
$f = -\frac{1}{2}r$	$s = \frac{1}{4}r$	$f = \frac{1}{6}r$
$f = -\frac{1}{3}r$	$s = \frac{1}{5}r$	$f = \frac{1}{7}r$
$= -\frac{1}{4}r$	$s = \frac{1}{6}r$	$f = \frac{1}{8}r$
$f = -\frac{1}{8}r$	$s = \frac{1}{10}r$	$f = \frac{1}{12}r$
$f = -\frac{1}{98}r$	$s = \frac{1}{100}r$	$f = \frac{1}{102}r$

Si, dans l'une et l'autre formules, on change le signe de s pour exprimer que les rayons incidents arrivent en convergeant sur le miroir, on reconnaît que la première formule rentre dans la seconde et réciproquement. Dans ce cas particulier, on voit donc que f reste toujours positif pour le miroir concave, tandis qu'il peut, suivant les valeurs attribuées à s, rester positif ou devenir négatif pour les miroirs convexes. Les formules ont, dans cette circonstance, changé de destination, et les expressions de distances focales trouvées pour un miroir concave s'appliquent au miroir convexe, de même que celles trouvées pour les miroirs convexes deviennent ce qui convient aux miroirs concaves. Il est à remarquer seulement que ce sont les foyers virtuels affectés, dans le tableau ci-dessus, du signe moins pour les miroirs concaves, qui sont les foyers réels des miroirs convexes.

Il résulte en définitive de ce qui précède qu'on peut considérer la formule

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{f} + \frac{1}{s}$$

comme générale pour les deux sortes de miroirs concaves et convexes, en établissant les conditions suivantes :

$\begin{cases} r > o & \text{miroir concave.} \\ r < o & \text{— convexe.} \end{cases}$

$\begin{cases} s > o & \text{rayons divergents.} \\ s < o & \text{— convergents.} \end{cases}$

$\begin{cases} f > o & \text{image réelle.} \\ f < o & \text{— virtuelle.} \end{cases}$

CHAPITRE III.

RÉFRACTION PRODUITE PAR LES MILIEUX TERMINÉS PAR DES SURFACES COURBES.

302. La réfraction dans les milieux dont les surfaces ne sont pas planes est essentielle à connaître, en raison de son application usuelle dans les instruments d'optique. On peut considérer une surface courbe comme un polyèdre composé d'une infinité de petits plans diversement inclinés entre eux. Lorsqu'un cône lumineux tombe sur l'une de ces surfaces et que le corps est diaphane, chaque rayon subit, à l'égard du petit plan qui le reçoit, une réfraction soumise à la loi énoncée n° 281, mais en raison des inclinaisons respectives des faces du polyèdre réfringent, les rayons réfractés prenant, les uns à l'égard des autres, des positions qui dépendent de la figure du milieu, tantôt convergent, tantôt divergent.

Dans les applications de l'optique, on ne fait usage que de verres sphériques, parce qu'ils sont les seuls que l'on puisse construire avec précision et facilité. On les divise en : 1° biconvexes; 2° plans convexes; 3° ménisques convergents (*fig.* 237); 4° biconcaves; 5° plans concaves; 6° ménisques divergents.

Les trois premiers sont convergents et fournissent généralement des images réelles.

Les trois autres, qui sont divergents, donnent naissance à des images virtuelles.

L'*axe* de ces verres, que l'on désigne aussi sous le nom générique de lentilles, est la droite qui passe par les deux centres, ou, en d'autres termes, la normale commune à ses deux surfaces.

303. *Le centre optique* est un point unique de l'axe qui jouit de cette propriété, que tout rayon qui, par l'effet de la première réfraction, passe par ce point, sort de la lentille en suivant une direction parallèle à celle qu'il avait avant l'immersion. Pour le trouver, traçons deux rayons CA,C'A' (*fig.* 238) parallèles : les éléments des surfaces en A et A' seront parallèles aussi. Parmi toutes les directions que peut prendre un rayon incident SA, il en est une telle que le rayon réfracté suit la ligne qui unit A et A', de sorte qu'à sa sortie et au delà de A' il se dirigera suivant A'S' parallèlement à SA. Le point O de rencontre de AA' et de l'axe de la lentille sera le centre optique.

Pour trouver sa position, qui doit varier en raison de la courbure des surfaces, et être par conséquent fonction des rayons de courbure, remarquons que les triangles CAO, C'A'O', sont semblables et fournissent la proportion

$$CO : C'O :: CA : C'A' \quad \text{ou} \quad CO : C'O :: CB : C'B'$$

de laquelle on tire

$$CB-CO : C'B'-C'O :: CB : C'B' \quad \text{c'est-à-dire} \quad BO : B'O :: CB : C'B'$$

Ce qui peut s'énoncer ainsi : les distances du centre optique aux surfaces sont en raison directe des rayons de courbure de ces surfaces. Le rapport de BO à B'O étant constant et indépendant de l'inclinaison sur l'axe des rayons parallèles CA, C'A', il est évident que toutes les droites qui, telles que AA', unissent deux éléments parallèles des faces opposées, passeront par le point O.

On voit, par la proportion précédente, que si l'un des rayons, C'B', par exemple, devient infini, BO doit être nul. Cela signifie que, dans un verre plan convexe, le centre optique est situé sur la surface courbe.

La lentille ayant peu d'épaisseur, on considère le rayon, qui passe par le centre optique, comme étant tout à fait en ligne droite, en négligeant la double brisure formée à l'immersion et à l'émergence.

304. Pour déterminer le foyer d'une lentille et pour procéder du simple au composé, nous ne considérerons d'abord que la face antérieure, en supposant le milieu réfringent étendu indéfiniment au delà. Soit S un point lumineux situé sur l'axe du verre (*fig.* 239). Le rayon dirigé suivant SC étant normal à la surface ne subira pas de réfraction et sera le lieu géométrique du foyer. Un autre rayon SM arrivé en M, s'infléchira pour se rapprocher de la normale et rencontrera l'axe en F. Tous les points situés à même distance de l'axe que M c'est-à dire placés sur la circonférence dont MP est le rayon, réfracteront exactement en F. Ceux qui seront plus voisins de l'axe, mais concentriques aux premiers, auront un foyer un peu plus éloigné de la surface, et enfin, le foyer sera moins éloigné pour ceux qui s'écarteront davantage de P. Ces divers foyers différeront néanmoins peu les uns des autres, en raison des petites dimensions de MM', et par suite de la très-petite obliquité des génératrices des cônes lumineux par rapport à leur axe commun SF. D'où il suit qu'on suppose F le foyer unique.

Si S s'éloigne ou s'approche, le rayon SM fera un angle plus petit ou plus grand avec la normale, l'angle de réfraction diminuera ou augmentera en même temps, c'est-à-dire que le foyer suivra une marche inverse à celle de S relativement à la surface MM'. On conçoit alors que S à l'infini correspondra à la plus petite distance focale possible ; qu'à un certain rapprochement de S correspondra une direction parallèle à l'axe pour les rayons réfractés, auquel cas le foyer sera situé à l'infini ; que la distance de S à la surface diminuant encore, les rayons réfractés divergeront, et leurs prolongements donneront, par leur rencontre, une image virtuelle qui sera située du même côté que l'objet.

305. Si nous supposons que le milieu réfringent soit biconvexe (*fig.* 241), le rayon SM s'étant infléchi en s'approchant de la direction de la normale C'M, arrivé en N, s'écartera de la seconde normale CN, puisqu'en sortant du verre il rentre dans l'air : il convergera donc plus rapidement vers l'axe que lorsqu'il s'agissait d'une seule surface. Si le verre est plan convexe (*fig.* 242), le rayon se brisera encore en traversant la face plane, moins cependant que dans le cas précédent. Si enfin il s'agit d'un ménisque convergent (*fig.* 243), la convergence, au lieu d'augmenter au sortir du verre, deviendra plus faible, et le rayon lumineux, loin de suivre la direction MNA déterminée par la courbure extérieure, se dirigera suivant NB.

306. Cherchons actuellement la formule qui détermine la position du foyer en fonction de celle du point lumineux et de la quantité que l'on nomme l'indice de réfraction, ou le rapport entre les sinus des angles d'incidence et de réfraction.

Reprenons le point S et le corps transparent terminé par la calotte sphérique dont MM' (*fig.* 239) est une section méridienne : nous cherchons quelle relation relie SO, CO et FO, en raison de l'indice de réfraction. Pour atteindre notre but, nous remarquons que l'incidence CMG étant l'angle extérieur du triangle MSC, nous avons GMC = MCS + MSC. D'autre part et par rapport au triangle MCF, nous avons CMF = MCS — MFC.

Substituant aux angles qui forment les deux termes des seconds membres de ces deux égalités leurs tangentes ou leurs sinus qui en diffèrent très-peu, nous aurons

$$GMC = \frac{MP}{CP} + \frac{MP}{SP}, \quad CMF = \frac{MP}{CP} - \frac{MP}{PF}$$

d'où $$\frac{GMC}{CMF}\left(\frac{MP}{CP}-\frac{MP}{PF}\right)=\frac{MP}{CP}+\frac{MP}{SP}$$

Remarquons que les angles GMC,CMF, étant très-petits aussi, peuvent être remplacés par leurs sinus dont le rapport est ce que nous avons désigné sous le nom d'indice de réfraction : il viendra donc, en le représentant par n, en supprimant le facteur commun MP et en exprimant par s, f et r, les lignes PS, PF et PC, ou ce qui leur est sensiblement égal, OS, OF et OC,

$$n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{f}\right)=\frac{1}{s}+\frac{1}{r} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{n-1}{r}=\frac{1}{s}+\frac{n}{f} \quad (1)$$

ou encore $$f=\frac{nrs}{s(n-1)-r} \quad (2)$$

Pour savoir quelle est, dans ce cas, la position du foyer principal, et en supposant que le milieu réfringent soit du verre, ce qui exige que $n=\frac{3}{2}$, il viendra, en faisant $s=\infty$, $\frac{n-1}{r}=\frac{n}{F}$ ou $F=\frac{nr}{n-1}$ pour expression générale et $F=3r$ pour le verre.

Nous ferons voir tout à l'heure que $s=\infty$ et $F=\frac{nr}{n-1}$ sont des foyers conjugués par réfraction. Si nous voulons savoir à quelle valeur de s correspond $f=\infty$, introduisons cette supposition dans (1) qui deviendra $s=\frac{r}{n-1}$, et s'il s'agit du verre $s=2r$. Ici encore, $s=\frac{r}{n-1}$ et $f=\infty$ sont des foyers conjugués. La formule (1) indique, d'après la *fig.* 239 qui a servi à la trouver, que f est considéré comme positif, quand il est situé du même côté que le centre par rapport à la surface ; que s, au contraire, est positif lorsqu'il est placé du côté opposé. Nous saurons donc ce que signifient les changements de signes, s'il en survient dans ce qui va suivre. Tant que $s>\frac{r}{n-1}$ ou $\frac{1}{s}<\frac{n-1}{r}$, il en résulte $\frac{n}{f}>o$, c'est-à-dire f positif.

Ainsi, le foyer est réel quand $n=\frac{3}{2}$, $s>2r$.

Si $s<\frac{r}{n-1}$, il s'ensuit que $\frac{1}{s}>\frac{n-s}{r}$ et que $f<o$.

Donc, pour un tel rapprochement, les rayons réfractés sont divergents, et le foyer virtuel est situé du même côté que l'objet, mais toujours plus éloigné que lui de la surface. En nous résumant, disons que f augmente successivement jusqu'à l'infini, au-

quel cas $s=2r$, si l'indice de réfraction est $\frac{3}{2}$. Jusque-là aussi, l'image n'a pas cessé d'être réelle. Si ensuite s continne à décroître, f qui est devenu négatif passe par tous les états de grandeur depuis l'infini pour être nul au même instant qne s. Cette dernière relation est de toute évidence dans la formnle (2) résolue par rapport à f.

307. Nous venons de dire que toutes les valenrs correspondantes de f et s liées entre elles par la formule (1) appartenaient à des foyers conjugués. Pour le justifier, il faut voir si la formnle ne change pas, ou si du moins elle revient à sa forme première en introduisant les conditions convenables. Si le point lumineux prend la place qu'occupait d'abord le foyer, l'indice de réfraction doit être modifié : car, dès lors, les rayons sortent du milieu le plus dense pour passer dans celui qui l'est le moins : il devient donc $\frac{1}{n}$ au lieu de n : de plus, pour que les lettres s et f expriment toujours les mêmes quantités, il faut les permuter et changer simultanément leurs signes, ou, ce qui revient au même, changer seulement celui de r. La formule (1) devient alors

$$\frac{1-\frac{1}{n}}{r}=\frac{1}{ns}+\frac{1}{f} \qquad \frac{n-1}{nr}=\frac{1}{ns}+\frac{1}{f}$$

et enfin

$$\frac{n-1}{r}=\frac{n}{f}+\frac{1}{s}$$

Si $s=r$ et $n=\frac{3}{2}$, la formule (2) donne $f=-3r$; nous avions trouvé plus haut qu'à $s=\infty$ correspond $F=3r$: donc, l'objet venant de l'infini et se rapprochant jusqu'à ce que $s=r$, le foyer a parcouru le sextuple du rayon.

$$s=2r,\ f=\infty\ ;\quad s=3r,\ f=9r$$
$$s=4r,\ f=6r;\quad s=5r,\ f=5r.$$

Quand le foyer est virtuel, c'est-à-dire situé dn même côté qne l'objet, il est toujours plus éloigné que lui de la surface.

Pour trouver la longueur de s pour laquelle f est de même valeur, il faut, dans la formule, faire $f=s$, et il vient successivement

$$\frac{n-1}{r}=\frac{n+1}{s},\quad s=\frac{n+1}{n-1}\,r \quad \text{et si } n=\tfrac{3}{2},\ s=5r.$$

On peut, en substituant $5r$ à s dans (2), reconnaître qu'effectivement elle donne $f=5r$.

Si enfin l'on veut savoir à quel moment l'objet et son image se superposent, il faut changer de signe l'une des deux quantités, et de plus exprimer dans (1) que $f=s$. On trouve alors

$$\frac{n-1}{r}=\frac{1}{s}-\frac{n}{s}=\frac{1-n}{s} \quad \text{ou} \quad s=\frac{1-n}{n-1}r.$$

Ici, quelle que soit la valeur que l'on attribue à n, on trouvera toujours $s=-r$, c'est-à-dire que l'objet doit être au centre de la calotte sphérique, ce que l'on pressentait d'ailleurs, à l'inspection de la figure. La formule (2) fait voir aussi qu'à $s=o$ correspond $f=o$.

308. Si la surface MM′ est concave, le foyer et l'objet seront tous deux situés du même côté que le centre. Ainsi, la formule (1) serait appropriée à cette nouvelle circonstance, en changeant le signe de s. Au surplus, on peut la trouver telle directement.

Le rayon SM (*fig.* 244) forme un angle d'incidence désigné par I : l'angle de réfraction est exprimé par R, et le foyer est en F. Le triangle CMS donne $I=C-S$.

Dans le triangle CMF, on a également. . . . $R=C-F$.

Divisant la première égalité par la seconde, et procédant comme dans la recherche de (1), on trouve successivement

$$n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{f}\right)=\frac{1}{r}-\frac{1}{s}, \quad \frac{n-1}{r}=\frac{n}{f}-\frac{1}{s} \qquad (3)$$

qui ne diffère de (1) que par le signe de s. On voit qu'ici, contrairement à ce qui se passe pour la surface convexe, F et S s'approchent ou s'écartent en même temps de MM′.

Si $s=\infty$, $F=\frac{nr}{n-1}$, et quand $n=\frac{3}{2}$, $F=3r$ comme pour le verre convexe. On verrait encore que, comme pour lui, $s=o$ exige que $f=o$. Quand $\frac{1}{s}>\frac{n-1}{r}$, il en résulte $\frac{n}{f}>\frac{2(n-1)}{r}$, $f<\frac{nr}{2(n-1)}$, de même $\frac{1}{s}=\frac{n-1}{r}$, donne $\frac{n}{f}=\frac{2(n-1)}{r}$ et $f=\frac{nr}{2(n-1)}$.

Si nous prenons le cas le plus ordinaire, celui où l'indice de réfraction est $\frac{3}{2}$, les deux dernières circonstances que nous venons de signaler donnent

$$f < \text{ou} = \tfrac{3}{2}r \quad \text{pour} \quad s < \text{ou} = 2r.$$

309. Supposons actuellement, et pour arriver à la connaissance de l'effet produit par une lentille, que le milieu réfringent soit terminé par deux surfaces convexes MO et NO' (*fig.* 245). Nous avons déjà suivi géométriquement, n° 304, ce qui se passe dans ce cas. Le rayon parti de s s'infléchit suivant MN, puis, au sortir de la lentille, il se dirige sur F au lieu de F. Nous venons de trouver précédemment une relation entre f, r, s et n, en ne considérant que la surface antérieure MO. Elle est exprimée par la formule $\frac{n-1}{r}=\frac{1}{s}+\frac{n}{f}$. D'autre part, pour expliquer l'effet produit par la surface NO', nous pouvons nous servir des formules (1) ou (3). Il y aura toutefois, dans l'un ou l'autre cas, certaines modifications à faire, en raison des circonstances qu'offre le problème.

Ainsi, la formule (1) $\frac{n-1}{r}=\frac{n}{f}+\frac{1}{s}$ exprime que le foyer est, par rapport à la surface, du même côté que le centre. La discussion nous a enseigné en outre que f pouvait devenir négatif et toujours alors plus grand que s. Si donc nous appliquons cette formule (1) à la face postérieure NO, il faudra, en admettant que r représente MC, désigner le second rayon NC' par r' : F' sera la position de l'objet et F celle de l'image.

Nous aurons donc $\frac{n-1}{r'}=\frac{1}{f'}-\frac{n}{f}$

qui, combiné avec $\frac{n-1}{r}=\frac{n}{f}+\frac{1}{s}$

représentant les effets de la face antérieure, nous donnera

$$\frac{n-1}{r}+\frac{n-1}{r'}=\frac{1}{f'}+\frac{1}{s} \quad \text{ou enfin} \quad \frac{(n-1)(r+r')}{rr'}=\frac{1}{f'}+\frac{1}{s} \qquad (4)$$

Pour arriver au même résultat, en considérant la seconde face de la lentille comme concave, nous prenons la formule (3) dans laquelle nous changeons :

1° n en $\frac{1}{n}$, puisque le rayon sort du verre pour entrer dans l'air ;

2° r en r' ;

3° Les signes de s et de f, parce que les points de concours des rayons incidents et réfractés ne sont plus du même côté que le centre, comme on l'avait supposé pour trouver la formule (3).

Nous remplaçons encore la lettre s par f, pour conserver la même notation que dans l'équation relative à la face antérieure de la lentille, et enfin, au lieu de f, nous écrivons f', de sorte que la formule (3) ainsi modifiée devient successivement

$$\frac{\frac{1}{n}-1}{r'}=\frac{-1}{nf'}-\frac{1}{f},\quad \frac{1-n}{nr'}=-\frac{1}{nf'}-\frac{1}{f}\quad \text{et}\quad \frac{n-1}{r'}=\frac{1}{f'}-\frac{n}{f}$$

C'est précisément ce que nous venons de trouver tout à l'heure : par conséquent nous retombons nécessairement, en l'ajoutant membre à membre, avec l'équation (1), sur

$$\frac{n-1}{r}+\frac{n-1}{r'}=\frac{1}{s}+\frac{1}{f'}\quad (4)$$

Si nous voulons connaître de suite le foyer des rayons parallèles, faisons $s=\infty$

d'où $\frac{(n-1)(r+r')}{rr'}=\frac{1}{F}$ c'est-à-dire $F=\frac{rr'}{(n-1)(r+r')}$ (5).

Si nous substituons F au premier membre dans (4), la formule affecte la forme suivante

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{s}+\frac{1}{f'}\quad (6)\qquad \text{d'où}\qquad f'=\frac{Fs}{s-F}.$$

Cette dernière donne le moyen de trouver la distance focale pour une valeur quelconque de s connaissant F. Quant à ce dernier nombre, c'est à l'aide de (5) qu'on le détermine.

La formule (4) symétrique par rapport à f et s fait voir que les points correspondants sont des foyers conjugués. Dans (6), on remarque que, si $s=F$, il faut que $f=\infty$.

310. La formule (5) indique que si les deux segments de sphères ont même courbure, ce qui s'exprime par $r=r'$, toujours alors $F=r$, c'est-à-dire que les centres sont eux-mêmes les foyers principaux, quand toutefois l'indice de réfraction $n=\frac{3}{2}$, car alors la formule qui, en vertu de $r=r'$, est devenue

$$F=\frac{r^2}{2(n-1)r}\qquad \text{se réduit à}\quad F=\frac{r^2}{2(\frac{3}{2}-1)r}=\frac{r^2}{r}=r.$$

Pour discuter la marche relative des foyers conjugués, faisons différentes suppositions à l'égard de s dans la formule (6).

Nous savons déjà que $s = \infty$ fournit $f = F$.
Si nous supposons

$$s = 100\,F \quad \text{il vient} \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{100\,F} \quad \text{ou} \quad f = F + \tfrac{1}{99}\,F$$

$$s = 2F \qquad \frac{1}{f} = \frac{1}{2F} \qquad f = 2F$$

$$s = F \qquad \frac{1}{f} = o \qquad f = \infty$$

$$s < F \qquad \frac{1}{s} > \frac{1}{F} \qquad \frac{1}{f} < o \qquad f < o$$

dans ce cas, la formule doit s'écrire

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{s} - \frac{1}{f} \qquad \text{d'où} \qquad f = \frac{F.s}{F - s} \quad (9)$$

Quand $s = o$, la valeur de f mise en évidence dans (6) est aussi égale à zéro. Supposons un instant, pour plus de simplicité, $r = r' = F = 1$, la formule se réduit à $1 = \frac{1}{f} + \frac{1}{s}$, et l'on trouve, en attribuant à s les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, etc., que les correspondantes pour f sont : ∞, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, etc.

Si nous voulons encore appliquer à un autre exemple particulier, supposons que $r = r' = F = 10$.

$s = \infty$	$f = 10$	$s = 18$	$f = 22{,}5$	$s = 12$	$f = 60$
$s = 1000$	$f = 10{,}10$	$s = 17$	$f = 24{,}3$	$s = 11$	$f = 110$
$s = 100$	$f = 11{,}111$	$s = 16$	$f = 26{,}666$	$s = 10{,}5$	$f = 210$
$s = 50$	$f = 12{,}5$	$s = 15$	$f = 30$	$s = 10.25$	$f = 410$
$s = 20$	$f = 20$	$s = 14$	$f = 35$	$s = 10{,}05$	$f = 2010$
$s = 19$	$f = 21{,}11$	$s = 13$	$f = 43{,}33$		

311. Nous pourrions, pour trouver la formule relative aux verres biconcaves, reprendre une démonstration analogue à celle du n° 309, mais nous savons déjà qu'il nous suffit de modifier l'équation (6) en changeant le signe de s : ceci exprimera que les deux foyers conjugués sont du même côté. Elle sera donc

$$\frac{n-1}{r} + \frac{n-1}{r'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s} \quad (7) \qquad \text{ou} \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s} \quad (8)$$

pour $s > F$ ou $\frac{1}{s} < \frac{1}{F}$ on a $f > \frac{F}{2}$; pour $s = F$ il vient $f = \frac{F}{2}$

$$s < F, \qquad \frac{1}{s} > \frac{1}{F} \qquad f < \frac{F}{2} \qquad s = \frac{F}{2} \qquad f = \tfrac{1}{3}\,F.$$

Si nous faisons ici $r = r' = F = 1$, nous trouvons qu'en attribuant successivement à s pour valeurs

$$\infty,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \text{etc.} \ldots\ldots\ o$$

celles de f sont

$$1,\ \tfrac{5}{6},\ \tfrac{4}{5},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{6},\ \text{etc.} \ldots\ldots\ o$$

La formule (8) exprime que le foyer doit toujours rester du même côté tant que les rayons sont divergents ; sinon, f devenant négatif, le second membre présenterait une quantité négative, tandis que le premier membre est essentiellement positif : ce qui implique contradiction.

312. Pour les lentilles, nous pouvons, comme nous l'avons fait à l'égard des miroirs, comparer ce qui se passe dans le cas particulier où les rayons lumineux arrivent convergents à ce que nous venons de trouver lorsque les rayons incidents divergent.

Pour les verres convexes . .	*L'incidence étant divergente*, les foyers sont conjugués et l'image est réelle tant que $s > F$	$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{s}$ (α)
	Les foyers ne sont plus conjugués et l'image devient virtuelle lorsque $s < F$	$\frac{1}{F} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}$ (β)
	L'incidence étant convergente, le foyer toujours réel, et plus rapproché de la lentille que le point de réunion des rayons incidents prolongés, c'est-à-dire que toujours $f < s$ (le signe de s doit changer.)	$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s}$ (γ)

Pour les verres concaves. . .	*Incidence divergente*	foyer toujours virtuel et $s > f$.	$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s}$ (γ)
	Incidence convergente (le signe de f doit changer.)	foyers conjugués, image virtuelle tant que $s > F$.	$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{s}$ (α)
		Lorsque $s < F$, il faut que f change de signe, et que l'image devienne réelle, f est alors toujours plus grand que s. .	$\frac{1}{F} = \frac{1}{s} - \frac{1}{f}$ (β)

On peut résumer ces formules en leur donnant la forme générale

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{s}$$

applicable aux deux espèces de lentilles, en établissant les conditions suivantes :

$\begin{cases} F > o & \text{lentilles convergentes,} \\ F < o & \text{— divergentes,} \end{cases}$ $\begin{cases} S > o & \text{rayons divergents.} \\ S < o & \text{— convergents.} \end{cases}$

$\begin{cases} f > o & \text{image réelle.} \\ f < o & \text{— virtuelle.} \end{cases}$

313. La relation est encore la même lorsque le point lumineux et son foyer sont situés sur un axe secondaire. Soit S la nouvelle position attribuée au point lumineux (*fig.* 246). Pour construire son foyer ou la rencontre des rayons réfractés, construisons l'intersection de deux quelconques d'entre eux et, de préférence, des deux jouissant de propriétés connues qui en faciliteront l'exécution. Le premier est celui qui passe par le centre optique de la lentille ; le second est le rayon SM parallèle à l'axe principal, et qui, par cette raison, passe au foyer principal F. Le foyer de S sera donc en f. Il reste à rétablir la relation qui existe entre Os et Of. Pour cela, négligeant l'inflexion en M du rayon brisé sMLf, parce que ML est très petit, nous pouvons considérer SL comme une droite formant l'un des côtés d'un triangle SLf. Celui-ci étant semblable à OFf, nous écrirons $Sf : Of :: SL : OF$, c'est-à-dire en désignant, comme précédemment, par les lettres s, f et F, les distances du point lumineux, du foyer correspondant et du foyer principal.

$s + f : f :: sL : F$, mais SL est sensiblement égal à SO ou s, donc

$$s + f : f :: s : F \qquad \text{d'où} \qquad f(s - F) = sF \qquad \text{et enfin} \qquad \frac{f}{s} = \frac{F}{s - F}$$

or, cette relation est précisément celle que donne la formule (6) n° 309 : donc ce que nous avons énoncé au commencement de ce paragraphe est exact.

Si maintenant nous abaissons les perpendiculaires Sσ et $f\varphi$, nous formerons encore deux triangles semblables SOσ, fOφ, qui donneront $\frac{fO}{SO} = \frac{\varphi O}{\sigma O}$, ce qui exprime que les points σ et φ sont deux foyers conjugués.

On peut conclure de là que tous les points situés sur une perpendiculaire à l'axe principal d'une lentille ont leurs foyers sur une droite aussi perpendiculaire à cet axe.

314. Si au lieu d'un point on place un objet SS' devant une lentille (*fig.* 246), on voit que l'image est renversée, et qu'en raison des triangles semblables SS'O, ff'O, les dimensions de l'objet et de son image sont entre elles dans le même rapport que les distances focales correspondantes : on aura donc

$$\frac{ff'}{SS'} = \frac{f}{s} = \frac{F}{s - F}.$$

Plus s sera grand, plus ce rapport sera petit : il sera le plus



grand possible ou infini lorsque l'on aura $s = F$. Si s devient plus petit que F, le rapport tiré de (9) est (*fig.* 247) $\frac{ff'}{SS'} = \frac{F}{F - s}$, et ici, contrairement à ce qui précède, l'image diminue en même temps que l'objet s'approche de la lentille.

De cette dernière propriété nous déduirons bientôt le moyen d'amplifier et de voir, plus distinctement qu'à la vue simple, un objet de très-petites dimensions.

Si la lentille est divergente, nous trouvons, en suivant la même marche, pour construire l'image ff' d'un objet SS' (*fig.* 248), qu'elle est toujours virtuelle, droite et plus petite que l'objet quand les rayons sont divergents : le rapport de grandeur est le même que celui des foyers, puisque les triangles semblables Off', OSS' donnent, $\frac{ff'}{SS'} = \frac{O\varphi}{O\sigma}$. Ce rapport est exprimé par $\frac{f}{s} = \frac{F}{F + s}$.

CHAPITRE IV.

DE LA VISION.

315. *Construction de l'œil.* Avant de donner la description des instruments fondés sur la réflexion et la réfraction, il est indispensable de se rendre compte de la sensation produite par la lumière sur l'organe de la vue et, par conséquent, de s'occuper de sa construction. Nous ne parlerons que de l'œil lui-même, considéré dans ses rapports avec la lumière, en renvoyant aux traités d'anatomie et de physiologie ceux qui en désireraient une description complète.

L'œil présente la forme de deux segments de sphères de rayons différents et se raccordant suivant un petit cercle (*fig.* 249). On les nomme cornée transparente et cornée opaque. La première est la partie antérieure de l'œil : c'est le segment sphérique le plus petit, et celui dont la courbure est la plus considérable. La seconde se compose d'une enveloppe extérieure nommée *sclérotique*, d'un second tissu d'une couleur foncée et désigné sous le nom de *choroïde :* son but est de rendre obscur l'intérieur de l'œil, pour éviter la réflexion de la lumière qui pénètre dans cet organe, et, par suite, la confusion qui en résulterait. Une troisième membrane est appliquée intérieurement et vers la partie postérieure : celle-ci est blanche et translucide.

Elle n'est autre chose que le prolongement des nerfs optiques qui, partant de la portion du cerveau nommée *tubercules quadrijumeaux*, et après avoir traversé la sclérotique et la choroïde en un point, s'épanouissent ainsi : on la nomme *rétine*. C'est sur elle que viennent se former les images des objets situés en avant de l'œil. C'est elle, dont la sensibilité est extrême, qui, suivant l'opinion le plus généralement adoptée, reporte au cerveau la sensation que produisent sur elle les rayons lumineux qui l'atteignent. Une sorte de cloison, nommée *iris*, sépare les deux segments sphériques. Elle est percée d'un trou, la *pupille*, qui varie de dimension, suivant la plus ou moins grande quantité de lumière qui doit la traverser pour rendre la vision plus nette. Un peu en arrière une autre cloison membraneuse soutient le cristallin, véritable lentille biconvexe d'une réfrangibilité plus grande que l'*humeur aqueuse* qui remplit toute la partie antérieure de l'œil. La chambre postérieure contient un autre liquide plus dense que le premier, et moins que le cristallin : il est visqueux et désigné sous le nom d'*humeur vitrée*.

316. Rien de plus simple actuellement que de suivre la formation de l'image sur la rétine. On voit d'abord que de tous les rayons lumineux partant d'un point S (*fig.* 249), il n'y a que ceux qui traversent la pupille qui puissent aller rencontrer la rétine : tous ceux qui frappent l'iris sont réfléchis extérieurement. La forme sphérique de la cornée transparente et la densité du liquide qu'elle contient, plus grande que celle de l'air, rendent les rayons lumineux qui s'y introduisent moins divergents : il entre donc dans la pupille plus de lumière que celle contenue dans le cône dont elle serait la base, et qui aurait son sommet en S. Ses rayons diminuent encore de divergence en traversant le cristallin, et en sortent convergents. Il existe une relation admirable entre les formes et les réfrangibilités des parties constituantes de l'œil, telle que, dans l'état normal, c'est précisément sur la rétine que sont les foyers de tous les points du corps que l'on examine.

Pour construire l'image d'un objet AB (*fig.* 249), remarquons qu'en répétant ce que nous avons fait pour une lentille, il faut construire pour chacun des points, ou seulement pour les points extrêmes A et B, les rayons qui passent par le centre optique du cristallin. Leur croisement en ce point nous indique que l'image doit se former renversée.

On s'assure que la sensation de la vue est effectivement produite par une image réelle et renversée au moyen d'une expérience fort simple, qui consiste à placer, dans une ouverture pratiquée à un volet, l'œil d'un bœuf nouvellement tué. On a d'abord mis à nu la rétine vers la partie postérieure de cet œil, en enlevant la sclérotique et la choroïde. Dans cet état de choses, l'observateur placé dans l'intérieur de la chambre, privée d'ailleurs de toute autre lumière, aperçoit sur la rétine l'image renversée des objets extérieurs.

Cette expérience, qui paraît concluante, ne serait pas cependant en contradiction avec une hypothèse plus récemment établie par M. Lehot, et suivant laquelle les images se produiraient à trois dimensions dans l'humeur vitrée elle-même. A celle-ci il attribue la propriété de n'être pas inerte, mais, au contraire, de jouir d'une sensibilité qu'elle communique à la rétine ou épanouissement du nerf optique avec lequel elle est en contact : en effet, cette image étant réelle serait encore aperçue dans l'expérience précitée, par suite de la transparence de la rétine. Nous n'entrerons pas dans de plus longs détails sur cette hypothèse, notre but n'étant ici que d'expliquer les faits, sans prétendre remonter aux causes premières qui seront longtemps encore un mystère pour les savants qui s'occupent, bien plus spécialement que nous, des phénomènes de la nature.

317. *Redressement des objets.* En réfléchissant à ce qui se passe dans l'opération de la vision, on reconnaît aisément l'erreur dans laquelle tombent ceux qui disent que les objets nous apparaissent renversés, et qu'ils sont redressés par une sorte de travail de l'esprit auquel on ne fait pas attention, répété qu'il est à tous les instants de la vie. Ils confondent les objets situés extérieurement avec une sensation intérieure; l'image qui se forme sur notre rétine n'est pas soumise aux effets de la vision : elle en est le résultat. L'impression produite par un point ou par le cône lumineux qui en émane arrivant suivant la direction des génératrices de ce cône, notre pensée conçoit immédiatement que l'objet qui a produit cette impression est situé sur le prolongement des rayons lumineux qui ont éveillé la sensibilité de la rétine. Ce n'est que pour signaler cette erreur, et pour employer une locution consacrée, que nous avons intitulé ce paragraphe : *redressement des objets.*

318. En nous reportant à ce que nous avons dit des lentilles,

n° 312, il semblerait résulter que, pour une seule distance de l'objet à l'œil, la vision soit bien distincte : situé plus près, l'objet produira une image qui se formerait au delà de la rétine, si celle-ci n'interceptait pas les rayons réfractés, en coupant chacun des cônes suivant un petit cercle. Placé, au contraire, à une distance plus grande, le point lumineux a son foyer en deçà de la rétine qui coupe encore les cônes, c'est-à-dire leurs secondes nappes suivant de petits cercles. Il résulte de là que, dans l'un et l'autre cas, la vue doit se troubler : car, tous les points d'un corps produisant de semblables figures, il y aura confusion par suite de leur superposition. C'est en effet ce qui arrive quand les objets sont situés beaucoup trop loin ou beaucoup trop près ; mais il est des limites assez étendues, entre lesquelles la vision conserve sensiblement la même netteté. Cela tient à ce que, dans de certaines circonstances, le déplacement du foyer est très-petit eu égard à celui de l'objet. N'avons-nous pas vu effectivement, n° 310, qu'entre les deux positions d'un objet à l'infini et à une distance centuple de la distance focale principale, il n'y avait qu'un 99e de déplacement pour le foyer? Ceci ne s'applique pas exactement à ce qui se passe par rapport à l'œil : car il faudrait faire entrer dans la combinaison des formules les différents indices de réfraction, les rayons de courbure, etc. ; mais cela suffit pour justifier ce que nous avons dit, qu'entre de certaines limites il est un espace nommé le *champ de la vision*, dans lequel les corps sont vus distinctement. Remarquons encore qu'après avoir considéré un objet rapproché, l'œil ne se trouve pas immédiatement apte à en apercevoir un second plus éloigné, et réciproquement; il n'y a possibilité de vision qu'après quelques instants écoulés. Nous conclurons évidemment de ce fait qu'entre certaines limites l'œil a la faculté de se contracter pour amener la rétine au point de formation de l'image réelle. C'est surtout à cette cause qu'on doit attribuer l'étendue du champ de la vision distincte.

319. *Estimation de la distance.* L'angle que forment les axes des yeux dirigés sur un même point augmente ou diminue suivant que le point est plus ou moins rapproché. Cette relation entraîne une estimation instinctive de la distance. Quand un corps est extrêmement près de la personne qui l'examine, celle-ci est forcée de faire trop incliner l'un vers l'autre les axes des yeux, et il en résulte une déviation fatigante qui constitue un strabisme accidentel. L'angle optique devenant sensiblement nul, toutes les

fois que l'objet que l'on regarde n'est pas placé très-près, il s'ensuit que l'on commet presque toujours des erreurs grossières en estimant une distance, si, du reste, on n'est pas guidé par une connaissance préalable des dimensions de l'objet que l'on contemple. La dégradation de lumière due à l'interposition de l'air aide aussi à apprécier l'éloignement des corps.

320. *Estimation de la grandeur.* On désigne sous le nom d'*angle visuel* celui que sons-tend un objet quelconque et dont le sommet est dans l'œil. Cet angle fait estimer la grandeur des corps. Il est évident que, relativement à des objets également éloignés de l'observateur, il les juge doubles, triples, etc., l'nn de l'autre, suivant que les angles visuels correspondants sont dans ce rapport.

On peut dire que l'angle visuel sert aussi à estimer les distances, quand il embrasse un objet de dimensions connues à l'avance. Ainsi l'on juge de l'éloignement d'un homme, d'un cheval, etc., par la comparaison de l'angle sous lequel on le voit, avec celui sous lequel on l'a vu en mainte autre circonstance.

321. *Défauts de la vue.* La distance de la vision distincte varie évidemment d'un individu à un autre, en raison de la conformation des yeux. Les presbytes, chez lesquels le cristallin est trop peu convexe, sont obligés d'éloigner de leurs yeux l'objet qu'ils veulent voir distinctement, sans quoi l'image tendrait à se former au delà de la rétine. Les yeux des myopes, au contraire, font converger trop rapidement les rayons réfractés, de sorte que, pour bien voir un corps, ils doivent l'approcher beaucoup de leurs yeux.

322. Pour obvier à ces denx inconvénients, on emploie des lentilles convexes dans le premier cas, et concaves dans le second, et alors les presbytes et les myopes voient distinctement à la distance ordinaire de la vision distincte.

L'âge, en diminuant la convexité du cristallin, ou la densité des humeurs, et peut-être l'une et l'autre à la fois, augmente la presbytie, tandis qu'il atténue la myopie. Chez les personnes affectées de la première de ces infirmités et chez tous les hommes sans doute, une autre cause affaiblit encore très-sensiblement la vue. La rétine devient moins sensible; il faut une lumière plus intense, pour qu'elle ressente et reporte au cerveau l'impression des objets.

Les gens âgés remarquent en effet qu'ils distinguent moins bien que plus jeunes les corps qui se présentent à eux, et qu'obligés de se servir de lunettes pour lire sous l'influence d'une lumière moyenne, ils lisent encore sans avoir besoin d'en faire usage lorsque la clarté est très-vive, comme en plein soleil ou auprès d'une forte lampe.

Nous terminerons ce qui est relatif à la vue en disant que les presbytes voient mieux que d'autres les objets très-éloignés, par la raison que le foyer se rapprochant, dans ce cas, du cristallin, tend aussi à se former sur la rétine, tandis qu'il est en deçà chez les autres hommes. Quant aux myopes, il est évident que, plus ils sont éloignés d'un corps, moins ils le voient.

CHAPITRE V.

INSTRUMENTS EMPLOYÉS POUR MIEUX DISTINGUER LES OBJETS TRÈS-PETITS OU TRÈS-ÉLOIGNÉS.

323. Les effets produits par la réflexion ou la réfraction nous étant connus, nous allons nous occuper de l'application de ces phénomènes aux instruments d'optique.

Les uns, désignés sous le nom de dioptriques, sont fondés sur la réfraction et composés de lentilles : tels sont le microscope simple ou composé et les différentes espèces de lunettes. Dans d'autres, les catadioptriques, on combine l'effet des miroirs et des lentilles : de ce nombre sont les télescopes, le microscope solaire et un microscope composé modifié, les chambres noires et la chambre claire.

Les instruments catoptriques, enfin, forment la troisième classe, qui comprend toutes les espèces de miroirs. Nous n'aurons pas à revenir sur ces derniers (*Voir* du nº 289 au nº 291).

Si l'on se reporte à la marche suivie pour la recherche des foyers des miroirs et des lentilles, on reconnaîtra que l'hypothèse qui a fait confondre les angles d'inclinaison des rayons sur les normales avec leur sinus exige que ces rayons soient peu écartés de ces normales, ou autrement que les surfaces employées soient très-petites par rapport aux rayons de ces surfaces. Et même encore dans ce cas, cette hypothèse n'étant pas complétement réalisée, les rayons déviés ne vont pas rigoureusement passer par un même point et ne produisent par conséquent pas une

image unique. Ce défaut, commun aux instruments fondés sur la réflexion et à ceux fondés sur la réfraction, a reçu le nom *d'aberration de sphéricité.*

Les instruments dioptriques ont en outre l'inconvénient d'être soumis à l'influence de *l'aberration de réfrangibilité.*

Les instruments catoptriques, qui en sont exempts, ont pendant longtemps, pour cette cause et par suite de la facilité plus grande de leur exécution, été préférés à ceux qui sont fondés sur la réfraction; mais depuis les perfectionnements apportés à la construction des lentilles, et surtout depuis qu'on sait corriger l'aberration de réfrangibilité, en rendant les verres achromatiques (ch. VII), cette préférence a beaucoup diminué et tend à décroître sans cesse.

324. *Microscope simple* ou *loupe.* Une lentille biconvexe est un microscope simple : c'est la loupe usitée pour voir distinctement un petit objet en lui substituant l'illusion d'un autre de plus grandes dimensions situé à une distance convenable de l'œil. En effet, si on le plaçait à la distance de la vision distincte, il serait vu sous un angle trop aigu, produirait une trop petite image sur la rétine, et conséquemment une trop faible impression. En l'approchant beaucoup, l'angle sous lequel on l'apercevra sera plus grand, mais le cône lumineux partant de chacun des points du corps sera tellement obtus, que les rayons réfractés par le fait du cristallin et des autres circonstances de l'œil n'iront former un foyer qu'au delà de la rétine : si même on pouvait le placer en deçà du foyer du cristallin, alors les rayons entreraient divergents dans l'humeur vitrée. Pour obvier à ces inconvénients, on interpose une lentille biconvexe MN (*fig.* 250) entre l'œil de l'observateur et le corps AB soumis à son investigation, de manière que celui-ci soit entre la lentille et son foyer principal C'. Nous savons que les rayons, dans cette circonstance, sortent divergents, et qu'ainsi l'œil, qui, placé convenablement, en reçoit une partie, éprouve la sensation d'une image A'B' virtuelle, droite et agrandie. Elle est en effet amplifiée : car, pour voir AB distinctement, il aurait fallu le poser à la distance de l'œil à laquelle se trouve A'B'. L'angle visuel, dans ce cas, eût été à AOB ou A'OB' dans le rapport de DO à D'O : tel est donc le rapport du grossissement. Pour construire cette image, nous avons pris, entre tous les rayons émanant d'un point, ceux dont les propriétés nous sont connues : c'est premièrement celui qui, passant par

le centre optique, ne dévie pas de sa direction première; puis celui qui, parallèle à l'axe de la lentille avant l'immersion, passe par le foyer principal après l'émergence.

Nous avons dit que le grossissement, ou le rapport de l'angle suivant lequel on voit l'objet à l'angle suivant lequel on l'aurait vu placé à la distance de la vue distincte, est égal à $\frac{D'O}{DO}$, en confondant ces angles avec les tangentes. Ceci suppose qu'on puisse regarder le centre optique de l'œil comme placé au centre optique de la lentille. Lorsque les loupes remplissent la fonction d'oculaire des lunettes, il en est à peu près ainsi. Plus généralement l'œil est placé en arrière. Soit C son centre optique; le grossissement est alors $\frac{A'B'}{AB}$, ces deux dimensions A'B' et AB étant celles qui sont placées à la distance de la vue distincte, dans l'un et l'autre cas. Désignons cette distance par δ, la distance focale par F, et CO par m. La formule des lentilles biconvexes est, pour le cas actuel,

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f}-\frac{1}{\delta-m}$$

le grossissement $\frac{A'B'}{AB}=\frac{f}{f}=\frac{\delta-m}{f}=1+\frac{\delta-m}{F}$

Il peut donc aller de 1 à ∞, suivant que F est ∞ ou nul.

Il augmente quand m diminue, pour atteindre la limite $1+\frac{\delta}{F}$ lorsque $m=o$, ce qui répond au cas que nous avons d'abord examiné.

Le grossissement des loupes peut être considéré sous un second point de vue. On peut se demander ce que produit une lentille convergente lorsqu'on l'interpose entre l'œil et un objet situé à une distance assez grande pour donner une sensation nette, considérée isolément. C'est la circonstance qui se présente, pour les presbytes, dans l'usage des besicles. La *fig.* 250 peut donner une idée de ce qui se passe alors, en supposant que l'œil placé en C ait la possibilité de voir successivement AB directement, ou son image A'B'. Dans le second cas, l'objet apparaîtra sous l'angle A'CB' > ACB, sous lequel on le verra dans le premier. Sans rechercher l'expression analytique de ce grossissement, nous en conclurons seulement que les presbytes voient les objets un peu agrandis.

La loupe peut, jusqu'à un certain point, être remplacée par un

procédé d'un emploi très-facile. Il suffit de percer un papier d'un petit trou à travers lequel on pourra regarder un objet très-rapproché. Pour comprendre ce qui se passe alors, rappelons-nous ce que nous avons dit relativement à la vision. Un point trop rapproché de l'œil formerait son image en arrière de la rétine, si celle-ci n'interceptait pas le petit cône lumineux, en formant une section circulaire qui remplace alors le point considéré. Tous les points de l'objet étant dans le même cas, chacun d'eux se trouve remplacé par un petit cercle, et la sensation est confuse. Mais si, entre l'œil et le corps lumineux, on interpose la petite ouverture, chaque faisceau incident, qui avait précédemment pour sommet un point quelconque de l'objet et pour base l'ouverture de la pupille, se trouve beaucoup aminci : par suite, la section formée sur la rétine par le cône réfracté se trouve beaucoup diminuée et sera proche d'être un point, circonstance qui permet la vision distincte. On tendra d'autant plus vers cette limite favorable que le petit trou percé dans l'écran aura un faible diamètre.

Contrairement à ce qui se passe pour la loupe, qui permet de voir un petit objet sous un grand angle, sans gagner, mais sans perdre de lumière, notablement du moins (comme on le reconnaîtrait par des raisonnements analogues à ceux que nous exposerons pour la lunette astronomique), l'emploi d'une petite ouverture rend les corps considérés d'autant moins lumineux que leurs images deviennent plus nettes, puisque c'est précisément sur la perte d'une portion de la lumière qu'ils envoient qu'est fondée cette netteté.

325. *Lunette astronomique.* De tous les instruments destinés à donner une plus grande extension à l'organe de la vue, le plus simple est la lunette astronomique. Elle se compose de deux lentilles enchâssées aux deux extrémités d'un tube variable de longueur, au moyen de tirages intermédiaires. L'un des verres que l'on nomme objectif (c'est-à-dire placé le plus près de l'objet), par opposition à celui qui, situé près de l'œil, est nommé oculaire, a pour but de former une image à son foyer principal, ou du moins en un point qui en est extrêmement rapproché. La grande distance à laquelle se trouve l'objet permet de considérer comme sensiblement parallèles les rayons qui partent d'un même point : c'est pour cela qu'on est autorisé à dire que l'image se forme au foyer principal. Cette image est réelle, renversée et beaucoup

plus petite que le corps lui-même ; et néanmoins, si on la regardait à l'œil nu, elle pourrait paraître plus grande que l'objet, puisqu'étant beaucoup plus rapprochée que lui, elle sous-tendrait un angle visuel plus grand, si la distance focale principale était plus grande que la distance de la vue distincte. Nonobstant cela, et pour l'amplifier plus encore, l'oculaire est placé de manière à faire l'office de loupe, c'est-à-dire que son foyer principal est situé un peu au delà de l'image réelle. A celle-ci se trouve donc, en définitive, substituée une image virtuelle, agrandie et renversée par rapport au corps que l'on contemple. Ce renversement n'a pas d'inconvénient quand on observe les astres, et n'en offre guère plus lorsque la lunette sert aux opérations géodésiques ou topographiques.

La *fig.* 251 reproduit ce que nous venons de décrire. AB est l'objet, M l'objectif, N l'oculaire, A'B' l'image réelle et renversée au foyer F de l'objectif, F' le foyer de l'oculaire, et A''B'' l'image virtuelle produite par la lentille N. Veut-on apprécier maintenant le grossissement, on remarque que l'objet vu à l'œil nu sous-tendrait sensiblement l'angle AOB formé par les rayons venant des extrémités A et B ou son égal comme opposé par le sommet A'OB'. L'œil étant placé près de la loupe, aperçoit l'image virtuelle sous l'angle A''O'B'' ou A'O'B'.

La comparaison des angles O et O' nous fournira donc l'expression du grossissement : or on a

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}O = \frac{B'F}{OF}, \quad \text{tang.}\tfrac{1}{2}O' = \frac{B'F}{O'F}$$

ou, parce que F et F' sont très-voisins,

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}O = \frac{B'F}{F}, \quad \text{tang.}\tfrac{1}{2}O' = \frac{B'F}{F'}$$

de là $\text{tang.}\tfrac{1}{2}O' = \text{tang.}\tfrac{1}{2}O\,\frac{F}{F'}$ ou $\tfrac{1}{2}O' = \tfrac{1}{2}O\,\frac{F}{F'}$, et enfin $O' = O\,\frac{F}{F'}$.

Le grossissement sera donc d'autant plus fort que F sera plus grand et F' plus petit.

Il semble alors possible d'augmenter indéfiniment ce grossissement. Cela serait vrai, s'il n'y avait pas lieu de s'occuper d'une autre considération.

Clarté de l'image. Cherchons quelles sont les clartés relatives des objets vus à l'œil nu et avec la lunette.

La pupille placée derrière l'oculaire occupe l'étendue *p* (*fig.* 55

bis, planche XXIII), qui embrassera un faisceau lumineux répondant sur l'objectif à une amplitude ω. Tous les rayons du faisceau incident $s\omega$ sont efficaces pour l'œil armé de la lunette, tandis que sans le secours de celle-ci le faisceau se serait appuyé sur la base p au lieu de la base ω. Les quantités de rayons reçus dans les deux cas sont donc dans le rapport

$$\frac{\text{Lunette}}{\text{Œil nu}} = \frac{\omega^2}{p^2}$$

mais g désignant le grossissement linéaire trouvé précédemment, les clartés de chaque unité de surface des images perçues, en raison inverse de ces surfaces, sont

$$\frac{\text{Clarté, lunette}}{\text{Clarté, œil nu}} = \frac{\omega^2}{p^2}\frac{1}{g^2}$$

La figure indique immédiatement que $\omega = p\,\frac{F}{F'} = pg$.

Le rapport des clartés est donc égal à l'unité, et l'objet considéré apparaît avec le même éclat dans toutes les circonstances, ou du moins il ne peut pas être plus éclairé par le secours de la lunette, car nous verrons plus loin qu'il faut satisfaire à certaines conditions pour qu'il le soit autant.

Avant de pousser plus loin cette discussion, il est important de faire une réserve relative aux objets situés à une distance presque infinie, comme les étoiles. Alors le grossissement n'a plus lieu; chacun sait qu'avec les instruments les plus puissants les étoiles paraissent toujours des points. La première partie du raisonnement continue seule de subsister, et le rapport des clartés est

$$\frac{\omega^2}{p^2} = \frac{F^2}{F'^2} = g^2.$$

Ce fait est analogue à celui que nous avons mentionné précédemment sur les clartés d'objets considérés à des distances différentes, clartés constantes pour les objets situés à des distances finies, et inverses aux carrés des distances, pour les étoiles.

Le rapport relatif aux étoiles (les autres astres ne sont pas dans le même cas) explique pourquoi on peut apercevoir avec une lunette des étoiles invisibles à l'œil nu. Si, de plus, on observe que la visibilité des images est grandement influencée par les milieux qui entourent ces images, on remarquera que l'usage d'une lunette avec laquelle on considère une étoile augmente la

clarté de celle-ci, en laissant constante celle de l'atmosphère dont toutes les parties situées à des distances finies sont soumises au grossissement. On comprend ainsi comment il est possible d'apercevoir avec une lunette des étoiles en plein jour.

Revenons au cas ordinaire, celui des objets terrestres, ou même des astres autres que les étoiles. Nous avons dit que les objets considérés avec le secours d'une lunette n'étaient jamais plus éclairés. Nous l'avons prouvé pour la lunette astronomique; il en est de même *pour tout appareil optique.*

Si l'on ne peut pas augmenter la clarté des images, il est à craindre au contraire qu'on la diminue. Les verres employés, quelque grande qu'en soit la transparence, éteignent toujours un peu la lumière; ils en réfléchissent également un peu. On attribue généralement à chaque lentille une perte de lumière égale au $\frac{1}{10}$ de celle qu'elle reçoit, perte beaucoup plus faible que celle due à la réflexion sur un miroir, dans les mêmes circonstances d'incidence presque normale. (Dans ce cas, un miroir métallique perd en effet les $\frac{4}{10}$ de la lumière reçue.)

Cette remarque conduit à cette conséquence, qu'une lunette diminue la clarté, et cela d'autant plus qu'on y emploie un plus grand nombre de verres.

Abstraction faite de cette cause de diminution, que nous négligerons à l'avenir, il faut encore satisfaire à une condition essentielle relative au grossissement. Si, en effet, on se reporte aux raisonnements qui précèdent, on voit que pour l'exactitude des conséquences que nous en avons tirées, il faut que l'ouverture efficace de l'objectif $\omega = p.g$ soit plus petite que son ouverture réelle, ou tout au moins égale à celle-ci. Mais l'ouverture réelle de l'objectif doit être petite par rapport aux rayons des surfaces qui le terminent, ou par rapport à F; supposons cette ouverture $= n\text{F}$, n étant un coefficient assez petit, on devra avoir

$$\omega < n\text{F},\quad p.g < n\text{F},\quad p.\frac{\text{F}}{\text{F}'} < n\text{F},\quad \text{F}' > \frac{p}{n}$$

Le coefficient n dépend de l'exécution mécanique du verre et surtout de sa composition physique et chimique; il varie de $\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{14}$, généralement du moins. Pour fixer les idées, supposons-le de $\frac{1}{10}$; la pupille a environ $0^{m},003$ de diamètre : il faut donc que

$$\text{F}' > \frac{p}{n} \quad \text{ou} \quad > 0^{m},03.$$

Quoi qu'il en soit de cette valeur numérique approchée de la

limite de l'oculaire, limite au delà de laquelle la clarté serait plus faible avec la lunette que sans son aide, il n'en est pas moins vrai qu'elle existe et que, par suite, le grossissement dont l'expression est $\frac{F}{F'}$ ne peut pas augmenter indéfiniment par une diminution indéfinie de F', sans du moins perdre de la clarté.

Limite du grossissement. L'augmentation du numérateur F du grossissement $\frac{F}{F'}$ fait croître celui-ci proportionnellement, mais en produisant un autre inconvénient, l'allongement de la lunette dont la dimension doit être assez restreinte pour qu'il soit facile de la manier. Il est clair, en effet, que la longueur de la lunette égale à $F + F'$ peut sensiblement être prise égale à F. Cherchons quel est le grossissement possible pour une longueur de lunette donnée. Nous avons vu que pour obtenir le maximum de clarté de l'image, il fallait que l'on eût

$$F' > \frac{p}{n}, \quad \text{mais} \quad F' = \frac{F}{g},$$

il faut donc que

$$F > \frac{g \cdot p}{n} \quad \text{ou} \quad g < \frac{nF}{p},$$

Si, pour avoir un exemple, on suppose $n = \frac{1}{10}$, $p = 0^m,003$, $F = 0,^m2$, la limite du grossissement sera

$$g = \frac{0,2}{0,03} = \frac{20}{3}$$

environ 7. Mais, encore une fois, observons que ces nombres n'ont rien d'absolu ; ils dépendent surtout de la valeur du coefficient n, c'est-à-dire de la qualité de l'objectif ; ils dépendent aussi de cette circonstance qu'il peut être utile, dans certains cas, de perdre de la clarté en gagnant du grossissement, ce à quoi on se résout quelquefois, guidé comme on l'est par les considérations qui vont suivre.

Enveloppe de la lunette et diaphragmes. — Il peut sembler étrange que la clarté des objets ne soit pas augmentée par l'intermédiaire des deux verres composant une lunette astronomique, quand chacun a pu remarquer, par l'usage, une plus grande netteté dans les contours. Cette circonstance tient à deux causes différentes : 1° l'image de l'objet considéré se trouve placée à la distance de la vue distincte, distance pour laquelle la netteté est la plus grande ; 2° ainsi que nous l'avons dit en décrivant l'in-

strument, l'objectif et l'oculaire sont renfermés dans un tube noirci à l'intérieur. L'œil n'aperçoit alors qu'une petite étendue de l'espace, et aucun rayon étranger ne vient distraire la rétine, comme cela a toujours lieu quand on regarde sans le secours d'une lunette. On peut s'assurer facilement de l'influence très-grande sur la visibilité des causes étrangères qui contrarient dans l'œil l'effet d'un objet, en considérant celui-ci successivement à l'œil nu et avec un tube vide noirci à l'intérieur.

Dans l'intérieur de ce tube on place habituellement des diaphragmes; ce sont des cercles dont le milieu est vide; ils ont pour but d'éteindre les rayons extrêmes des cônes lumineux, qui sont ceux qui influent le plus sur l'aberration de sphéricité.

Oculaires. Nous avons supposé, pour la simplicité de l'explication, que l'oculaire était composé d'une seule loupe. Souvent il n'en est pas ainsi.

Lorsque, par exemple, il s'agit d'observer des points près du zénith, il est très-incommode de regarder de bas en haut. On remplace alors la loupe par un prisme lenticulaire semblable à celui qui a été décrit au § 291. D'autres fois on emploie des oculaires positifs ou négatifs, dans un but qui sera expliqué au chapitre qui traite de l'aberration de réfrangibilité, en même temps qu'on y donnera la description de ces oculaires.

326. *Longue-vue, lunette terrestre ou lunette à quatre verres.* Comme, dans beaucoup de circonstances, le renversement des objets devient un grave inconvénient, on a modifié l'appareil précédent ainsi qu'il suit. L'objectif M (*fig.* 252) forme, comme ci-dessus, une petite image réelle et renversée A'B'; une seconde lentille P est placée de telle sorte que son foyer principal se trouve aussi en F où est A'B', et les rayons qui se croisent à tous les points de A'B', n'y rencontrant pas d'obstacles, vont au delà sans changer de direction, jusqu'à ce qu'ils atteignent la surface antérieure de P. Tous les rayons qui se sont croisés en un point de A'B' sortent parallèles entre eux de la seconde lentille, et par conséquent leur direction est déterminée, puisque l'un d'eux passe par le centre optique. De là résulte qu'il n'y a pas de seconde image formée, mais une troisième lentille Q les reçoit, les concentre de l'autre côté sur la perpendiculaire à l'axe passant par son foyer principal et forme ainsi une image réelle, renversée par rapport à la première, c'est-à-dire droite par rapport à l'objet lui-même. Vient ensuite l'oculaire N qui, ici comme précédem-

ment, joue le rôle d'une loupe, en substituant l'image virtuelle A‴B‴ à l'image réelle A″B″.

De ce qui précède il résulte que, si l'objet que l'on observe était toujours placé à une distance infinie, les deux lentilles M et P seraient toujours aussi éloignées d'une quantité égale à la somme de leurs distances focales principales. Ceci peut être regardé comme le minimum de leur écartement : car, si le corps est sensiblement plus rapproché, le foyer sera un peu plus loin de M : la distance de M à P est donc variable. Il n'en est pas de même de celle de P à Q. Quelle qu'elle soit, une portion des rayons qui sont parallèles avant d'atteindre la lentille se réunissent au delà sur celui d'entre eux qui passe par son centre optique et à la distance de son foyer principal. Il y aurait un double inconvénient à ce que P et Q fussent trop éloignés l'un de l'autre : le moindre serait d'exiger que la lunette fût plus longue : le second est que, dans ce cas, une plus grande partie des rayons, après avoir dépassé P, rencontreraient la paroi intérieure du tube, et qu'ainsi il y aurait d'autant plus de déperdition de lumière. Si même on n'avait pas le soin de noircir l'intérieur du tube, ces rayons perdus pour la formation de l'image suivante produiraient encore un autre mal, en se réfléchissant sous toutes sortes de directions : car ils donneraient naissance à une lumière confuse qui paralyserait celle qui doit produire une image A″B″. Enfin, de Q à N la distance est un peu variable à cause des différentes vues auxquelles peut servir l'instrument. En tous cas, elle diffère extrêmement peu de la somme des distances focales de N et Q.

Pour se rendre compte du grossissement, il suffit encore ici, comme pour la lunette astronomique, de trouver l'expression du rapport qui existe entre les angles O et O″ : en effet, on conçoit, à l'inspection de la figure, que l'objet AB serait vu à l'œil nu sous l'angle AOB ou son égal A′OB′, tandis que la lunette le présente sous l'angle A″O″B″ ou A‴O‴B‴.

La comparaison des triangles B′Of, B′O′f, nous fournit la proportion

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}O' : \text{tang.}\tfrac{1}{2}O :: Of : O'f$$

ou, en raison de la petitesse des angles,

$$\tfrac{1}{2}O' : \tfrac{1}{2}O :: Of : O'f$$

et en désignant par F, F′, F″ : F‴ les dispenses focales des lentilles,

$$O' : O :: F : F'$$

De même, au moyen des triangles A″O″f et A″O‴f,

$$O''' : O'' :: F'' : F'''$$

Si l'on multiplie ces deux proportions terme à terme, en remarquant que les angles O' et O'' sont égaux, il vient

$$O''' : O :: F \times F'' : F' \times F''' \qquad \text{d'où} \quad O''' = O \frac{F \times F''}{F' \times F'''}$$

Ainsi le grossissement sera d'autant plus considérable que les premier et troisième verres seront moins courbes, et les deuxième et quatrième plus convexes.

Si enfin on suppose que les deuxième et troisième aient même distance focalo, auquel cas $F' = F''$, la formule se réduit à celle de la lunette astronomique

$$O''' = O \frac{F}{F'''}$$

et le grossissement est en raison directe de la distance focale de l'objectif et en raison inverse de celle de l'oculaire.

327. *Lunette de Galilée.* Pour obvier aux inconvénients des deux lunettes que nous venons de décrire, savoir : le renversement des objets vus à l'aide de la lunette astronomique et la trop grande longueur qu'exige la lunette terrestre, on emploie la lunette de Galilée, qui combine l'emploi de deux verres, l'un biconvexe, l'autro biconcave, le premier jouant toujours le rôle d'objectif, l'autre servant d'oculaire. Nous indiquons (*fig.* 253) les faisceaux de rayons sensiblement parallèles qui émanent des points extrêmes de l'objet que l'on contemple : ils se réfractent pour aller former une image réelle en ab, si toutefois leurs directions n'étaient pas modifiées par l'interposition du verre biconcave : celui-ci, de convergents qu'ils étaient, les rend divergents, de telle sorte que ce sont leurs prolongements qui vont se réunir en deçà de l'oculaire, et par ce moyen, l'image $a'b'$ est redressée pour l'œil rencontré par une partie d'entre eux. Il ne suffit pas que l'oculaire coupe les rayons réfractés avant leur réunion : il y a encore certaines conditions à satisfaire pour que l'instrument soit le plus favorablement disposé. Pour s'en rendre compte, il faut reprendre la formule relative aux verres concaves, en y introduisant la modification énoncée au § 312, pour le cas où les rayons arrivent convergents.

La formule est dans cette circonstance $\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{s}$.

Ici, représentons par F la distance focale de l'objectif,

F' celle de l'oculaire,

D la distance entre les deux verres,

et conservons f pour exprimer la distance de l'image $a'b'$ par rapport à l'oculaire ; il faudra, pour employer ces notations, écrire la formule ci-dessus ainsi qu'il suit :

$$\frac{1}{F'}=\frac{1}{f}+\frac{1}{F-D} \qquad \text{d'où} \quad \frac{1}{F-D}=\frac{f-F'}{fF'}$$

ou encore
$$F-D=\frac{fF'}{f-F'}=\frac{F'}{1-\frac{F'}{f}} \ (\alpha)$$

Ce qui indique d'abord une chose conforme à la 5e note que renferme le tableau du § 312, c'est que $F-D > F'$ ou $D < F-F'$, c'est-à-dire que le foyer principal de l'oculaire doit être situé entre lui et la position de l'image réelle, ou, en d'autres termes, que la lunette ne doit pas être tirée jusqu'au point où l'intervalle qui sépare les deux verres égale la différence de leurs distances focales.

Pour trouver l'expression du grossissement, il nous suffit de chercher le rapport entre les angles aOb et $aO'b$ (*fig.* 254) : or, les triangles aOp, $aO'p$ donnent :

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,O=\frac{bp}{F}, \quad \text{tang.}\tfrac{1}{2}\,O'=\frac{bp}{F-D}$$

d'où
$$\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}O'}{\text{tang}\ \frac{1}{2}O}=\frac{F}{F-D} \qquad \text{et enfin} \quad O'=O\,\frac{F}{F-D}$$

Cette expression indique que le grossissement augmente avec l'écartement des deux verres.

Pour détruire tout doute à cet égard, s'il en pouvait toutefois rester encore, il suffirait de faire remarquer que, pour F constant, les accroissements de D, en rapprochant l'oculaire de la place où se fût formée l'image réelle ab, augmentent l'amplitude de $ao'b$ ou $ao''b'$ sous lequel l'œil aperçoit l'image virtuelle $a'b'$.

C'est cet instrument que l'on désigne sous le nom de lorgnette ou lunette de spectacle. Il a l'inconvénient de ne pas produire une image virtuelle aussi lumineuse que la lunette astronomique, parce qu'une partie seulement des rayons qui allaient former l'image réelle peut être embrassée par l'œil. Pour y remédier le plus possible, il faut approcher l'œil de l'oculaire autant qu'on le peut. On augmente aussi par là le champ de la lunette, qui d'ailleurs est très-restreint.

328. Nous allons chercher, par un moyen pratique, le grossisse-

ment des lunettes que nous avons vu être exprimé par $\frac{F}{F'}$, même en quelque sorte pour celle de Galilée, parce que l'effet de l'oculaire, en détruisant la convergence des rayons, les rend très-pen divergents, sinon parallèles, et qu'alors FD diffère assez peu de F'. Il faut, après avoir mis la lunette à son point, retirer l'objectif et recevoir la lumière par son orifice : il s'en forme une image au delà de l'oculaire et à une distance que l'on mesure avec soin. La position de cette image est le foyer conjugué de l'ouverture de la lunette. On peut donc, relativement à l'oculaire qui ne fait plus que fonction d'une lentille convergente, appliquer la formule $\frac{1}{F}=\frac{1}{f}+\frac{1}{s}$ en modifiant convenablement les notations. Si nous conservons F et F' pour représenter les distances focales principales de l'objectif et de l'oculaire ; si nous appelons D la distance à laquelle s'est formée l'image, et si nons nous rappelons enfin que la longueur de la lunette est sensiblement $F+F'$, la formule devra être écrite ainsi :

$$\frac{1}{F'}=\frac{1}{D}+\frac{1}{F+F'} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{D}=\frac{1}{F'}-\frac{1}{F+F'}=\frac{F}{F'(F+F')} \quad \text{et} \quad \frac{F}{F'}=\frac{F+F}{D}$$

par conséquent le rapport cherché est connu.

329. *Microscope composé.* Les lunettes ont pour but de faire voir sous un plns grand angle visuel les objets qui sont très-éloignés, afin de produire une image qui embrasse une plus grande surface sur la rétine, et cause ainsi une impression plus sensible au cerveau de l'observateur : le microscope composé, dernier des instruments dioptriques que nous nous proposons de décrire, est destiné à amplifier le plus possible les dimensions, d'ailleurs très-petites, de l'objet que l'on vent étudier dans tous ses détails.

Comme la lunette astronomique, il se compose d'un oculaire N et d'un objectif M (*fig.* 255). L'objet AB est placé très-près du foyer F de l'objectif, mais toujours au delà, de sorte que l'image réelle A'B' se forme à une distance beaucoup plus éloignée de M, et est par conséquent amplifiée. L'oculaire comme toujours l'amplifie encore en lui substituant une image virtuelle A''B'', sous-tendue par le même angle, mais placée à la distance de la vision distincte.

Plus le corps est près de l'objectif, plus l'image est grande, puisque l'angle sous-entendu est d'autant plus grand et le foyer

conjugué plus éloigné. Il est cependant une limite qu'il ne faut pas atteindre, c'est le foyer des rayons parallèles : car alors il n'y a pas d'image formée. Concluons donc de là que le grossissement est d'autant plus considérable que l'objectif est d'un plus court foyer. Nous savons qu'il dépend aussi et de la même manière de l'oculaire : donc il est en raison inverse du produit des distances focales des deux verres.

En comparant successivement les triangles semblables ABO et A'B'O d'une part, A'B'O' et A''B''O' de l'autre, nous trouvons AB : A'B' :: pO : qO et A'B' : A''B'' :: qO' : rO' : multipliant l'un par l'autre et supprimant A'B' facteur commun aux deux termes du premier rapport.

$$AB : A''B'' :: pO \times qO' : qO \times rO' \quad \text{d'où} \quad A''B'' = AB\,\frac{qO \times rO'}{pO \times qO'}$$

Dans la fraction, les facteurs du numérateur sont les distances focales conjuguées de celles qui sont exprimées par les facteurs du dénominateur.

A mesure que le dénominateur diminue, le numérateur augmente et, par ce double motif, le pouvoir amplifiant de l'instrument augmente aussi. Or, les facteurs du dénominateur peuvent décroître d'autant plus que les lentilles sont plus convexes ; donc, nous avions raison de dire que le grossissement était inversement proportionnel au produit des distances focales des verres.

Il convient de remarquer ici que nous n'avons pas considéré le grossissement sous le même point de vue que dans l'étude des lunettes ; ce grossissement n'est plus le rapport entre l'angle sous lequel on voit l'objet avec le microscope et celui sous lequel on le verrait si l'œil était situé au centre de l'objectif, puisque dans cette dernière circonstance l'image serait confuse. Le grossissement est alors le rapport de l'angle sous lequel on voit l'image et de celui sous lequel on verrait l'objet, s'il était placé à une distance convenable pour la vision, c'est-à-dire à la distance de la vue distincte.

Appliquons à un exemple numérique. Supposons que $F = 0^m,005$, $F' = 0^m,0035$: que l'objet soit placé à $0^m,0005$ en avant du foyer principal de l'objectif, et que l'on dispose l'oculaire de manière que l'image réelle se forme à $0^m,003$ de l'oculaire.

Nous tirons de $f = \frac{Fs}{s - F}$ (n° 309), en l'appliquant d'abord à la lentille M, f ou qO $= 0^m,055$ et ensuite, par rapport à l'oculaire $f = r$O' $= 0^m,021$.

L'expression du grossissement est donc $\frac{55 \times 21}{3 \times 5,5} = \frac{1155}{16,5} = 70$, et, en considérant le rapport des surfaces, il est égal à 4900.

Après avoir expliqué la théorie du microscope, nous allons en donner la description. Il se compose d'un tube cylindrique en trois parties A, B et C (*fig.* 256), maintenu dans une position verticale par une tige VST : l'oculaire est en A et l'objectif en O. Sous ce dernier, et à une distance qu'on peut faire varier, est placé un cercle évidé, maintenu à la tige par une vis de pression, et sur lequel on place le petit corps que l'on veut examiner : il est soutenu dans cette position par une lame ou entre deux lames de verre très-mince. Comme ordinairement il est transparent, en raison de son exiguïté, on l'éclaire fortement au moyen d'un miroir concave HK, dont la hauteur et l'inclinaison sont variables en raison de la position du corps soumis à l'observation et de la direction des rayons lumineux. Il existe encore, et dans une position intermédiaire, un disque métallique FG, percé de plusieurs trous de diamètres différents et destinés à ne donner passage qu'aux rayons réfléchis qui doivent éclairer l'objet. Si le corps est opaque, on concentre la lumière dessus, à l'aide d'une lentille P maintenue par une charnière C, ou d'un prisme qui remplit le même but.

330. *Microscope catadioptrique*. Sans nous étendre, plus qu'il ne convient ici, sur un instrument qui n'a point de rapport avec la topographie et la géodésie, et sans parler de toutes les modifications qu'on y a apportées, nous ne pouvons nous empêcher de dire un mot sur le microscope modifié par le professeur Amici.

Dans celui-ci sont combinés les phénomènes de la réflexion et de la réfraction Il se compose d'un tube horizontal, à l'une des extrémités duquel est adapté l'oculaire ; tandis qu'à l'objectif on a substitué un miroir concave (*fig.* 257) : celui-ci est une portion d'ellipsoïde dont le foyer le plus éloigné est situé au point où doit se former l'image réelle qu'amplifie l'oculaire. Un petit miroir plan de forme elliptique, incliné de 50^g sur l'axe, et présentant sa face réfléchissante au miroir concave, est placé dans l'intérieur et sur l'axe même du tube. Au dessous, la paroi du cylindre est percée de manière à donner passage aux rayons lumineux envoyés par le petit corps que l'on veut amplifier, et qui se trouve placé en contre-bas. Les rayons réfléchis par le petit miroir plan, et dont les prolongements produiraient une image virtuelle en F, foyer du miroir elliptique concave, rencontrent ce miroir qui les

renvoie en F′, son second foyer. Déjà l'objectif interposé entre l'objet et le miroir plan a amplifié l'image; l'oculaire, à son tour, dont le foyer est en F″, augmente encore l'angle visuel sous lequel l'observateur perçoit la sensation causée par l'objet.

331. *Microscope solaire.* Cet instrument fournit une image réelle et amplifiée. Il se compose d'un miroir plan PQ dont l'inclinaison est variable au moyen d'une charnière P (*fig.* 258) et de deux lentilles M et N, dont l'axe est généralement le même. On incline le miroir de manière que les rayons solaires qu'il reçoit soient réfléchis sur la lentille M parallèlement à son axe, et de telle sorte qu'ils convergent vers son foyer principal. Là, dans une très-petite ouverture, pratiquée dans le volet d'une chambre privée de toute autre lumière, on place le petit objet *ab*, qui est alors fortement éclairé. Ensuite, une seconde lentille N, placée en avant de *ab* et un peu au delà de sa distance focale principale, reçoit la lumière qui en émane et produit, de l'autre côté, une image agrandie, réelle et renversée que l'on peut rendre visible de tous les points de la chambre obscure, en la recevant sur un corps blanc et uni, tel qu'un grand carton, un drap ou un mur, s'il est toutefois à une distance convenable. Si *ab* était opaque, il faudrait modifier l'appareil pour l'éclairer en avant. Dans ce cas, les axes des lentilles ne se confondraient plus.

332. *Longue-vue Cornet.* Nous plaçons ici seulement la description de cet instrument, parce que sa construction est, comme pour les télescopes, basée à la fois sur les deux principes de la réflexion et de la réfraction.

M. Porro, l'inventeur, y a même ajouté son micromètre ou *télémètre* militaire, qui permet d'estimer les distances avec une approximation suffisante dans la plupart des opérations de la guerre.

Cette lunette a l'avantage, entre autres, de n'avoir pas plus de longueur que la lunette de Galilée, quoique d'un champ et d'un grossissement égaux à ceux de la longue-vue.

Deux prismes triangulaires rectangles M, N (*fig.* 39, *planche* XXII), placés de manière à ce que leurs arêtes soient perpendiculaires, permettent à un œil O de voir, suivant la direction OO′, un objet éloigné, AB.

On conçoit, en effet, que, d'après le principe de la réflexion, un rayon lumineux venant de AB se brise quatre fois pour arriver en O. La figure, et d'ailleurs le raisonnement seul, indique la position qu'il convient de donner au second prisme N, pour

que la seconde réflexion partant de M puisse le rencontrer. Plaçant en V un objectif d'un foyer convenable et un oculaire en O, on complète ainsi une lunette terrestre qui fournit une image droite de l'objet. C'est ce qu'indiquent suffisamment les projections horizontale et verticale de la *fig.* 39, *planche* XXII.

Si les arêtes des deux prismes, cessant d'être perpendiculaires, occupaient des positions parallèles, l'image serait symétrique et renversée.

Laissons cette dernière disposition, que nous avons citée en passant uniquement pour signaler le fait, et revenons à l'autre tout aussi simple et bien préférable.

Les principes d'optique exposés plus haut donnent le moyen de calculer tous les éléments de la *longue-vue Cornet*. On trouverait ainsi que, pour un objectif de $0^m,035$, la longue-vue doit avoir un développement de 4 à 8 décimètres, suivant qu'on suppose le segment sphérique formant l'objectif, le dixième ou le vingtième de la longueur du rayon.

On sait, en effet, que lorsqu'une lentille est symétrique de courbure sur ses deux faces, la distance focale principale est précisément égale au rayon, l'indice de réfraction du verre étant $\frac{3}{2}$: elle est donc de $0^m,35$ ou $0^m,70$, et la longue-vue ordinaire a, dans ces deux cas, $0^m,4$ ou $0^m,8$, tandis que l'amplitude du segment est $3^g,33$ ou $6^g,66$.

La *fig.* 39, *planche* XXII, suffit pour faire comprendre que la *longue-vue Cornet* n'a qu'un tiers environ, soit 13 centimètres, dans la première hypothèse.

Pour en faire un *télémètre* militaire, M. Porro a ajouté un micromètre formé de plusieurs fils fixes disposés comme l'indique la *fig.* 40, *planche* XXII.

Il a ensuite dessiné sur un canevas de lignes parallèles (*fig.* 41, *planche* XXII) quelques objets de dimensions moyennes connues; l'usage de cette vignette, qu'on colle sur le corps de la lunette, va s'expliquer immédiatement.

Les fils a, b du micromètre sont placés de manière à embrasser un intervalle de 1^m pour 100^m de distance.

Les fils c, d n'interceptent qu'un demi-mètre, et les fils e, f que $0^m,20$.

Pour évaluer, avec l'instrument ainsi préparé, la distance à laquelle on aperçoit un objet dont l'homologue est représenté sur la vignette, on remarque à quels détails de l'objet visé correspondent les fils de l'une des trois couples du micromètre.

Les parallèles qui coupent de la même manière la gravure, donnent de suite le résultat en mètres, en doubles mètres ou en demi-décamètres, suivant l'intervalle micrométrique qui a servi à l'opération. Il est évident qu'il suffit pour cela que les parallèles du dessin, écartées de $0^{m},001$, représentent des décimètres sur les dimensions réelles de l'objet dessiné et qu'elles soient numérotées comme le serait une chaîne de 10, de 20 ou de 50 mètres.

On peut encore, dans d'autres circonstances, lorsqu'on en a le temps et que les objets sont accessibles, employer cette lunette au même usage que la stadia. Alors la vignette ne sert plus ; mais il faut avoir une mire graduée en décimètres fortement indiqués et bien visibles. On l'envoie vers le point dont on veut apprécier la distance, et chacune des divisions comprises entre les fils du micromètre représente 10 mètres, 20 mètres ou 50 mètres, suivant qu'on a fait usage des fils *ab, cd* ou *ef.*

Tant que le terrain est médiocrement incliné, il est inutile de s'occuper de la réduction à l'horizon, qui est bien inférieure à la précision que l'on peut atteindre en opérant ainsi. Si, au contraire, la pente est considérable, comme il arrive surtout dans les pays de grandes montagnes, il faut mesurer cette inclinaison avec un clisimètre quelconque ou avec l'éclimètre que l'on a presque toujours à sa disposition. Au surplus, cette réduction est également nécessaire, quel que soit le procédé employé, fût-ce même la chaîne, pour mesurer la distance.

La *fig.* 42, *planche* XXII, indique la forme extérieure de la lorgnette optique.

333. *Télescope d'Herschell.* Ce télescope est, comme tous les instruments que nous allons décrire et comme les deux précédents, catadioptriques, c'est-à-dire qu'on y combine l'emploi des miroirs et des lentilles. Un miroir concave est placé au fond d'un tube dirigé vers l'astre ou l'objet que l'on veut contempler. Tous les rayons arrivant parallèles sont concentrés au foyer du miroir, et l'image est amplifiée par un oculaire. Pour que l'on puisse en faire usage, pour que la tête de l'observateur ne porte pas obstacle à l'introduction des rayons lumine x dans le tuyau, le miroir est placé de façon que son axe soit incliné par rapport à celui du télescope. De cette disposition, il suit que l'image se forme près de la surface du tube et non au milieu. Alors l'oculaire est placé latéralement (*fig.* 259).



334. *Télescope de Newton.* Dans celui-ci, un petit miroir incliné à 50ᵍ sur l'axe intercepte les rayons renvoyés par le microscope concave (*fig.* 260), et les réfléchit dans une direction rectangulaire; de sorte que l'oculaire est placé en dehors et sur le côté du tube. Le petit miroir plan ne contribue en rien au grossissement que l'on estime en comparant les angles C et O. L'astre serait, en effet, vu à l'œil nu sous l'angle aCb, le télescope le montre suivant $a'Ob'$, et comme $a'b' = ab$, et par suite $b'p' = bp$, on tire de

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}C = \frac{bp}{F}, \quad \text{et} \quad \text{tang.}\tfrac{1}{2}O = \frac{b'p'}{f}$$

l'expression $\text{tang.}\tfrac{1}{2}O = \text{tang.}\tfrac{1}{2}C\,\frac{F}{f}$ ou $O = C\,\frac{F}{f}$;

F est la distance focale du miroir concave, dont C est le centre, et f celle de l'oculaire; donc plus F est grand et f petit, plus le grossissement est considérable.

335. *Télescope de Grégory.* Celui-ci évite l'inconvénient de donner, comme les précédents, une image renversée et diffère de celui de Newton, par la substitution d'un second miroir concave au miroir plan incliné. Il se compose : 1° d'un grand miroir concave M (*fig.* 261) situé au fond du tube. Son centre est en C; son foyer principal en p. C'est là que se forme l'image réelle renversée ba de l'objet AB; 2° d'un second miroir concave N d'un diamètre beaucoup plus petit que le premier, placé dans l'intérieur du tuyau, à une distance de l'image ba un peu plus grande que sa propre distance focale. Son centre est en C', son foyer principal en p'. Il substitue à ba une autre image réelle $a'b'$ renversée par rapport à ba, c'est-à-dire droite par rapport à l'objet lui-même, et de plus très-agrandie en raison de la proximité de p et de p'; 3° d'une lentille O placée dans une ouverture pratiquée au centre du miroir M. Cette lentille, dont le foyer est en P''', un peu au delà de p'' où se forme $a'b'$, augmente le grossissement en raison de la position qu'elle occupe par rapport à $a'b'$.

Pour calculer le grossissement en fonction des distances focales des miroirs et de la lentille, désignons par D, la distance entre les deux miroirs, par

F la distance focale de M.
F' celle de N.
F'' celle de O.

L'objet, sans le secours de l'instrument, serait vu sous l'angle

ACB ou bCa ; tandis que le télescope le présente sous l'angle $a'Ob'$. Le triangle $a'Op''$ donne

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,O = \frac{a'b'}{2.Op''}\,; \quad \text{et le triangle } aCp, \quad \text{tang.}\tfrac{1}{2}\,C = \frac{ab}{2.Cp}$$

de là
$$O = C\,\frac{a'b'.Cp}{ab.Op''} = C\,\frac{F}{Op''} \times \frac{a'b'}{ab}.$$

ab et $a'b'$ sont situés à deux foyers conjugués du miroir N, que dans la formule générale nous avons désignés par s et f : de cette même formule, nous avons tiré $\frac{f}{s} = \frac{F'}{s - F'}$, et parce que $s = D - F$, nous pouvons écrire $\frac{a'b'}{ab} = \frac{F'}{D - F - F'}$ ce qui donne $O = C\frac{F.F'}{Op''(D - F - F')}$

Le numéro 296 nous conduit au même résultat. Si nous substituons F'' à Op'', comme différant très-peu, et si nous remarquons que $D - F - F'$ n'est autre chose que pp', la valeur de O peut se présenter sous cette forme $O = C\,\frac{FF'}{F''\,pp'}$.

On conclut de là que, si D reste constant, le grossissement augmente avec F et F', et en raison inverse de F''. L'influence de la variation de F et F' se fait doublement sentir, puisqu'en même temps que le numérateur augmente avec ses facteurs, ceux-ci tendent à diminuer $D - F - F'$ ou pp' au dénominateur.

Si, au contraire, on suppose F et F' constants, le grossissement deviendra d'autant plus considérable que D diminuera davantage. La limite sera $D = F + F'$, auquel cas O devient infini.

La formule se simplifie en introduisant une condition qui consiste à faire $\frac{F'}{pp'}$ ou $\frac{F'}{D - F - F'} = \frac{F}{F'}$; car alors elle devient $O = C\,\frac{F^2}{F'F''}$ et exprime que le grossissement est en raison directe du carré de la distance focale principale du grand miroir M et en raison inverse de celles du second miroir et de la loupe.

L'équation de condition posée ci-dessus fixe alors la valeur de $pp' = \frac{F'^2}{F}$ et indique que F' est moyenne proportionnelle entre F et pp'. On peut, d'après cela, trouver la valeur de l'une des trois quantités F, F' et pp' en fonction des deux autres. Si, par exemple, $F' = 0^m,1$ et $pp' = 0^m,01$ on voit que $F = 1^m$.

Cette équation résolue par rapport à D devient successivement

$$F'^2 = DF - F^2 - FF', \quad D = \frac{F^2 + F'^2 + FF'}{F}$$

ou encore
$$D = \frac{(F + F')^2 - FF'}{F}$$

Si l'on applique à cette formule les valeurs particulières de l'exemple précédent, on arrive, comme cela devait être d'ailleurs, à $D = 1^m,11$.

336. *Télescope de Cassegrain*. L'avantage des télescopes sur les lunettes est de pouvoir employer des miroirs aussi grands qu'on veut; tandis que la difficulté d'exécution des lentilles ne permet pas d'en obtenir d'un diamètre tant soit peu considérable. Cependant, il reste encore un grand inconvénient attaché à l'emploi d'un miroir courbe : c'est que les rayons lumineux, qui l'atteignent près de son axe, sont les seuls qui convergent très-sensiblement vers un point unique, le foyer. A mesure qu'ils s'en éloignent, ils se coupent deux à deux en des points situés en dehors de l'axe, et dont l'ensemble forme une surface dont la courbe HFK est une section. Cette surface se désigne sous le nom de *caustique par réflexion* (*fig.* 262 *bis*), et l'erreur est ce qu'on nomme *aberration de sphéricité*. Elle n'aurait pas lieu, s'il était possible de substituer aux miroirs sphériques qui reçoivent des rayons parallèles à l'axe, des miroirs paraboliques qui les réfléchiraient exactement au foyer. On y a songé, on en a même exécuté; mais on a renoncé à en faire usage, en raison de l'extrême difficulté de construction. Le télescope de Grégory avait été conçu d'abord, par son inventeur, composé d'un grand miroir parabolique et d'un petit qui était elliptique. L'un des foyers de celui-ci coïncidait avec le foyer de l'autre, et renvoyait l'image à son second foyer situé d'une manière convenable auprès de l'oculaire.

Cassegrain a imaginé, pour détruire l'aberration de sphéricité, de rendre convexe le petit miroir N (*fig.* 263) : car alors, en effet, les aberrations produites par les deux miroirs se neutralisent. Nous savons (§ 239) qu'un tel miroir fournit une image réelle dans certains cas où, par une cause étrangère quelconque, les rayons émanés d'un point lui arrivent en convergeant. Le point où se forme le foyer réel et celui où se réuniraient les prolongements des rayons incidents sont toujours les foyers conjugués. Restreignons néanmoins la loi que nous rappelons ici, en faisant remarquer qu'il faut que le point de convergence soit situé entre le miroir et son foyer principal. S'il se trouvait entre ce point et le centre, l'image serait virtuelle et au delà du centre. Si, enfin, le point de convergence était à une distance du miroir plus grande que le rayon, l'image serait encore virtuelle, mais elle se formerait entre le centre et le foyer principal.

Toutes les fois donc que les rayons incidents se dirigeront vers un point éloigné du miroir de plus de la moitié de la longueur du rayon, le foyer sera virtuel et distant du miroir d'une quantité qui variera entre $\frac{r}{2}$ et ∞. C'est, du reste, ce que l'on peut voir au tableau n° 301.

Cela posé, il nous reste peu de chose à dire sur la disposition de l'instrument. M (*fig.* 263) est le grand miroir dont le centre est en C et le foyer principal en *p*. Le centre et le foyer du miroir convexe intérieur N sont en C' et *p'*. L'image, au lieu de se former en *ba*, est reportée en *b'a'* toujours renversée. Quant au grossissement, on voit que les triangles qui nous serviront à la calculer sont les mêmes que dans la figure 261. On arrivera donc, par les mêmes considérations que pour le télescope de Grégory, à une formule analogue. Voici au surplus le calcul :

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}\, O = \frac{a'b'}{2F''}, \quad \text{tang.} \tfrac{1}{2}\, C = \frac{ab}{2F} \qquad \text{d'où } O = C. \frac{F}{F''} \times \frac{a'b'}{ab}$$

mais $\frac{a'b'}{ab} = \frac{f}{s}$, comme nous l'avons vu au § 296.

La formule relative aux miroirs convexes, lorsque les rayons lumineux incidents sont convergents, est $\frac{1}{F'} = \frac{1}{s} - \frac{1}{f}$, et par suite

$$\frac{f}{s} = \frac{F' - s}{F'}$$

par suite $$O = C \frac{F F'}{F'' (F' - s)}$$

A l'inspection de la figure, on reconnaît que $s = F - D$, donc enfin $O = C \frac{F F'}{F'' [D - (F - F')]}$.

Il est à remarquer que toujours D, distance entre les deux miroirs, doit être plus grand que F — F', sinon le dénominateur, et par conséquent l'expression de grossissement, seraient négatifs, ce qui exprimerait une absurdité. Nous avons vu, pour le télescope de Grégory, que la limite du grossissement est déterminée par $D = F + F'$: ici, le grossissement devient infini, lorsque $D = F - F'$.

Nous pouvons encore transformer la formule de manière que le grossissement soit en raison directe de F^2 et inverse de F' et F''. Pour cela, il suffit de faire

$$\frac{F'}{D - (F - F')} = \frac{F}{F'} \qquad \text{ou} \quad F'^2 = DF - F^2 + FF',$$

Dès lors, la grandeur de D est invariable : elle est fournie par

$$D = \frac{F^2 + F'^2 - FF'}{F} = \frac{(F - F')^2 + FF'}{F}$$

CHAPITRE VI.

INSTRUMENTS QUI FOURNISSENT LE MOYEN DE TRACER SUR LE PAPIER LES CONTOURS ET LES DÉTAILS DE L'IMAGE QU'ILS PRODUISENT.

337. *Chambre noire.* Cet instrument est destiné à produire sur une surface blanche telle qu'une feuille de papier, une image réelle des objets qui sont placés d'une manière convenable ; et si elle est formée dans un lieu privé d'ailleurs de toute autre lumière, elle est assez nette pour permettre d'en suivre tous les contours, pour donner, en quelque sorte, le moyen de calquer le tableau que présente la nature.

La chambre noire se compose d'un miroir et d'une lentille. Soit AB (*fig.* 264), un objet situé en présence d'un miroir MN incliné de 50ᵍ sur l'horizon. Les rayons lumineux qui partent de AB seront réfléchis par le miroir suivant la loi indiquée n° 290. Ils donneraient pour un œil dirigé sur le miroir, l'apparence d'un corps symétrique à AB, et situé autant en arrière du miroir que ce dernier l'est en avant. Si les rayons réfléchis et divergents viennent à rencontrer une lentille K, ils seront modifiés dans leur direction, et viendront former une suite de foyers dont l'ensemble constituera l'image *ab* de AB. Cette image sera d'autant plus nette que la surface sur laquelle elle se peindra sera, ainsi que la tête de l'observateur, enveloppée par un rideau épais qui empêchera l'introduction de toute autre lumière que celle qui produit l'image.

La table et la lentille doivent être mobiles, l'une par rapport à l'autre, afin d'amener la première au foyer conjugué de l'image virtuelle formée par le miroir plan. Lorsque l'objet considéré AB sera placé à des distances assez petites pour que ses variations de positions influent sur le lieu de formation de l'image réelle *ab*, celle-ci augmentera pour deux causes, quand AB se rapprochera : 1° l'augmentation de l'angle O qui n'influera pas sur la clarté de l'image, car les rayons lumineux croîtront dans le même rapport que les surfaces ; 2° l'éloignement obligé de la table qui coupera

cet angle plus loin de son sommet et déterminera une image plus grande. Cette seconde cause diminuera la clarté de *ab* proportionnellement au carré de la distance focale.

Les considérations précédentes expliquent pourquoi le temps de pose doit être d'autant plus grand dans l'exécution des portraits photographiques, qu'on veut obtenir des images grandes elles-mêmes, avec la même chambre noire, bien entendu.

Mais dans l'usage habituel de la chambre noire destinée à donner l'esquisse des paysages, ou dans son emploi pour la reproduction photographique d'une vue de la campagne, la clarté reste constante, quelle que soit la distance des objets, abstraction faite de la perspective aérienne.

Observons que cette constance se rapportera également à l'échelle du tableau lorsqu'il s'agit d'objets éloignés. Celui-ci est obtenu avec des dimensions telles que celles qu'on obtiendrait par les procédés ordinaires de la perspective, en plaçant le tableau à une distance de l'œil égale à la distance focale principale de la lentille employée. Pour augmenter l'échelle du tableau, il faudrait nécessairement changer l'objectif.

338. Maintenant, on modifie l'appareil, en remplaçant le miroir et la lentille par un prisme qui fait fonction de l'un et de l'autre. Ce prisme (*fig.* 265), dont MNP est une section perpendiculaire à ses arêtes, a une face MN plane et inclinée à 50^g. C'est elle qui fait fonction du miroir et qui réfléchit les rayons qu'envoie l'objet AB. Ces rayons sont rendus moins divergents, quelquefois même convergents, au moment où ils pénètrent dans le prisme par la face antérieure MP qui est un segment de sphères; puis les rayons réfléchis, en traversant la troisième face NP sphérique aussi, deviennent plus convergents encore, et concourent vers des foyers *a* et *b*. Il est à remarquer que, pour ne pas voir l'image renversée, l'observateur doit se placer de manière à tourner le dos à l'objet.

Enfin, une autre chambre noire plus portative se compose d'une boîte rectangulaire dont CDEF (*fig.* 266) est une section longitudinale. Dans la face CD est enchâssée une lentille biconvexe M, dont la distance focale principale est égale à la profondeur de la boîte. Un miroir plan NP incliné à 50^g sur le fond de la boîte, et partant de l'arête supérieure horizontale F intercepte les rayons lumineux : ceux-ci, qui arrivaient convergents, sont réfléchis convergents aussi, et produisent une image *a'b'* au lieu

de *ab* qui aurait été formée si l'on n'avait pas placé le miroir. Si donc la portion FG de la face supérieure est remplacée par une glace dépolie, on pourra, en y jetant les yeux, voir une image de AB.

339. *Chambre claire* ou *camera lucida*. Cet instrument, dont le but est analogue à celui du précédent, se compose d'un prisme quadrangulaire : il fait apparaître une image virtuelle qui, pour l'observateur, semble être sur une surface blanche, où il lui est loisible de conserver les contours, en les suivant avec un crayon.

Soit MNPQ (*fig.* 267), un prisme quadrangulaire dont l'angle M soit droit et l'angle en P très-obtus : il doit avoir 135° environ. On tourne la face MN verticale vers l'objet A que l'on veut dessiner. Les rayons frappant presque normalement la face MN, éprouvent infiniment peu de réflexion, et ne dévient guère de leur direction première par le fait de la réfraction. Lorsqu'ils atteignent le plan MN très-obliquement, ils sont entièrement réfléchis : il en est de même à l'égard de la troisième face PQ ; puis enfin, en repassant dans l'air vers l'arête Q de la face horizontale et supérieure MQ, ils s'écartent par suite de la réfraction, plus qu'ils n'ont fait dans le précédent trajet : d'où il résulte qu'un œil placé vers Q, et regardant en bas, recevra par l'effet d'un certain nombre de ces rayons, la sensation d'une image virtuelle formée quelque part en *a*. Comme le corps de l'observateur ne peut être posé entre l'objet et le prisme, sous peine d'intercepter tous les rayons, il doit être placé du côté opposé, et c'est pour ce motif que le prisme est quadrangulaire : car c'est l'effet des deux réflexions successives qui redresse l'image. Celle-ci serait plus nette, mais renversée, si l'on employait un prisme triangulaire.

Un observateur placé vers le point O de façon à avoir sa pupille partagée en deux par l'arête Q pourra voir simultanément la pointe d'un crayon aperçue directement et l'intersection α formée sur une table, par les rayons de l'image virtuelle *a* qui est placée à une distance de l'appareil égale à celle du point A de la nature.

L'expression la plus simple de la chambre claire serait une vitre verticale sur laquelle un œil, *invariablement fixé*, pourrait suivre avec un style les intersections des pinceaux lumineux très-déliés qui partant de chaque point de la nature arrivent à la

pupille. On a substitué à ce système, inapplicable pratiquement, la chambre claire que nous venons de décrire, mais en lui laissant quelques-uns de ses inconvénients. Ainsi, l'œil doit, pendant toute la durée du travail, occuper la même position ; il n'est pas apte à voir simultanément bien deux objets tels que le crayon placé en α à une très-petite distance et le point *a* situé à une distance égale à celle de la nature. D'un autre côté, cette chambre claire a l'avantage de permettre l'exécution de dessins à une échelle quelconque. Rien, en effet, n'a précisé la distance de la table T qui doit seulement être assez rapprochée pour que le bras armé du crayon puisse l'atteindre.

Cet avantage devient quelquefois un inconvénient, comme lorsqu'il s'agit d'exécuter une perspective destinée à la confection d'un canevas. L'interposition d'une lentille biconcave entre l'œil et l'image virtuelle peut changer celle-ci en une autre image virtuelle située à la distance focale principale, distance constante, si la lentille est fixe, qui précisera l'échelle du dessin.

On arrive au même résultat d'une manière plus commode en remplaçant la face plane QM par une surface QM′ concave à l'intérieur qui change la dernière image virtuelle résultant de la réflexion sur PQ en une autre virtuelle également, mais située en α à une distance constante de Q, distance égale au double du rayon de QM′, dans le cas ordinaire du coefficient de réfraction égal à $\frac{3}{2}$.

Dans l'usage de la chambre claire ainsi modifiée, la position de l'œil n'est plus invariable. Il suffit que celui-ci soit placé de manière à recevoir simultanément les rayons réfractés et ceux venant directement de la pointe du crayon. Enfin, observons que les deux objets, le crayon et l'image, étant situés à la même distance de l'œil, celui-ci est apte à les voir avec une égale netteté.

340. Amici, professeur de Modène, a modifié cette première construction imaginée par Wollaston. Parmi les différentes combinaisons qu'il a faites avec un prisme triangulaire et une lame de verre, nous citerons seulement la suivante.

L'une des arêtes d'un prisme triangulaire, dont la section (*fig.* 268) est un triangle rectangle et isocèle, est appliquée sur une lame de verre qui fait un angle de 50ᵍ avec la face hypothénuse du prisme. Cette lame est donc parallèle à l'une des faces de l'angle droit, et celle-ci, tournée du côté de l'objet que l'on veut reproduire, n'est pas verticale, mais placée à peu près

comme l'indique la figure. De tout ce qui précède, il suit que des rayons arrivant de A et B perdent peu de leur intensité en atteignant la face antérieure du prisme : ils sont très-peu réfléchis et presque entièrement réfractés ; tandis qu'au contraire, parvenus à la face qui fait fonction de miroir, la réflexion est complète. En sortant du prisme par sa troisième face, ils vont se réfléchir de nouveau sur la lame de verre, et arrivent divergents à l'œil, pour lequel il y a alors image virtuelle : puis ensuite, et afin qu'elle paraisse se former à la distance convenable pour que la pointe du crayon se voie de la manière la plus nette, on modifie la divergence des rayons en interposant parfois une lentille entre l'instrument et l'œil. On a quelquefois recours à un verre coloré, pour tempérer l'éclat de l'image qui peut neutraliser l'impression que doit causer sur la vue la pointe du crayon.

Il existe encore quelques autres instruments d'optique dont l'emploi est trop étranger à notre sujet pour que nous en fassions mention. Ceux qui voudraient en connaître les noms, la description et l'usage, devront les chercher dans les ouvrages spéciaux. Quant à la chambre noire et à la chambre claire, il n'en a été question ici que, parce que tel officier peu familiarisé avec l'art du dessin pittoresque pourra s'estimer heureux d'avoir été mis à même d'employer l'un de ces instruments, s'il est obligé d'annexer la vue de quelque position intéressante à la reconnaissance dont il a pu être chargé.

341. *Stéréoscope.* Nous terminerons néanmoins en disant quelques mots du stéréoscope, instrument d'invention assez récente, parce qu'il précisera davantage les notions données sur la vision au chapitre IV.

Si l'on regarde avec un seul œil un objet quelconque, il se peint sur la rétine une perspective de cet objet. Si l'on considère ensuite, avec les deux yeux, un sujet situé sur un plan, les rétines reçoivent l'empreinte de deux images semblables ; de telle sorte que lorsque les deux axes optiques se fixent simultanément sur chaque point particulier pour recevoir les images de ce point aux lieux de la plus grande sensibilité visuelle, les images situées hors des axes sont toujours identiques ; par suite de la communication qui existe entre les nerfs optiques, les deux images de chaque point donnent lieu à une sensation unique ; abstraction faite de l'intensité de la lumière reçue, l'effet produit est le même qu'avec l'usage d'un seul œil

Mais si l'on regarde avec les deux yeux un objet de la nature ayant les trois dimensions, il n'en est plus de même; les deux perspectives formées sur les rétines sont prises de deux points de vue différant de la distance qui sépare les centres optiques des yeux. L'œil droit voit certaines parties du corps, telles que BD (*fig.* 213) qui sont cachées à l'œil gauche et réciproquement. Il en résulte, sur les rétines, deux images *bac*, *d'a'c* ayant des parties communes *ba*, *b a'*, telles que leurs points homologues pourront être amenés aux lieux d'extrême sensibilité par un mouvement de rotation des yeux, et ayant également des parties distinctes *ac*, *b'd'* qu'il y aura impossibilité de recevoir simultanément sur ces lieux de plus grande sensibilité. En sorte que lorsque le point *c* de l'œil gauche sera celui qui appartient à son axe optique, l'axe correspondant de l'œil droit cherchera vainement l'image correspondante de C.

Telle est la cause qui donne naissance au sentiment du relief, combinée toutefois avec la convergence plus ou moins grande de ces axes optiques, cause que les peintres obligés d'opérer sur une surface plane n'ont pas à leur disposition, et qu'ils cherchent à remplacer par d'autres moyens, comme l'usage des ombres dont l'influence existe réellement dans la nature, par des portions vaguement dessinées et par l'exagération de la perspective aérienne sensible en réalité, seulement pour des grandes variations de distance. L'insuffisance des moyens qu'ils emploient est suffisamment démontrée pour quiconque s'est servi d'un stéréoscope qui restitue à des dessins plans exécutés d'une certaine manière la cause la plus influente de la sensation du relief.

Supposons que la figure 213 représente deux images *bac*, *d'b'a'* formées avec la chambre noire d'un daguerréotype, de l'objet ABCD examiné des deux points de vue O et O ; c'est-à-dire que ces deux points sont les centres optiques de deux objectifs de même distance focale F.

Transportons, d'après le système de M. Wheastone, ces deux images en *abc*, *a.b'd'* (*fig.* 214) ; soient *m* et *m'* deux miroirs plans perpendiculaires placés dans une position symétrique par rapport aux deux images parallèles. Celles-ci donneront naissance à deux images virtuelles $\gamma\alpha\beta$, $\alpha'\beta'\delta$ très-voisines l'une de l'autre, mais que la disposition relative de *cab*, *a'b'd'* par rapport aux miroirs, pourrait même superposer, dans les portions communes du moins. Les deux yeux placés en O et O' recevront des sensations isolées, les mêmes que celles produites dans le cas de la fi-

gure 213, et ils auront par suite le sentiment du relief. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire que les deux images $\gamma\alpha\beta$, $\alpha'\beta'\delta'$ soient superposées en réalité ; si elles ne le sont pas, il en résultera ce seul effet, que les deux axes optiques des yeux cherchant à amener un point particulier α, α', par exemple, à donner la sensation unique la plus nette, se tourneront dans les directions $o\alpha, o\alpha'$ avec une convergence plus faible ou plus forte que celle qui proviendrait de la superposition de α à α'. Pourvu que le déplacement $\alpha\alpha'$ soit peu considérable, on pourra voir également bien dans l'un et l'autre cas.

Sir David Brewster a modifié cet appareil de la manière suivante :

Les images *bac*, *d'b'a'* de la figure 213 obtenues par le secours de la chambre noire sont placées en $c_1a_1b_1$, $a'_1b'_1d'_1$ (*fig.* 215) après avoir été retournées, ce qui les met dans la même position que l'objet ABCD de la nature ; deux lentilles convergentes dont les centres optiques sont en C et C' reçoivent chacune les rayons venant seulement de l'une des images, par suite de l'existence d'un écran E ; elles donnent naissance à deux images virtuelles $\alpha\beta\delta$, $\gamma\alpha\beta$ superposées exactement ou à peu près seulement, comme dans le cas examiné précédemment. Cette superposition, tout au moins approximative, exige que la distance de leurs centres optiques soit très-peu plus grande que celle des points homologues des images. Les yeux placés en O_1 et O_1' près de C et C' dans le sens CC', afin que les rayons reçus aient traversé les parties centrales seules des oculaires, ce qui est nécessaire pour la netteté de la vision, limitent la grandeur de l'écartement CC', par suite, celui des points homologues des images, et enfin la grandeur même des images employées. Cette limitation n'a pas lieu pour le stéréoscope par réflexion de Wheastone.

Les images virtuelles $\alpha\beta\delta$, $\gamma\alpha\beta$ donnent naissance sur les rétines à deux images $\beta_1\alpha_1\gamma_1$ $\delta_1'\beta_1'\alpha'_1$ dissemblables l'une à l'autre et semblables à celles qui se seraient formées à l'aspect direct de l'objet à trois dimensions. On aura donc ainsi le sentiment du relief.

Si l'on cherchait le grossissement ou le rapport des angles C et O pour les parties communes $\beta_1\alpha_1$ et celui qui serait relatif aux parties isolées $\alpha_1\gamma_1$, on le trouverait comme celui de la lunette astronomique, égal à $\frac{F}{\varphi}$ rapport des distances focales de l'objectif et de l'oculaire, pour l'un et l'autre cas. Cette constance établit la similitude des effets produits avec l'instrument et à la vue sim-

ple, si toutefois, dans cette dernière circonstance, les yeux ont occupé les positions mêmes attribuées aux centres optiques O et O' des objectifs. Si donc la distance de ceux-ci est égale à celle qui sépare en réalité les deux yeux d'un individu, le sentiment du relief sera le même que celui produit dans le cas où on aurait examiné, à la distance réelle d de l'objet, un corps semblable agrandi dans le rapport $\frac{F}{\varphi}$. Si, au contraire, OO' est plus grand que la distance δ des deux yeux, l'effet résultant de l'emploi de l'instrument ne sera directement comparable qu'à celui qu'éprouverait un géant dont les yeux seraient écartés de la longueur OO', regardant le corps de la nature dont les dimensions seraient dilatées dans le rapport $\frac{F}{\varphi}$. Pour connaître l'effet analogue à celui du stéréoscope, produit sur une personne ordinaire, il suffira de changer toutes les dimensions proportionnellement à $\frac{\delta}{OO'}$, et l'aspect de l'image sera celui d'un corps dont les côtés seraient égaux aux côtés naturels $\times \frac{F}{\varphi}\frac{\delta}{OO'}$, et qui serait vu à la distance $\frac{d.\delta}{OO'}$.

Les perspectives ordinaires donnent à toute échelle la représentation des sujets de la nature par la comparaison, et par elle seule, des dimensions relatives des objets représentés. Autrement dit, le dessin d'une académie représente aussi bien un nain placé dans une petite chambre et vu de près, qu'un géant situé dans une grande salle et vu de loin : il n'en est plus de même pour le stéréoscope ; il représente un nain dans le cas où $\frac{F}{\varphi}\frac{\delta}{OO'} < 1$, ou un géant si $\frac{F}{\varphi}\frac{\delta}{OO'} > 1$, et leurs distances apparentes au spectateur sont déterminées par $\frac{d.\delta}{OO'}$.

Le seul cas de similitude complète des effets produits est celui où $\frac{F}{\varphi}\frac{\delta}{OO'} = 1$, et la distance à laquelle cet effet serait produit à la vue simple est $\frac{d.\varphi}{F}$.

Ceci explique pourquoi les paysages vus par épreuves stéréoscopiques semblent petits. Pour de tels sujets nécessairement éloignés de l'observateur, l'influence naturelle des deux yeux est très-faible. Aussi, pour rétablir cette influence, augmente-t-on démesurément l'intervalle OO', ce qui tend à rendre $\frac{F}{\varphi}\frac{\delta}{OO'} < 1$, $\frac{d\,\delta}{OO'} < d$, et par suite à produire le même effet qu'on éprouve-

rait à l'aspect du paysage réduit de dimensions, et considéré de près.

CHAPITRE VII.

ABERRATION DE RÉFRANGIBILITÉ.

342. Au numéro 287 nous avons énoncé ce fait, qu'un rayon lumineux incolore n'est autre chose que l'assemblage de rayons diversement colorés et doués de réfrangibilités différentes. Les sept nuances en lesquelles on les distingue sont : le violet, l'indigo, le bleu, le vert, le jaune, l'orangé et le rouge. Le rayon violet est celui qui, en passant de l'air dans un milieu transparent plus dense, dévie le plus de sa direction première ; le rouge, au contraire, est celui qui s'en écarte le moins. Il ne serait pas exact de dire que le rayon blanc n'est composé que de sept éléments diversement colorés ; il est formé par une infinité dont les nuances passent insensiblement de l'une des sept couleurs primordiales à la suivante. Des expériences nombreuses le prouvent. On reconnaît encore que chacune d'elles est simple, en soumettant à un second prisme l'un quelconque des rayons colorés, séparés les uns des autres par un premier. Le rayon soumis à cette épreuve ne se subdivise pas et ne change pas de couleur. Il est donc indécomposable.

Si l'on emploie deux prismes de même angle réfringent (*fig.* 43, *planche* XXII), tournés en sens contraire, le faisceau lumineux qu'on fait passer à travers les deux sort parallèle à sa direction première et sans altération de couleur. Le premier prisme avait décomposé la lumière blanche, il faut donc que le second l'ait reconstituée.

Les sept rayons colorés réunis par une lentille convergente reproduisent à son foyer un petit cercle blanc légèrement irisé à l'entour.

Lorsqu'au contraire c'est de la lumière blanche qui arrive, sous forme cylindrique sur la lentille, les rayons décomposés qui sont de même couleur, forment un cône dont le sommet diffère de ceux qui appartiennent aux autres couleurs. Ces sommets sont d'autant plus rapprochés de la lentille que la couleur est plus réfrangible. Le foyer violet est le plus près ; le foyer rouge est le plus éloigné. C'est le vert qui occupe la position moyenne.

Un écran placé en AB (*fig.* 44, *planche* XXII) entre le premier

sommet et la lentille, coupant tous les cônes, offre à la vue un disque blanc dont *ab* est le diamètre, entouré de cercles dont les nuances sont le résultat du mélange de toutes les couleurs moins une, moins deux, etc., et dont le dernier est rouge.

Si l'écran s'éloigne progressivement, le disque blanc diminue de dimension, pour se réduire à un point au moment où l'écran passe par le sommet du cône violet. De là au sommet du deuxième cône, le disque, dont le diamètre est d'abord *a'b'*, pour aller encore en décroissant jusqu'au foyer des rayons bleus, ne serait pas blanc si les cônes s'arrêtaient à leurs premières nappes. Sa couleur serait le résultat de la superposition de toutes les couleurs, moins le violet : mais cette couleur s'y trouve aussi bien que les autres, parce que les rayons violets n'étant pas matériellement arrêtés à leurs foyers, continuent leur marche première.

Le nouveau disque est donc encore blanc : il en est de même pour tous ceux qui se produisent au moment où l'écran atteint chacun des sommets. Les franges continuent à se présenter dans le même ordre, jusqu'à une certaine position CO de l'écran. A partir de ce point, les deuxièmes nappes enveloppant les premières, la série des nuances est renversée de telle sorte qu'au delà de CD le dernier cercle est violet ; après *cd* l'enveloppe extérieure se compose de deux cercles, violet et indigo ; après *c'd'*, de trois, violet, indigo et bleu, etc.

Dans l'emploi des lentilles pour la construction des lunettes, le phénomène de la décomposition des rayons est un grand inconvénient. Pour y remédier, on a été conduit, par les nombreuses recherches des savants les plus distingués, à composer l'objectif de deux lentilles, l'une convergente, l'autre divergente, de matières transparentes, jouissant de certaines propriétés à différents degrés, de telle sorte qu'après le passage au travers des deux, les rayons diversement colorés concourent vers un foyer unique, où se reproduit la lumière blanche dont ils sont parties intégrantes.

343. Afin de bien comprendre ce qui se passe en cette circonstance, il faut savoir qu'il y a autre chose que la réfraction à considérer dans les corps transparents. Si le rayon était simple, tout se bornerait à énoncer que la réfraction est proportionnelle à la densité du milieu : mais le rayon se décomposant, il y a, entre la direction nouvelle des rayons élémentaires extrêmes, le rouge et le violet, une différence de réfraction que l'on nomme

dispersion, et qui n'est pas exactement proportionnelle à la réfraction du rayon moyen (le vert). S'il en était ainsi, on ne pourrait détruire la colorisation des images sans anéantir aussi la réfraction, et par conséquent, il n'y aurait plus d'images formées.

344. Supposons actuellement qu'un rayon lumineux LM (*fig.* 269) ait traversé un prisme dont ABC soit une section perpendiculaire aux arêtes, le faisceau décomposé sera compris entre les rayons extrêmes NO et PQ, en vertu du pouvoir dispersif du verre, et la direction du rayon moyen sera RS; mais, si à ce prisme on en accole un second BCD (*fig.* 270), dont le pouvoir dispersif soit beaucoup plus grand que celui du premier, tandis que sa puissance réfractive serait moins sensiblement augmentée, il en résultera que, le rayon moyen se relevant d'une certaine quantité vers la base supérieure BD, les rayons extrêmes s'infléchiront dans le même sens, et cela d'une manière plus sensible de la part du rayon violet que de celle du rouge. Plus l'angle C du second prisme sera petit, plus les rayons réfractés tendront vers le prolongement de la base AC, mais aussi moins ils auront pu se rapprocher. Si cet angle C est assez grand, ou si la puissance dispersive du second prisme est assez forte pour que les deux rayons extrêmes se croisent dans l'intérieur, il y a deux circonstances à considérer : en raison de leurs directions, ils peuvent sortir au-dessus ou au-dessous de la normale à la face CD. S'il s'agit du premier cas, les rayons ne se rencontrent pas, et l'aberration de réfrangibilité n'est pas détruite : car le rayon violet (*fig.* 271) étant devenu supérieur au rouge et s'écartant plus que lui de la normale, ils restent divergents. S'ils sortent, comme l'indique la figure 272, au-dessous de la normale, le violet tend à se rapprocher du rouge.

Résumons en disant que, si la direction du rayon incident, l'amplitude des angles B et C des prismes et leurs puissances dispersives sont telles que les rayons extrêmes ne se croisent pas dans l'intérieur du second prisme, il faut que les rayons en sortent au-dessus de la normale, pour qu'ils puissent se réunir au delà (*fig.* 270) : s'ils doivent sortir sous la normale, afin d'être rendus convergents, il faut qu'ils se soient croisés avant leur retour dans l'air (*fig.* 272), parce qu'alors le violet, plus voisin que le rouge de la normale, s'en écarte davantage.

345. Ce sont des conditions de ce dernier genre qu'il faut chercher à remplir pour arriver à la construction des lentilles achro-

matiques. En effet, deux lentilles accolées, l'une biconvexe, l'autre biconcave (*fig.* 273), présentent de l'analogie avec deux prismes rapprochés. Ici, les normales venant se croiser sur l'axe commun des lentilles au centre de courbure, les rayons lumineux extrêmes pourront toujours se rencontrer, soit qu'ils sortent au-dessus des normales, soit qu'ils arrivent dans l'air au-dessous. Dans le premier cas, il faudra que les rayons ne se croisent pas dans la seconde lentille. Ils devront s'y croiser, au contraire, s'ils sont inférieurs aux normales (*fig.* 273). C'est de cette seconde façon que sont construites les lentilles achromatiques, parce que la face extérieure du verre biconcave est d'une courbure beaucoup moindre que la face antérieure de la lentille biconvexe, afin que, malgré tout, le point de réunion des rayons émergents soit sur l'axe des lentilles.

346. Après avoir donné un aperçu de la marche des rayons à travers deux prismes ou deux lentilles, il convient d'entrer dans quelques détails pour faire voir quels rôles jouent, dans l'achromatisme, la forme et la matière des milieux traversés par la lumière.

Plusieurs circonstances se combinent entre elles :

1° L'effet de réfraction et de dispersion produit dans des proportions différentes par les deux milieux ;

2° L'amplitude des angles réfringents.

Le but est de détruire la colorisation due au phénomène de la dispersion, de telle sorte que la lumière entrée blanche dans le premier prisme sorte blanche du second.

Cherchons les conditions qui peuvent résoudre le problème en ce sens et, pour cela, analysons d'abord l'action du premier prisme.

Soient A l'angle réfringent (*fig.* 45, *planche* XXII),
n l'indice de réfraction,
p l'angle de déviation, c'est-à-dire l'angle que forment la première et la dernière direction du rayon lumineux, y et y l'incidence à l'entrée, la réfraction à la sortie, x et x' la réfraction à l'entrée, l'incidence à la sortie.

Dans le triangle ABC'

$$A = 200^g - \beta - \alpha$$

mais $$\beta = 100 - x, \quad \gamma = 100 - x'$$

donc $$A = x + x'$$

d'ailleurs $y+y'-p=A$ ou $p=y+x'-A$, comme l'indique la combinaison des angles que forment entre elles les droites menées par le sommet A, parallèlement aux normales N et N', ainsi qu'aux rayons incident et émergent.

Nous pouvons donc écrire

$$p=y+y'-(x+x')$$

et parce que $\qquad y=nx, \quad y'=nx'$

$$p=n(x+x')-(x+x')=(n-1)(x+x')=(n-1)A$$

On aurait également pour un second prisme, en représentant par p', n' et A', les quantités analogues à celles que nous avons indiquées par p, n et A dans le premier,

$$p'=(n'-1)A'$$

En les supposant accolés par une face, l'un ayant la base en bas et l'autre en haut, la divergence produite par les deux sera la différence des divergences partielles : ce sera, en la désignant par P,

$$P=(n-1)A-(n'-1)A'$$

Disons, en passant, ce qu'exigerait la condition que P fût nul, c'est-à-dire que le rayon restât, après sa sortie, dans la direction qu'il suivait avant d'entrer. Il faudrait que l'on eût :

$$(n-1)A-(n'-1)A'=o$$

ou

$$A : A' :: n'-1 : n-1$$

En général, et pour un nombre quelconque de prismes traversés par un rayon de lumière, la formule sera

$$P=(n-1)A \pm (n'-1)A' + (n''-1)A'' \pm (n'''-1)A''' + \text{etc.}$$

Ce principe établi, occupons-nous des deux rayons extrêmes, le rouge et le violet, afin de pouvoir leur rendre le parallélisme après l'émergence.

Si n et n' ont représenté les indices de réfraction du rayon rouge, ceux du violet sont plus grands, puisque ce dernier rayon se rapproche plus de la normale que l'autre. Nous pouvons donc indiquer les nouveaux indices de réfraction par $n+dn$, $n'+dn'$, et écrire

$$P'=(n+dn-1)A-(n'+dn-1)A'$$

Mais il faut que $P = P'$; ce qu'exprime :

$$(n-1)\,A-(n'-1)\,A' = (n+dn-1)\,A-(n'+dn'-1)\,A'$$

d'où $dn.A = dn'.A'$ et $A : A' :: dn' : dn.$

Il faut ainsi, pour détruire la déviation, que les angles de réfringence des prismes soient en raison inverse des indices de réfraction diminués d'une unité chacun.

Pour faire disparaître la colorisation, il est nécessaire que ces mêmes angles de réfringence soient en raison inverse des coefficients de dispersion.

Si, enfin, il était possible de trouver deux matières transparentes qui pussent fournir la proportion

$$n-1 : n'-1 :: dn : dn'$$

cette proportion, mise sous forme d'équation, donne $\frac{dn}{n-1} = \frac{dn'}{n'-1}$ et chacun des membres représente ce qu'on nomme le pouvoir dispersif de la substance.

Les deux conditions énoncées ci-dessus seraient simultanément satisfaites.

La relation $A : A' :: dn : dn'$ qui permet de donner aux angles A et A' des amplitudes qui détruisent les effets de la dispersion, pour les rayons extrêmes, ne pouvant s'appliquer en même temps aux rayons intermédiaires, puisque le coefficient de dispersion n'est pas toujours le même, il s'ensuit que l'on ne peut complétement remédier au mal.

Disons, au surplus, que les franges colorées sont infiniment moins sensibles après le passage dans les deux prismes qu'à la sortie du premier.

Passons maintenant à l'effet des deux lentilles convexe et concave, qui jouent un rôle analogue à celui des prismes.

Les formules relatives à ces sortes de verres sont

$$\frac{1}{F'} = \frac{n-1}{r} + \frac{n-1}{r'}, \qquad \frac{1}{F''} = \frac{n'-1}{r'} - \frac{n'-1}{r''}$$

en désignant par F' et F'' leurs distances focales principales; par n et n' leurs indices de réfraction et par r, r', r'', les rayons de courbures dont r' l'un deux est le même pour les deux faces de contact.

La distance focale du système des deux verres étant la somme des distances partielles, il viendra

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right) - (n'-1)\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)$$

Si nous convenons que cette formule s'appliquera aux rayons rouges, il faudra, pour qu'elle puisse déterminer aussi le foyer des rayons violets, y substituer $n + dn$ et $n' + dn'$ à n et n', ce qui lui donne la forme ci-dessous

$$\frac{1}{F} = (n + dn - 1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right) - (n' + dn' - 1)\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)$$

En représentant par le même signe F les distances focales des rayons rouges et violets, nous exprimons suffisamment la condition que doit remplir l'achromatisme. Il faut alors que

$$dn\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right) = dn'\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)$$

S'agit-il de construire un objectif achromatique avec deux matières transparentes dont les indices de réfraction et les coefficients de dispersion soient connus, et sous la condition que F soit d'une longueur déterminée, en raison des dimensions qu'on veut donner à la lunette, on se sert des deux dernières formules que nous venons d'écrire. Mais elles renferment trois inconnues, les rayons de courbure r, r', r''. Le problème peut donc recevoir plusieurs solutions, puisqu'en attribuant une valeur quelconque à l'un de ces rayons, on en peut tirer celles des deux autres qui lui correspondent.

Toutes les solutions ne peuvent cependant être admises, les unes conduisant à l'emploi de segments sphériques d'une trop grande amplitude, d'autres restreignant trop le champ de la lunette.

On a pu, par la combinaison d'un troisième verre, réunir le foyer d'une autre couleur à celui que deux verres ont rendu commun aux rayons rouges et violets. Amici a su même ramener à un foyer unique les sept couleurs primordiales, en employant sept verres.

Après avoir indiqué les formules relatives à l'achromatisme, nous allons en faire l'application à quelques exemples.

Ces formules sont :

$$A : A' :: n'-1 : n-1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$A : A' :: dn' : dn \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$P = (n-1)\,A - (n'-1)\,A' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\frac{1}{P} = (n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right) - (n'-1)\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right) \qquad (4)$$

$$dn\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right) = dn'\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right) \qquad (5)$$

Dans la constrnction des prismes et surtout des lentilles, on se sert de *flint-glass* et de *crown-glass.*

L'indice de réfraction dans le *flint* est

pour le rayon rouge 1,627749
pour le violet. 1,671062

Dans le *crown*

pour le rayon rouge 1,525832
pour le violet. 1,546566

Les coefficients dn et dn' de dispersion sont donc 0,0434 pour le premier, 0,0208 pour le second.

Supposons que le prisme A soit de *flint* et le prisme A′ de *crown*, la formule (1) donnera pour le rayon rouge

$$A = \frac{525832}{627749} A' = 0{,}83764.\,A'. \quad \text{et pour le violet} \quad A = \frac{546566}{671062} A' = 0{,}81449.\,A'.$$

Dans le premier cas, si $A' = 30^g$, . . . $A = 25^g{,}2$
Dans le deuxième $A = 24{,}435$

En adoptant les deux premières valeurs de A′ et A, les rayons ronges ne subissent aucune déviation. Ce sont au contraire les violets, lorsque l'on fait usage des secondes.

Il est plus important de détruire l'effet de la dispersion que la déviation. C'est alors à la formule (2) qu'il faut avoir recours: elle donne

$$A = \frac{0{,}020734}{0{,}043313} A' = 0{,}4787.\,A'. \qquad \text{d'où} \quad A = 14^g{,}361 \quad \text{si} \quad A' = 30^g.$$

La déviation, qui alors est commune aux rayons extrêmes rouge et violet, se peut calculer à l'aide de la formule (3)

$$P = 52583 \times 30^g - 62775 \times 14^g{,}361 = 6^g{,}7598.$$

Supposons maintenant qu'il s'agisse de construire un objectif achromatique composé d'une lentille biconvexe de même courbure de part et d'autre en *flint-glass* et d'un verre divergent en *crown-glass*, dont la face antérieure a même rayon que la face postérieure de la première lentille.

Supposons aussi que $r = r' = 1^m$. Il reste dans les équations

(4) et (5) deux inconnues r'' et F. Introduisons-y les valeurs de n et n', dn et dn', indiquées plus haut, la formule (5) donnera

$$0{,}0434 \times 2 = 0{,}0208\left(1+\frac{1}{r''}\right) = 0{,}0208 + \frac{0{,}0208}{r''}$$

$$0{,}0868 - 0{,}0208 \quad \text{ou} \quad 0{,}0660 = \frac{0{,}0208}{r''}$$

et enfin $$r'' = \frac{0{,}0660}{0{,}0208} = 3{,}173$$

La formule (4) sert ensuite à calculer la distance focale principale F du verre achromatique

$$\frac{1}{F} = 0{,}627479 \times 2 - 0{,}525832\left(1+\frac{1}{3{,}173}\right)$$

$$\frac{1}{F} = 1{,}255498 - 0{,}525832\,\frac{4{,}173}{3{,}173} = 1{,}2555 - 0{,}695$$

$$\frac{1}{F} = 0{,}5605 \quad \text{et} \quad F = \frac{1}{0{,}5605} = 1^{m}{,}784$$

L'aberration de réfrangibilité est beaucoup moins sensible sur l'oculaire que sur l'objectif. L'effet produit transporte les images virtuelles à des distances différentes de l'œil, mais en les laissant toujours comprises dans un même angle ayant son sommet au centre optique. L'œil, placé très-près de l'oculaire, les voit donc sensiblement superposées, et par suite les couleurs se trouvent recomposées.

Cependant, il y a avantage à substituer à la loupe simple un système oculaire achromatique. En premier lieu, il n'est pas exact de supposer l'œil au sommet de l'angle sous-tendant les différentes images, car, en disant l'œil, il faudrait entendre son centre optique et non pas sa surface externe, qui seule peut se rapprocher beaucoup du centre optique de l'oculaire. En second lieu, les images de couleurs différentes du même objet, situées à des distances différentes, ne peuvent pas être également perceptibles, ce qui est nécessaire pour la recomposition nette de l'image finale formée sur la rétine.

Ces inconvénients ont peu d'importance dans les lunettes d'un faible grossissement, mais elles en acquièrent une considérable lorsque le grossissement est très-grand, comme dans les lunettes destinées aux observations astronomiques.

Des oculaires complexes sont actuellement appliquées presque toujours aux instruments qui demandent de la précision.

Ces oculaires se composent de deux verres simples ou doubles. Le diaphragme est placé entre les deux, ou en avant des deux dans l'intérieur de la lunette.

On a donné le nom d'*oculaires négatifs* à ceux de la première disposition. Les autres se nomment *oculaires de Ramsden*, du nom de l'inventeur.

L'oculaire négatif est probablement ainsi nommé parce que l'angle $a'Ob'$, sous lequel il fait voir l'image (*fig.* 47, *planche* XXII), est plus petit que l'angle aOb qu'aurait sous-tendu ab, si l'oculaire eût été simple. Il a donc l'inconvénient de diminuer le grossissement, mais il ne laisse apparaître aucune frange colorée autour de l'image virtuelle. Les deux verres sont plans-convexes, ainsi que l'indique la figure. Le premier M augmentant la convergence produite par l'objectif donne une image $a'b'$, moins éloignée de lui et moins grande que ab, mais entourée de couleurs diverses, dont l'extérieur est rouge. (*Voir* § 342 et *fig.* 44, *planche* XXII.)

Si cette image $a'b'$ était reçue sur un écran, c'est ainsi qu'elle apparaîtrait : mais les rayons s'entrecroisent seulement, sans s'arrêter jusqu'à la seconde lentille, et, si les proportions de l'instrument sont bien calculées, ces rayons reconstituent la lumière blanche, précisément vers le centre optique du dernier verre N. En effet, le rayon violet étant celui qui s'est le plus infléchi, lors de la décomposition, va se trouver extérieur par rapport aux autres, après le croisement qui a formé l'image. Il sera par conséquent celui qui aura la plus grande déviation à subir pour recomposer la lumière blanche : or, cette nécessité, d'accord avec le pouvoir dispersif de chacun des rayons colorés, peut se combiner de manière que le résultat désiré ait lieu au moment de l'immersion dans la lentille N.

Il est à remarquer que l'image reste renversée, comme dans l'emploi d'un oculaire simple.

On détermine, par le calcul, l'écartement des verres et leurs courbures : les résultats constatés et traduits en nombres ronds, pour la facilité d'exécution, sont dans le rapport de 1 pour la distance focale de N, 3 pour celle de M et 2 pour l'intervalle qui les sépare.

L'oculaire de Ramsden ne diminue pas le grossissement.

Le réticule est placé en deçà des verres, dans l'intérieur de la lunette (*fig.* 48, *planche* XXII).

Ces verres, le plus souvent simples comme dans l'oculaire né-

gatif, sont *plans-convexes;* lorsqu'on veut plus de précision, on forme chacun de deux lentilles, l'une *plan-concave* en *flint glass*, l'autre biconvexe en *crown-glass.*

Les rayons lumineux, qui sont divergents après avoir traversé M, moins cependant qu'avant l'immersion, le sont encore un peu moins à la sortie de N, mais précisément sous l'inclinaison qui fait réunir leurs prolongements à la distance de la vue distincte, ou, en d'autres termes, qui, réfractés par l'œil, vont en réalité former une image sur la rétine.

La courbure de M et la distance des verres sont combinées de telle sorte que les rayons qui viennent des points extrêmes se croisent au centre optique de N.

L'achromatisme des deux verres détruit toute espèce de colorisation de l'image.

En recherchant, soit pour l'un, soit pour l'autre des oculaires composés, le rapport de clarté de l'image à l'objet, on trouve l'unité pour limite supérieure, comme dans le cas où la lunette n'a qu'un oculaire simple.

Mais, pour atteindre cette limite, il faut toujours que $\omega < n\mathrm{F}$ (S 325), F étant la distance focale de l'objectif, n le rapport de l'ouverture de cet objectif à F, et ω représentant la portion de cette ouverture dont tous les rayons pénètrent dans la pupille p. D'un autre côté on trouve également $\omega = p.g$, g étant le grossissement. Il faut donc toujours que

$$pg < n\mathrm{F} \quad \text{ou} \quad g < \frac{n\mathrm{F}}{p}$$

pour que la limite de clarté soit atteinte. Les quantités n et p sont deux constantes; pour une même valeur de F on pourra donc atteindre la même limite de grossissement.

Mais pour la même grandeur de F, la lunette munie de l'oculaire de Ramsden est plus longue que celle qui aurait un oculaire simple, et cette dernière est plus longue encore que celle qui serait armée de l'oculaire négatif.

L'avantage semble donc rester à ce dernier système : aussi l'emploie-t-on dans tous les cas où l'on tient à diminuer la longueur de l'instrument. L'oculaire simple, plus désavantageux sous ce point de vue, a aussi l'inconvénient de ne pas être achromatique : aussi est-il rarement en usage.

L'oculaire positif ou de Ramsden est préféré pour les instruments destinés aux observations astronomiques (la longueur de la

lunette étant d'une importance secondaire), par suite de la constance de position des images réelles, constance qui permet la fixation à demeure d'un réticule indispensable dans toutes les opérations de mesures d'angles. La fixité de ce réticule pourrait être obtenue également par celle du verre intermédiaire de l'oculaire négatif, mais il resterait à celui-ci l'inconvénient résultant d'un écartement variable des deux verres qui le composent : il serait en effet nécessaire de tirer plus ou moins le dernier verre, suivant la vue de l'observateur, et nous avons dit précédemment que cet écartement avait une valeur précise, propre à détruire l'aberration de réfrangibilité; l'oculaire négatif ne serait, dès lors, pas parfaitement achromatique.

Les mêmes considérations s'appliquant aux lunettes employées aux opérations de la topographie (à l'éclimètre, par exemple), qui exigent également un réticule, il y aurait lieu de penser que l'oculaire de Ramsden doit leur être adapté. On préfère pourtant se servir de l'oculaire négatif, par suite de l'avantage qu'il offre de permettre un grossissement plus fort à longueur égale de la lunette.

CHAPITRE VIII.

APPLICATIONS A LA TOPOGAPHIE ET A LA GÉODÉSIE.

347-1. *Mesure des angles.* Pour mesurer un angle, on fait coïncider une ligne matérielle d'un instrument successivement avec les deux lignes droites de la nature, et l'on estime l'angle parcouru en passant d'une position à l'autre. Dans beaucoup de circonstances, l'une des deux visées est sous-entendue; elle est remplacée par un règlement particulier de l'instrument, comme pour la boussole, l'éclimètre, etc.

Pour que les angles ainsi obtenus soient exacts, il est donc nécessaire que ces coïncidences existent réellement ; mais, dans toutes les opérations physiques, il est à présumer que l'exactitude n'existera jamais mathématiquement. De là naît une erreur dépendant du mode d'opération employé.

Il n'existe que trois procédés qui puissent permettre d'aligner une ligne sur une autre.

347-2. 1° *Deux points fixes.* La direction à mettre en contact avec celle de la nature peut être déterminée par deux points

fixes, comme dans l'emploi du niveau d'eau, de la boussole Bournier, etc. Il est nécessaire de se mettre en arrière du plus rapproché, à une distance telle qu'il produise un image nette dans l'œil. Celui-ci devra donc se placer en O de telle sorte que les points fixes A et B (*fig.* 56, *planche* XXIII) lui paraissent superposés. En réalité, cette superposition n'aura pas lieu; au-dessous d'une certaine limite, l'œil n'a plus sensation des angles très-petits. Ainsi estimons, pour fixer les idées, qu'à la distance de la vue distincte $0^m,2$, la limite de petitesse dont on ait connaissance, soit de $0^m,0001$, ce qui répond à un angle de $3'20''$ environ.

L'angle O de la figure peut donc atteindre cette limite, en sorte que, si l'œil pouvait ensuite juger exactement la superposition de A ou de B avec le point visé, on commettrait des erreurs angulaires *a*AM, *b*BM, car on rapporterait involontairement soit à *a*, soit à *b*, la direction matérielle AB qui aurait dû appartenir à M. Ces deux angles seraient, approximativement, en désignant AB par D, et OA par δ,

$$B = O\frac{\delta}{D} \cdot \quad A = B + O = O\left(1 + \frac{\delta}{D}\right)$$

Mais la superposition du point visé, avec A ou B, ne se fera encore qu'avec la limite d'approximation égale à O; cette nouvelle erreur pourra s'ajouter ou se retrancher de celles que nous venons déjà de trouver. La limite supérieure de l'erreur totale sera donc

$$O\left(2 + \frac{\delta}{D}\right)$$

Dans une des deux opérations de visées, l'erreur peut être de signe contraire à celui de l'erreur commise dans l'autre visée: il en résultera donc, dans la mesure de l'angle, et relativement à cette seule cause, une erreur possible

$$2 \times O\left(2 + \frac{\delta}{D}\right)$$

Supposons qu'il s'agisse d'un niveau d'eau tel que $D = 1^m$; prenons la distance $OA = \delta = 0^m,2$, et supposons également admise la limite $3'20'$ que nous avons estimée précédemment pour l'angle O. L'erreur possible sera dans un pareil cas

$$2 \times 3',2\left(2 + \frac{0,2}{1}\right) = 4 \times 3',2 \times 1,1 = 14',08''.$$

Cette limite dépend des chiffres un peu arbitraires que nous

avons adoptés, mais il y a grandement lieu de supposer qu'elle peut être dépassée de beaucoup. En effet, nous n'avons pas tenu compte de la cause d'erreur grave provenant de ce que l'œil ne peut pas percevoir simultanément les sensations nettes de points éloignés de distances très-différentes. Aussi nous croyons qu'il vaudrait mieux augmenter l'influence du terme $\frac{f}{D}$ par l'augmentation de δ, afin que l'œil fût plus favorablement placé pour recevoir les sensations simultanées.

347-3. 2° *Un point fixe et une visière.* Ce procédé a été indiqué pour le clisimètre de Chezy. Un point f est marqué par la croisée de deux fils ; en regard se trouve un très-petit trou ouvert dans un écran. On place l'œil en arrière et très-proche de la petite ouverture O, et l'on fait tourner la ligne Of (*fig.* 56 *bis, planche* XXIII) jusqu'à ce qu'on aperçoive le point M coupé par la croisée des fils.

Si le petit trou était un point mathématique, la pupille se plaçant en p, l'œil se tournerait de lui-même jusqu'à ce que l'image allât se peindre au point le plus sensible de la rétine, et la direction serait déterminée à l'approximation près, 3',20", que nous avons admise précédemment. Mais avec un point mathématique il n'y aurait pas de lumière reçue : il faut donc donner une certaine dimension à la visière, et alors l'œil pourra se déplacer de manière que son axe principal soit dirigé suivant Cf ou $C'f$, sans qu'il en soit prévenu ; la pupille étant en effet plus grande que la visière, recevra dans un cas comme dans l'autre la totalité des rayons qui auront traversé la petite ouverture. L'angle d'erreur possible est donc CfC', puisque dans la première visée on aura pu se servir de la direction Cf, et de $C'f$ dans la seconde. En désignant par O le diamètre de la visière et par f la distance Of, on pourra donc commettre, outre l'erreur provenant de l'imperfection de l'œil, une erreur représentée par $\frac{O}{f}$.

Comme exemple, supposons $O = 0^m,0005$, $f = 0^m,2$, l'erreur totale sera susceptible d'atteindre la limite

$$6',40'' + \frac{0,0005}{0,2} = 6'40'' + \frac{1}{400} = 6',40'' + 16',10'' = 22',50''.$$

En diminuant l'ouverture de la visière, on diminuerait cet angle d'erreur, mais en diminuant aussi la clarté.

Ce second procédé semble beaucoup plus défectueux que celui

qui consiste à employer les deux points fixes; mais rappelons-nous que, dans l'examen du premier, nous n'avons pas pu tenir compte de la diffusion des images de points situés à des distances très-différentes, diffusion provenant surtout du plus rapproché d'entre eux. Celui-ci n'existe plus dans le second cas, car la visière détermine la position de l'œil, sans être vue par lui; il est donc plus facile d'apercevoir simultanément le point de la nature et la croisée des fils. Par l'existence même du petit trou qui éteint les rayons extrêmes des pinceaux lumineux, cette facilité se trouve encore augmentée.

Quoi qu'il en soit des avantages et des inconvénients de ces deux procédés, ils sont complétement abandonnés pour les instruments de précision qui ne permettent que l'usage du troisième.

347-4. 3° *Lunette*. On se sert à cet effet d'une lunette astronomique à oculaire simple ou composé. Pour simplifier l'explication, nous supposerons l'oculaire formé d'une seule loupe. Au point où se forme l'image réelle due à l'objectif, on place deux fils en croix supportés par un diaphragme destiné à éteindre les images de points trop éloignés de l'axe du premier verre. L'ensemble de ces deux fils compose le réticule.

La ligne matérielle mise dans la direction de celle de la nature est l'axe optique de la lunette déterminé par la croisée des fils et le centre optique de l'objectif. Il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que l'image de l'objet soit superposée à la croisée des fils, car nous savons que le point, l'image et le centre optique, sont en ligne droite.

Supposons pour un instant que la distance focale conjuguée des différents points observés soit constante. Après avoir amené, par un tirage particulier, l'oculaire à la distance du réticule qui permet la perception nette des fils qui le composent, on visera successivement les deux points qui déterminent l'angle à mesurer, en faisant coïncider leurs images avec la croisée des fils. L'axe optique de la lunette aura ainsi pris, l'une après l'autre, les deux directions de la nature; il aura par suite décrit cet angle en passant de la première position à la seconde. Si la position de cet axe optique est restée invariable par rapport à l'enveloppe matérielle de la lunette, un point quelconque de celle-ci, ou faisant corps avec elle, comme le zéro d'un vernier, par exemple, aura parcouru autour de l'axe de rotation l'angle formé par les deux directions.



Tel est, en substance, le moyen employé avec succès pour mesurer exactement les angles.

La lunette employée est astronomique, avons-nous dit; la lunette terrestre aurait l'avantage de ne pas renverser les objets, mais outre la perte de lumière qu'elle occasionne, elle a l'inconvénient d'être plus longue que la première à grossissement égal. La lunette de Galilée n'a pas ces deux inconvénients, mais elle ne peut pas recevoir de réticule, puisqu'il n'y a pas formation d'image réelle.

Causes d'erreur. Pour que l'angle parcouru par le zéro du vernier invariablement fixé à la lunette soit bien l'angle vrai, il faut (sous le seul point de vue que nous considérons actuellement) que l'axe optique soit resté invariable lui-même par rapport aux parties matérielles qui composent la lunette. Cette fixité peut être détruite par deux causes différentes : 1° nous avons supposé que les points considérés avaient même distance focale conjuguée; il n'en est ainsi que pour les points très-éloignés, et dans un grand nombre d'instruments, il faut que le réticule soit mobile pour l'amener au lieu même où se forme l'image. Dans ce mouvement, la croisée des fils se meut parallèlement à l'enveloppe cylindrique de la lunette (*fig.* 56 *ter*, *planche* XXIII), et l'axe optique s'incline différemment par rapport à celle-ci, si la ligne décrite n'est pas l'axe de figure même de cette enveloppe. Si f et f' sont les deux positions successives, l'erreur commise est l'angle fCf';

2° Les objectifs ne sont ordinairement fixés qu'à frottement, ou par un pas de vis; il est donc possible que ces verres tournent sur eux-mêmes, ou plutôt qu'on les fasse tourner, soit par inadvertance, soit en les remettant en place après les avoir nettoyés. Si le centre optique de l'objectif est en même temps le centre de la section de l'enveloppe cylindrique, cette extrémité de l'axe optique de la lunette n'aura pas bougé, mais il n'en sera jamais rigoureusement ainsi, et, s'il est excentrique, il passera d'une position c à une autre c'; l'axe optique aura donc dévié d'un angle CfC'.

Cette seconde cause d'erreur peut avoir une importance très-grande.

Les chiffres n'ont pas, dans le genre de considérations qui nous occupent, une valeur absolue; ils font seulement voir que les cas d'où ils résultent étant possibles, il y a lieu d'éviter la répétition de ces cas. Pour fixer les idées, supposons qu'avec

une distance focale $F = 0^m,2$, le déplacement de l'axe, à une de ses extrémités, puisse être de 0,0002; l'angle d'erreur sera de 6',40".

L'expérience indique que cette limite peut être dépassée de beaucoup; nous avons nous-même trouvé dans un éclimètre une variation de 75' résultant de la rotation de l'objectif sur lui-même. Quoi qu'il en soit de la quotité de ces erreurs, elles sont possibles, et il semble que l'avantage de la lunette sur les autres modes de pointé n'est pas considérable.

Mais observons que outre l'avantage énorme d'avoir des images situées à la même distance, images qui peuvent être vues simultanément avec la même netteté, on peut annuler l'influence de ces causes d'erreur, d'abord par les soins du constructeur, dont les efforts doivent tendre vers ce but, mettre exactement l'axe optique en coïncidence avec l'axe de figure. En second lieu, l'observateur lui-même peut prendre certaines précautions propres à assurer la fixité de cet axe optique; il lui suffit pour cela de marquer la position de l'objectif par un trait longitudinal commun à l'enveloppe de la lunette et à la monture du verre, et de marquer par un trait transversal le tirage du réticule avec lequel l'instrument a été réglé. Nous parlons d'un instrument réglé, comme l'éclimètre, parce que c'est surtout dans ce cas que les dérangements sont à craindre; pour la mesure de l'angle compris entre deux directions, il suffit, en effet, que l'axe optique garde la même position entre les deux visées, et le dérangement a peu de chances d'avoir lieu pendant un si court laps de temps, si l'observateur est prévenu qu'il doit l'éviter.

La fixité de l'axe optique est obtenue, dans les observatoires, par la fixité absolue des deux points qui le déterminent; mais il n'en peut pas être de même pour les instruments destinés au transport, par suite de la nécessité où l'on se trouve quelquefois de remplacer un fil cassé, ou de nettoyer l'objectif.

Nous avons examiné la cause d'erreur provenant de l'objectif. Si l'image réelle se forme à la croisée des fils même, l'oculaire ne peut engendrer aucune autre erreur; mais, dans les instruments à réticule mobile, cette superposition n'existera jamais complétement, et deux points f (le fil) et i l'image (*fig.* 56 *ter*, *planche* XXIII), situés pourtant sur l'axe optique de la lunette, pourront être vus séparés, si le centre optique de l'œil se place successivement en O et O hors de cet axe. Chacun peut facilement s'assurer de cet effet, en se servant d'une lunette qui n'est

pas bien amenée au point. On évite en grande partie cette cause d'erreur en précisant la position que doit occuper l'œil, par l'interposition entre lui et l'oculaire, d'un petit trou de la grandeur de la pupille, et en pointant seulement alors que la clarté de l'image atteint son maximum.

Il reste encore une cause d'erreur due à l'imperfection de l'œil, erreur que nous avons estimée à 3 20''; elle a beaucoup moins d'influence avec une lunette qu'à l'œil nu. En effet, si cette erreur est commise dans l'estimation de la coïncidence des deux images, elle se trouve réduite dans le rapport du grossissement, pour les points de la nature. Si la lunette grossit dix fois, cette erreur devient seulement égale à 32''.

Les observations précédentes, qui indiquent les précautions à prendre pour obtenir des mesures exactes d'angles, ne se rapportent évidemment qu'aux instruments destinés à donner une grande précision. En topographie, elles ne concernent guère que l'alidade et l'éclimètre; mais elles ont une grande importance pour les instruments employés en géodésie.

347-5. *Stadia.* Nous n'avons pas pu, au § 122, étudier la stadia avec tous les détails que comporte cet instrument. Reprenons-en l'étude en le supposant adapté à une lunette. Pour traiter la question telle qu'elle se présente en réalité, admettons que la lunette soit munie d'un oculaire négatif.

Une mire divisée AB (*fig.* 57, *planche* XXIII) donnerait une image réelle ab, si le premier verre de l'oculaire, qu'on nomme collecteur, ne recevait pas auparavant les rayons convergents, qu'il rend plus convergents encore, de manière à donner lieu à une autre image réelle $a'b'$. Au point même où se forme cette image $a'b'$, on place un réticule composé de deux fils parallèles; l'œil situé en O derrière le second verre de l'oculaire lit le nombre d'unités de l'image de la mire comprise entre les deux fils.

Supposons pour un moment cette image et le réticule superposés. En conservant les notations habituelles et en désignant par m l'intervalle qui sépare l'objectif du collecteur, on aura

$$ab = \frac{AB.f}{s}, \qquad a'b' = ab\frac{f'}{f-m} = AB\frac{ff'}{s(f-m)}$$

d'où

$$s = AB\frac{ff'}{a'b'(f-m)}$$

$a'b'$ écartement des deux fils est constant,

f' distance du réticule est constante, celui-ci et le collecteur étant invariablement fixés l'un à l'autre,

$f-m$ ou le s' du verre F', distance focale conjuguée de f' qui est constant, est également constante.

On pourra donc poser, comme conséquence de notre hypothèse de superposition du réticule et de la seconde image

$$\frac{f'}{a'b'(f-m)}=C$$

par suite

$$s=C.f.AB$$

Pour pouvoir se servir de la stadia, on est obligé de supposer la distance cherchée s proportionnelle à la portion AB interceptée sur la mire; et pourtant f est variable avec s lui-même, car on a

$$f=\frac{Fs}{s-F}$$

Mais la substitution de cette valeur de f conduit à

$$s=Cf.AB=C.AB.\frac{Fs}{s-F}$$

$$s-F=C.F.AB.$$

Si donc, dans l'expression vraie $s=f.C.AB$, on suppose $f=F$, on obtient $s-F$, en commettant sur s une erreur constante égale à F. On comprend alors qu'on pourra opérer comme si la constance de f existait réellement, et ajouter cette constante, ou même, pour être plus dans la vérité pratique, on pourra négliger cette quantité toujours petite par rapport aux erreurs inévitables de lecture, et surtout petite par rapport à l'incertitude réelle des points à déterminer topographiquement. Dans les cas importants, rien ne serait plus facile que d'ajouter cette constante. En résumé, on aura donc, en désignant par C' une constante,

$$\Sigma=s-F=C'.AB.$$

Pour que le premier coefficient C soit constant, il a été nécessaire d'établir la superposition exacte du réticule et de l'image $a'b'$. Rien n'est plus simple; il suffit d'imprimer à l'œil de petits déplacements autour de sa position moyenne; si la superposition existe, les deux images paraîtront fixes, l'une par rapport à l'autre; si elle n'existe pas, il se produira une sorte d'erreur de parallaxe qui les fera paraître mobiles.

Nous renvoyons au § 122 pour la graduation de la mire; nous nous contenterons d'indiquer le moyen de tirer parti d'une mire graduée précédemment pour un état du réticule changé en un autre où l'écartement des fils est différent.

On a comme précédemment

$$\Sigma = s - F = AB \frac{Ff'}{a'b'.(f-m)}$$

AB est une longueur de la mire renfermant un nombre n de divisions d'une amplitude inconnue α

$$\Sigma = n\,\alpha^{m} \frac{Ff'}{a'b'.(f-m)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dans le cas où la mire est repeinte à neuf, il suffit, par l'opération indiquée au § 122, de faire en sorte que $\Sigma = n^{m}$, ce qui revient à établir expérimentalement une valeur de α telle que

$$\alpha \frac{Ff'}{a'b'(f-m)} = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Dans le cas où l'on veut profiter de la graduation telle qu'elle existe, on arrive au même but, la résolution de l'équation (2), en agissant sur f' et par suite sur la distance conjuguée $f-m$, en laissant à α la valeur qui existait préalablement. Pour cela, il suffit de changer légèrement f' distance du réticule au collecteur. Par une suite de tâtonnements, on arrivera à avoir une lecture n répondant à une distance mesurée égale à n^{m}. L'équation (2) sera ainsi satisfaite pour un cas particulier, et, comme elle ne renferme que des constantes, elle sera toujours satisfaite. L'équation (1) sera réduite alors, dans tous les cas, à

$$\Sigma = s - F = n \text{ mètres},$$

et le nombre de mètres contenus dans la distance sera donné par le nombre d'unités contenues dans la lecture.

347-6. *Lunette anallatique de M. Porro. — Son application à la stadia.*

Nous avons dit plus haut que les distances obtenues avec la stadia devaient être augmentées toutes de la distance focale principale de l'objectif. La modification suivante apportée à la lunette astronomique, modification due à M. Porro, évite la nécessité de cette addition.

En désignant par α l'angle sous-tendu par l'objet AB et par son image *ab* (*fig.* 46, *planche* XXII), on a tang. $\frac{\alpha}{2} = \frac{ab}{2f}$;

et comme de $\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{s}$ on tire

$$f = \frac{Fs}{s - F} \quad \text{il vient} \quad \text{tang.}\ \frac{\alpha}{2} = \frac{ab\ (s - F)}{2.F\ s}$$

Cette expression prouve que l'angle α est variable avec la distance s de la mire à l'objectif.

M. Porro a d'abord imaginé de substituer à cet angle micrométrique variable α, un autre angle constant α' dont le sommet serait en P foyer principal antérieur de l'objectif O (*fig.* 49, *planche* XXII.)

Avant de trouver l'expression de α', il est nécessaire d'entrer dans quelques explications, sans lesquelles il pourrait rester du doute sur l'exactitude du procédé.

En réalité, la distance de l'image *ab* au foyer P n'est pas plus invariable que la distance à l'objectif O : ce n'est par conséquent pas l'angle *a*P*b* qui est constant, mais l'angle *m*P*m'*.

Quelle que soit la distance du micromètre au verre, les rayons *an*, *bn'* parallèles à l'axe optique convergeront vers le foyer principal P, après s'être brisés, l'un en *n* et *m*, l'autre en *n'* et *m'*, et l'angle *m*P*m'*, que nous désignons par α', sera toujours le même pour toute autre position *a'b'*, *a''b''* du micromètre ; α' et son opposé APB par le sommet sont donc constants.

Prenons les valeurs de α et α' dans les triangles qui ont AB pour côté commun ; nous trouverons, comme nous avons eu occasion de le faire ailleurs :

$$\text{tang.}\ \frac{\alpha'}{2} = \frac{AB}{2\ (s - F)} \qquad \text{tang.}\ \frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{2.s}$$

d'où

$$\text{tang.}\ \frac{\alpha'}{2} = \text{tang.}\ \frac{\alpha}{2}\ \frac{s}{(s - F)}$$

Substituant la valeur de tang. $\frac{\alpha}{2}$ trouvée plus haut,

$$\text{tang.}\ \frac{\alpha'}{2} = \frac{ab}{2F}.$$

On voit d'abord que cette expression, fonction de deux con-

stantes ab et F, est bien invariable elle-même; et l'on peut remarquer ensuite que c'est précisément la valeur de σ, lorsque ab se trouve au foyer principal de l'objectif. C'est ce qu'indique la figure dans laquelle $a''b''$ représente le micromètre et P' le foyer principal intérieur.

M. Porro, qui a désigné P sous le nom de *point anallatique* (*), trouvant que l'estimation d'une distance comptée d'un point immatériel situé en dehors de l'instrument n'était pas chose commode, imagina de rapporter la distance à un autre *point anallatique*, qui serait le centre de l'instrument.

Il plaça, à cet effet, auprès du diaphragme, une lentille convergente R (*fig.* 50, *planche* XXII), à une distance variable de ce diaphragme et fixe par rapport à l'objectif. Il n'est pas inutile de dire que l'ensemble des verres qui composent ordinairement l'objectif achromatique ne doit être considéré, dans ce qui va suivre, que comme une seule lentille.

Soient Q le foyer de R et C le centre de l'instrument.

Il faut que l'angle, dont le sommet est en C, reste constant.

D'après ce que nous avons vu tout à l'heure, par rapport à l'objectif O, les rayons parallèles, qui de ab viennent rencontrer R, se croisent en Q.

Il faut ensuite que C et Q soient foyers conjugués de l'objectif O et que l'expression de α'' soit indépendante de l'éloignement de la mire.

Désignons par

d l'écartement des verres O et R,
p celui de O et C,
q la distance focale de R,
F celle de O.

Entre tous les rayons lumineux émanant des points extrêmes A et B de la partie interceptée de la mire, il en est toujours un qui, avant de rencontrer l'objectif, se dirige sur C. Ces deux rayons, figurés par CA', et CB' sur la figure 50, sont réfractés vers Q, et la formule précisant la relation qui lie ces points est dans ce cas

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s}$$

(*) Du verbe grec ἀλλάσσω ou ἀλλάττω (*changer*), précédé de la préposition ἀν.

et, en y introduisant les notations ci-dessus indiquées,

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d-q} - \frac{1}{p} \quad (1)$$

d'où

$$\frac{1}{d-q} = \frac{1}{F} + \frac{1}{p} = \frac{p+F}{pF}$$

$$d-q = \frac{pF}{p+F} \quad \text{et} \quad q = d - \frac{pF}{p+F} \quad (2)$$

Les trois quantités d, p et F, une fois adoptées, la valeur de q s'en suit.

Quant à α'', nous allons le déduire de α', comme précédemment nous avons obtenu α' au moyen de α.

D'abord

$$\text{tang.}\,\frac{\alpha'}{2} = \frac{ab}{2q}$$

mais la figure 50 nous fait voir que

$$\text{tang.}\,\frac{\alpha''}{2} = \frac{A'B'}{2p} \qquad \text{tang.}\,\frac{\alpha'}{2} = \frac{A'B'}{2\,(d-q)}$$

$$\text{tang.}\,\frac{\alpha''}{2} = \text{tang.}\,\frac{\alpha'}{2}\,\frac{(d-q)}{p} = \frac{ab\,(d-q)}{2.p.q} \quad (3)$$

α'' est donc constant, comme on voulait qu'il le fût, puisque son amplitude dépend des quantités ab, d, p et q, indépendantes de la position de la mire.

Pour que la condition exprimée par la dernière formule soit réalisable, il faut qu'il existe certaines relations de grandeur entre les données du problème.

Ainsi, la formule (1) donne la valeur de F, qui doit toujours être positive : il faut donc nécessairement que $\frac{1}{d-q}$ soit plus grand que $\frac{1}{p}$; mais C étant placé vers le milieu de la lunette, p est sensiblement la moitié de d,

donc

$$\frac{1}{d-q} > \frac{2}{d}, \quad d > 2d - 2q, \quad 2q > 2d - d \text{ et } q > \frac{d}{2}$$

q ne peut même pas égaler $\frac{d}{2}$, car il en résulterait une double absurdité, il faudrait que F fût nul et que les deux foyers conjugués C et Q d'une lentille O se confondissent.

Nous allons indiquer, au moyen d'un exemple numérique, la marche des opérations :

Prenons $d = 0^m,4, \quad p = 0,2, \quad ab = 0^m,003, \quad F = 0,18$

$$q = d - \frac{pF}{p-F}. \quad pF = 0,036; \quad p+F = 0,38;$$

$$\frac{pF}{p+F} = 0,9474 \quad \text{et} \quad q = 0^m,30526$$

Ensuite
$$\text{tang.}\ \frac{\alpha''}{2} = \frac{ab\ (d-q)}{2pq}$$

$$d - q = 0^m,2\,; \quad ab\ (d-q) = 0,001\,; \quad 2pq = 0,122104$$

$$\text{tang.}\ \frac{\alpha''}{2} = \frac{0,001}{0,122} = 0,008$$

$$\log.\ 0,08 = 7.9030900 = \log.\ \text{tang.}\ 0^g,51 \quad \text{et} \quad \alpha'' = 1^g,02$$

Si enfin, nous désignons par x la grandeur des divisions de la mire qui doivent correspondre aux mètres en distance horizontale,

Nous avons $\frac{x}{2} : 1^m :: \text{tang.}0,51 : R$. d'où $\frac{x}{2} = 0,008.\ \frac{1^m}{R}$ et $x = 0^m,16$.

Si l'on voulait maintenant ramener le sommet de l'angle constant au centre optique de l'objectif, il faudrait, et cela se conçoit facilement, reprendre en considération les rayons qui, passant par le centre optique, ne subissent pas de réfraction, et de plus, le foyer principal Q de la lentille R devrait se confondre avec ce centre optique.

En faisant dans la formule (3) les modifications convenables, et qui sont $q = d$ et $p = o$, elle se réduirait à

$$\text{tang.}\ \frac{\alpha''}{2} = \frac{ab}{2q}.$$

Pour que le point anallatique soit au foyer antérieur de O, nous avons trouvé

$$\text{tang.}\ \frac{\alpha'}{2} = \frac{ab}{2F}.$$

Ces deux expressions ne diffèrent que par les dénominateurs; celui-ci contient la distance focale principale de l'objectif; l'autre renferme celle de la lentille R qui est en même temps l'écartement des deux verres.

En appliquant à ces deux circonstances les données de l'exemple ci-dessus, nous trouvons que $\alpha' = 1^g,6666$ et $\alpha'' = 1^g,0440$,
d'où, pour le premier cas. . . . . $x = 0^m,0178^{mm}$
et pour le second. . . . . $x = 0^m,0164^{mm}$

Au point Q, foyer de R, il est bien de placer un diaphragme d'une ouverture convenable, afin de centrer les faisceaux lumineux par rapport au rayon anallatique qui doit leur servir d'axe.

Par le procédé que nous venons de décrire, le degré d'exactitude qu'on peut obtenir dans l'évaluation des distances, au moyen de la stadia, est considérablement augmenté : mais il est bon d'observer qu'il n'est pas proportionnel à la puissance des lunettes.

Et, en effet, à égalité de diamètre du verre, plus le grossissement est considérable, plus le champ doit être circonscrit et plus rapprochés doivent être les fils du micromètre. La portion de la mire, comprise dans les rayons visuels extrêmes qui s'appuient sur les fils du réticule, est d'autant plus restreinte. Pour évaluer les mêmes distances, les divisions doivent être plus serrées et l'on perd de ce côté ce que l'on gagne par le fait du plus grand grossissement. Tout l'avantage se réduit à pouvoir se servir d'une mire moins longue.

Pour obtenir plus d'exactitude, ou plutôt pour que chaque lecture se contrôle immédiatement elle-même, M. Porro a modifié la disposition des fils, ainsi qu'il va être dit.

On sait que outre les deux fils qui se coupent à angle droit, le micromètre porte habituellement deux autres fils parallèles au fil horizontal et séparés de lui d'une même quantité. Cela produit l'effet indiqué par les lignes 1, 2 et 3 (*fig.* 51, *planche* XXII). A ce dernier on substitue deux autres fils 4 et 5, dont l'écartement est le cinquième de celui de 1 et 3. Désignons par mm' cette dernière qui, dans l'opération, fait connaître le nombre de mètres de la distance à mesurer, par le nombre de divisions qu'elle renferme.

MM' est évidemment égal à la demi-somme des intervalles compris entre le fil 1 et les fils 4 et 5.

Désignons en général les lectures faites sur 1, 2, 4 et 5, par a, b, c, d.

a sera nul lorsqu'on pourra diriger le fil 1 sur le zéro de la mire.

ainsi $$mm' = \frac{d+c-2a}{2} = \frac{d+c}{2} - a$$

et si $a = o$ $$mm' = \frac{d+c}{2}$$

Si l'on soustrait ensuite les lectures c et d l'une de l'autre, elles

devront donner le cinquième de mm' en raison de la construction énoncée plns haut.

alors $$d - c = \frac{1}{5} mm' = \frac{1}{10} (d + c - 2a)$$

et $$d - c = \frac{1}{10} (d + c) \quad \text{lorsque } a = o.$$

Quand les calculs numériques sont d'accord avec ce qui précède, on est certain d'avoir opéré exactement.

Indiquons, par quelques exemples, les diverses circonstances qui peuvent se présenter dans la pratique :

Premier cas. On fait coïncider le fil 1 avec le zéro de la mire.

$$a = o, \quad c = 49^m,95. \quad d = 61,05$$
$$c + d = 111^m, \quad d - c = 11^m,1$$

Deuxième cas. Le zéro n'étant pas visible, le fil 1 est placé sur une division.

$$a = 15, \quad c = 62^m,25, \quad d = 72,75$$
$$c + d - 2a = 105,00; \quad d - c = 10,50$$

Troisième cas. Si la mire n'est pas assez longue pour intercepter tout l'intervalle dn fil 1 an fil 5, on se sert subsidiairement du fil 2.

Ainsi les fils 1 et 2 donnent sur deux nombres que l'on recueille : puis on fait varier un peu l'inclinaison de la lunette, jusqu'à ce que le fil 2 occupe la position qu'avait d'abord le fil 1.

Pour la première opération, on a $\frac{1}{2}\, mm' = b - a$; dans la deuxième, puisque le fil 2 marque a à son tour, on a

$$\frac{1}{2}\, mm' = \frac{d + c}{2} - a, \text{ donc } mm' = b + \frac{d + c}{2} - \frac{4}{a}.$$

1°. $\quad a = 10 \quad$ et $\quad b = 90.\ 8$

2°. $\quad a = 10, \quad c = 74,64, \quad d = 106.\ 96$

Il faut toujours qne $d - c = \dfrac{2b + d + c - 4a}{10}$, c'est-à-dire le dixième du double de mm'.

$$\begin{aligned} +2b &= 181.6 \\ +c + d &= 181.6 \\ -4a &= -40 \\ \hline 2\,mm &= 323.2 \end{aligned} \quad \text{et} \quad d - c = 32,32.$$

Quatrième cas. Si, enfin, la distance qu'il importe de connaître est très-grande, on peut ne se servir que des fils 4 et 5 et multiplier le résultat par 5.

on a $\quad c = o \quad mm' = 5d$

si $\quad d = 82^m,50, \quad mm' = 412,51.$

Avant les exemples numériques qui précèdent, nous disions pourquoi le degré d'approximation n'est pas proportionnel au pouvoir amplifiant des lunettes.

M. Porro, pour obtenir à la fois l'avantage du grossissement et celui que produit la plus grande amplitude de l'angle micrométrique, a adapté un petit oculaire devant chacun des trois fils horizontaux. Ce sont trois lentilles de *crown* incrustées dans un plus grand verre en *flint* (*fig.* 52, *planche* XXII).

Chacun d'eux grossit considérablement la partie de la mire sur laquelle il est dirigé.

Pour voir simultanément dans les trois, ce qui n'est d'ailleurs pas nécessaire, il faudrait éloigner suffisamment l'œil (*fig.* 53, *planche* XXII), et, par conséquent, se placer dans une circonstance moins favorable, puisque l'organe de la vue, recueillant une plus faible partie de chacun des faisceaux lumineux, serait moins vivement impressionné.

On regarde donc successivement dans les deux oculaires extrêmes ou dans les trois, s'il y a lieu. Chacune des parties correspondant aux fils que nous désignions plus haut par les chiffres 1, 2, 3 ou par 1, 2, 4 et 5, sera donc très-amplifiée et produira l'effet que présente la figure 54, planche XXII.

M. Porro étant parvenu à vaincre la grande difficulté qui consiste à placer très-exactement les fils des micromètres à des écartements calculés d'avance, en a, depuis peu, multiplié le nombre jusqu'à sept, qu'il établit devant les trois oculaires déjà mentionnés (*fig.* 52, *planche* XXII). *a, b, c, d, e, f, g* représentent les divisions de la mire, comptées à partir de zéro et correspondant aux sept fils.

L'écartement de ces fils est calculé de telle sorte que *d* étant sur la division 50, à une distance de 100^m,

$$a = 22{,}50;\quad b = 27{,}50;\quad c = 45;\quad e = 55;\quad f = 72{,}50 \quad \text{et} \quad g = 77{,}50.$$

Disons enfin que, pour donner plus de perfection encore à sa lunette, M. Porro se sert, pour tous les instruments dont on attend une grande précision, de l'oculaire de *Ramsden* au lieu d'un oculaire simple.

Dans l'un et l'autre cas, l'écartement des fils est toujours exactement dans le même rapport avec les divisions tracées sur la mire : car l'angle *anallatique* est constant, et celui sous lequel l'œil voit l'objet ne l'est pas moins, quelles que soient d'ailleurs la distance de la mire et la vue de l'observateur.

Pour bien faire comprendre tout le parti qu'on peut tirer des fils disposés comme nous l'avons dit précédemment, il convient de rappeler comment est appréciée la distance cherchée, réduite à l'horizon.

O représente le sommet de l'angle *anallatique* α (*fig.* 55, *planche* XXII); M M'' la portion de la mire comprise dans α ; δ est la distance zénithale moyenne entre δ' et δ'', qui sont celles des côtés de l'angle constant.

on a $$OM' = M'M'' \frac{\sin.\delta''}{\sin.(\delta' - \delta'')}, \quad OP = OM' \sin.\delta'.$$

d'où la distance horizontale K ou $OP = M'M' \dfrac{\sin.\delta'.\ \sin.\delta''}{\sin.\alpha}$

δ' et δ'' diffèrent trop peu de δ pour qu'on ne puisse pas substituer $\sin.^2\delta$ à $\sin.\delta'.\ \sin.\delta'$.

D'autre part, si au lieu de diviser chaque fois M'M', qui est un certain nombre de mètres ou de fractions de mètre, par $\sin.\alpha$, on fait les divisions de la mire égales chacune à $\dfrac{1^m}{\sin.\alpha}$.

on aura $$K \text{ ou } OP = n^{div}.\ \sin.^2\delta$$

Si l'on veut aussi déduire de l'observation la différence de niveau PM' ou DN, on voit que $dN = K \cot.\delta - \dfrac{M'M''}{2}$.

Ici, c'est la longueur réelle de M' M'' et non le nombre de divisions.

Appliquons maintenant ces formules en faisant usage des trois oculaires :

1° Si la distance à mesurer n'excède pas 200^m, on place le fil d sur 50, puis on lit a, b, f et g sur les fils n°s 1, 2, 6 et 7.

Évidemment, ce que nous représentons par M' M'' ou par n^{div} $= 2[(f+g) - (a+b)]$; par conséquent $K = 2[(f+g) - (a+b)] \sin.^2\delta$.

et $$dN = K.\cot.\delta - \frac{M'M''}{2}.$$

Nous avons indiqué un moyen de vérification, lorsque nous supposions quatre fils n°s 1, 2, 4 et 5 : ces deux derniers remplaçant un autre fil n° 3 et espacés entre eux de la cinquième partie de l'intervalle qui sépare 1 de 3.

Cette épreuve, nous pouvons également la faire dans la nouvelle disposition des fils. Leur écartement est tel, qu'à 100 mètres, et sur un terrain horizontal, les intervalles entre 1 et 2, ainsi qu'entre 6 et 7, sont chacun le vingtième de celui qui existerait

entre les fils situés à égale distance de 1 et 2 d'une part, de 6 et 7 de l'autre.

Celui-ci est exprimé par $(g-a)+(f-b)$;

on a donc $g-f=b-a=\frac{1}{10}[(g-a)+(f-b)]$

et par suite $(g-a)-(f-b)=\frac{1}{10}[(g-a)+(f-b)]$

Si les lectures satisfont à cette équation, il n'y a pas eu d'erreur et l'on connaît exactement la distance de la lunette à la mire.

2° Si quelqu'obstacle empêche de poser le fil d sur la division 50, on le place sur un tout autre chiffre qu'on peut lire ou qui se conclut des autres lectures en raison de ce que

$$d=\frac{1}{4}(a+b+f+g)$$

3° La distance devenant plus grande que 200ᵐ et moindre que 400, on subdivise l'opération en plaçant d'abord le fil d sur un chiffre quelconque de la partie supérieure de la mire, puis on lit a, b, et l'on observe la distance zénithale Δ' de OM : on ramène ensuite le fil d vers le bas de la mire, on lit f et g, puis on prend la nouvelle distance zénithale Δ'' de OM.

Pour réduire à l'horizon la longueur trouvée, on se sert de $\Delta=\frac{\Delta'+\Delta''}{2}$, et l'on ajoute aux lectures a, b, f, g, la quantité dont le fil moyen d a été déplacé pour passer de la première à la deuxième observation.

4° Lorsqu'enfin, la distance est plus grande que 400ᵐ, on la lit avec l'oculaire du milieu seul et au moyen de c, d, e, comme pour les stadias qui ont un oculaire unique.

LIVRE V.

GÉODÉSIE.

CHAPITRE PREMIER.

ENSEMBLE DES OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES.

348. On a vu en topographie que, pour arriver à la description exacte d'une portion de la terre, on projetait tous ses points sur la surface sphérique des eaux moyennes de la mer, et que l'on calculait leurs ordonnées verticales. On a vu aussi que, pour arriver à la connaissance des projections des différents points, on les supposait unis par des droites formant ainsi un réseau de triangles que l'on résolvait graphiquement. Cette marche est suffisamment exacte lorsqu'on s'occupe d'une portion de terrain de médiocre étendue : mais, quand il s'agit d'une très-grande surface, les points ne peuvent plus être considérés comme unis par des droites : ils le sont réellement par des arcs de grands cercles, et les triangles sont sphériques. Ces triangles devenant d'ailleurs très-nombreux, si l'on procédait, en partant d'un point, du détail à la masse, l'accumulation successive et inévitable des erreurs se ferait sentir à mesure que l'on s'éloignerait du point de départ des opérations, et l'on n'aurait aucun moyen de vérification. Si, au contraire, les principaux points du terrain à représenter sont fixés d'avance et leurs positions rigoureusement déterminées sur le globe, les détails qui s'y rattacheront seront susceptibles à chaque instant d'être corrigés des erreurs que l'on ne peut éviter, toutes les fois que l'on substitue les constructions graphiques au calcul.

349. La détermination de ces points principaux et le calcul des arcs qui les unissent sont du ressort de la géodosie. L'ensemble des triangles que l'on imagine lier les points fondamentaux, est ce que l'on appelle le canevas géodésique, et l'on nomme opérations géodésiques toutes celles qui sont nécessaires à la confection du canevas.

Chaque point sera déterminé par trois coordonnées : deux serviront à la projection sur la sphère, et la troisième indiquera son élévation au-dessus de cette surface.

Les coordonnées de la projection se rapportent à l'équateur et au méridien principal, et se nomment latitude et longitude. La latitude d'un point est l'angle formé par sa verticale avec le plan de l'équateur. Sa longitude est l'angle compris entre son méridien et un autre choisi pour origine. On appelle méridien d'un point le plan qui contient la verticale de ce point et qui est parallèle à la ligne des pôles. Quand on considère la terre comme une surface de révolution, le méridien passe par la ligne des pôles et il est commun à tous les points de la section terrestre correspondante, car il renferme toutes leurs verticales.

350. Les opérations à faire sur le terrain consistent à,

1° Mesurer un côté de triangle auquel on donne le nom de base;

2° Mesurer les angles;

3° Observer astronomiquement la latitude et la longitude d'un point au moins;

4° Observer l'azimut d'un côté, c'est-à-dire l'angle que fait ce côté, avec le méridien de l'une de ses extrémités. Cet azimut sert, entre autres choses, à orienter le canevas;

5° Enfin, faire le nivellement trigonométrique qui donnera les côtes des sommets de triangles.

On verra par quelles méthodes on passe des latitude et longitude d'un point, au moyen des angles et des côtés de triangles, aux latitudes et longitudes de tous les autres points, ainsi qu'aux azimuts des côtés.

351. Lorsqu'on voudra ensuite construire la carte, au moyen des coordonnées obtenues, il faudra, comme la terre n'est pas une surface développable, faire usage d'un système de projection, celui de Cassini, celui de Flamsteed modifié, ou tout autre.

352. On ne passe pas immédiatement de la construction du grand canevas géodésique à la levée du détail : car les points seraient trop éloignés et souvent trop inégalement répartis, en raison des difficultés qu'a pu offrir le terrain, pour qu'il s'en trouvât un nombre suffisant dans chacun des rectangles en lesquels on a partagé la carte, pour procéder aux travaux topographiques. De là naît la division des opérations géodésiques en premier, deuxième et troisième ordres.

Le premier ordre s'occupe de couvrir la surface du terrain au moyen de triangles aussi grands que le permettent la force et la précision des instruments d'une part, et la nature du pays de l'autre.

La triangulation du second ordre, s'appuyant sur les côtés des grands triangles comme bases, les divise en plus petits dont les sommets servent de stations, et desquels on observe tous les points remarquables qui pourront servir à rattacher les détails topographiques.

Ces derniers sont les points du troisième ordre : ils se déterminent par des triangles dans lesquels on n'observe que deux angles, et l'on conclut le troisième. Pour cette raison, il est indispensable qu'ils soient calculés sur deux bases, c'est-à-dire que chacun d'eux soit le sommet de deux triangles ayant un côté commun.

Tel est l'ensemble des opérations que nécessite la construction d'une carte : on les traitera chacune en particulier, en indiquant les instruments à employer, les corrections dont ils sont susceptibles et les précautions que l'on doit prendre, enfin les calculs à faire.

353. Avant d'entrer en matière, il est bon peut-être de passer en revue de nouveau et avec plus de détails, les différentes parties que nous venons seulement d'indiquer.

La première chose à faire est de parcourir le terrain que l'on doit trianguler.

Le but de cette reconnaissance est de trouver un nombre de stations suffisant pour déterminer tous les points de troisième ordre, si l'on s'occupe de la triangulation de détail. Il faut faire en sorte que ce nombre soit le plus petit possible. Si, cependant, on opérait dans un pays de plaine et très-découvert, il ne faudrait pas abuser de cette faculté d'en voir toute l'étendue de quelques stations seulement, parce qu'alors le temps, que l'on aurait cru gagner d'un côté, serait perdu, et peut-être plus encore, à chercher des points très-peu visibles, en raison de leur grand éloignement.

354. Il est nécessaire d'avoir, pendant la reconnaissance, un instrument tel qu'un sextant, une boussole, un cercle à réflexion, etc., afin de pouvoir construire un premier canevas provisoire.

355. Pour la triangulation du premier et du second ordre, on

fait construire des signaux aux endroits que l'on a adoptés comme points de station.

Les signaux du premier ordre forment observatoire, quand on ne peut observer du sol, et sont plus ou moins hauts, suivant les obstacles qu'il faut franchir. Quoique la forme à leur donner ne soit pas absolue, il semble bon d'indiquer ici celle qui, paraissant la meilleure, a été adoptée pour les opérations de la nouvelle carte de la France.

Ils se composent d'un observatoire ou petite chambre soutenue en l'air par quatre arêtiers. Les faces sont percées de fenêtres qui se ferment à volonté au moyen de volets. Le toit a la forme d'une pyramide quadrangulaire, au sommet de laquelle s'élève un poinçon supportant une autre petite pyramide renversée, à claire-voie, pour donner moins de prise au vent. Au centre, sous le signal, on place une borne destinée à faire retrouver postérieurement l'emplacement où a été érigé ce signal. On a, en outre, la précaution de placer par-dessous du charbon, parce qu'il jouit de la propriété d'être incorruptible. La figure 274 présente le plan et l'élévation d'un de ces signaux.

Dans la triangulation secondaire, on ne choisit pour stations que des édifices tels que tours, clochers, etc., ou des points du sol desquels on puisse observer.

Dans ce cas, le signal consiste en un poteau planté en terre et surmonté de deux faces rectangulaires en bois (*fig.* 275), à claire-voie, et d'un mètre environ de côté. Quelquefois le poteau (*fig.* 277) est composé de deux pièces qui forment charnière à peu de distance du sol. Quand le signal est debout, il est maintenu par deux boulons, et l'on en retire un lorsqu'on veut l'abaisser. Cette modification a pour but de pouvoir, lorsqu'on observe les angles, placer l'instrument au centre de la station et éviter par là une réduction dont nous aurons à parler plus tard. Quelquefois, dans le premier ordre surtout, la grande difficulté, voire même l'impossibilité de faire parvenir les pièces de bois, fait employer des signaux en maçonnerie ou construits en pierres sèches. Leur forme est ordinairement un cône tronqué (*fig.* 276) surmonté d'un cylindre de plus petit diamètre. Ce dernier supporte l'instrument, et l'observateur se tient sur la portion de la base supérieure du cône qui déborde le cylindre. On emploie de préférence, lorsqu'il y a lieu, les monuments tels que tours, clochers, etc., tant à cause de leur solidité, que par raison d'économie. Les signaux permettent généralement de mieux prendre les éléments de ré-

duction, et par conséquent les triangles ferment mieux ; mais ils sont généralement plus loin des habitations, et les transports deviennent plus longs et plus coûteux. Les flèches trop aiguës sont quelquefois de mauvais points de mire pour les distances zénithales, parce que leurs extrémités disparaissent d'autant plus, que les côtés de triangles sont plus longs.

Les signaux doivent être peints en blanc ou en noir suivant qu'ils se projettent sur le terrain ou sur le ciel : ils sont plus constamment favorables dans ce dernier cas. On fait donc en sorte qu'il en soit ainsi ; cependant, comme ils ne peuvent pas toujours satisfaire à cette condition, il est bon de s'assurer de ce qui aura lieu lorsque le signal sera érigé, afin de le faire couvrir de la couleur convenable.

356. Soient donc A et B (*fig.* 278), deux points choisis comme sommets de triangles. On est en A, et sans retourner en B, on veut savoir sous quel aspect on verra le signal A de ce point. On prend la distance zénithale de B, et celle du point C de l'horizon, opposé à B et situé dans le plan vertical qui passe par A et B. Si leur somme est plus petite que 200^g, le point A se projettera en terre pour l'observateur placé en B : le contraire aura lieu si la somme est plus grande que 200^g. On peut encore calculer la hauteur qu'il faudrait donner au signal A : cependant, dans le cas où les observations ne doivent pas être faites du sol, mais dans un observatoire placé en haut du signal, il faut s'assurer avant, que cet accroissement de hauteur, en diminuant la difficulté pour le point B, n'augmentera pas celles que l'on doit éprouver en A, qui plus élevé, pourrait alors voir projetés en terre d'autres signaux qui, sans cette modification, se seraient détachés sur le ciel.

357. Pour donner une idée de la marche à suivre, prenons un exemple : on connait approximativement, par le canevas provisoire, les distances AB, AC. Supposons que $AB = 25{,}000^m$ et $AC = 32{,}000$, $BAZ = 97^g{,}50$; $CAZ = 99^g{,}20$, d'où $BAC = 196{,}70$. On peut résoudre le triangle BAC dans lequel on connait deux côtés et l'angle compris. La formule 60, § 33 de trigonométrie rectiligne donne le moyen de trouver les angles B et C dont on connait la somme.

On a donc

$$\begin{array}{ll} \text{log. cotang.} \tfrac{1}{2} A & = 8\ 4137 \\ \text{log. } (b - c) & = 3.8451 \\ \text{C}^{t}\text{. log. } (b + c) & = 5.2441 \\ \hline \text{log. tang.} \tfrac{1}{2} (B - C & = 7.5029 \end{array}$$

Donc $\frac{1}{2}$ (B — C) = $0^g,2150'$ et par suite B = $1^g,8550''$, C = $1^g,4450$.

Actuellement, l'un ou l'autre des triangles AEB, ACE, dans chacun desquels on connaît un côté et les deux angles adjacents, peut donner la hauteur AE que devrait avoir au moins le signal. Calculons les deux pour qu'il y ait vérification.

Dans AEB, l'angle E = 200 — (A + B) = $100^g,6450$.

log. sin. B (ou $1^g.8550''$)	= 4.4644
log. 25000	= 4.3979
C^t. log. sin. E (ou 100,6450)	= 0.0000
	2.8623

Dans AEC, l'angle en E est égal à 200 — (A + C) = $99^g,3550$.

et log. sin. (C ou $1^g.4450''$)	= 8.3559
log. 32000	= 4.5051
C^t. log. sin. (E ou $99^g.3550$)	= 0.0000
	2.8640

Ce logarithme correspond au nombre 726. On voit que, dans ce cas, il ne faudrait pas songer à l'érection d'un signal qui pût se projeter sur le ciel : on le ferait donc peindre en blanc.

358. S'il s'agit de calculer d'avance la hauteur qu'il faudrait donner à un signal BB′ élevé en B (*fig.* 58, *planche* XXIII), pour qu'il fût visible de la station A par-dessus un obstacle C, on observerait, en B et en A, les distances zénithales de ce point C.

L'angle BB′C serait égal à CAZ, comme alternes internes, si les verticales de A et B pouvaient être considérées comme parallèles ; mais le premier sera plus petit que le second, de la convergence des verticales. Or, comme on suppose que l'on a d'avance construit un canevas provisoire, on peut dire que l'on connaît approximativement les distances de B à A et aussi à C. La longueur du côté AB convertie en secondes, à raison de 10^m pour $1''$, donne la quantité angulaire qu'il faut retrancher de Δ pour avoir l'angle BB′C. On connaît un second angle Δ' du triangle BB′C et encore le côté BC ; on peut donc, en le résolvant, trouver la hauteur BB′ que doit dépasser le signal, pour que son sommet soit visible de A.

Exemple : soit

AB = 12345^m.
BC = 3960
$\Delta = 101^g,2530''$
$\Delta = 98^g,2040''$.

La convergence des verticales est donc $0^g,1234'',5$

Par suite, $BB'C = 101,1295,\ 5$

et $BCB' = 0,6664,\ 5$

log. 3960^m	$= 3,5976952$
log. sin. $0^g.6664'',5$	$= 8,0198683$
C^t. log. sin $101,1295,5$	$= 0,0000683$
log. BB′	$= 1,6176318$
BB′	$= 41^m,46$

Cette opération démontre qu'on ne doit pas songer à relier directement les points A et B, puisqu'il faudrait donner au signal une hauteur inadmissible en raison de la dépense considérable qu'entraînerait sa construction.

359. Si l'on ne part pas d'une base connue, il faut en déterminer une, et cette opération exige des instruments et des calculs dont nous parlerons, lorsque nous aurons sommairement passé en revne toutes les autres opérations.

360. *Mesure des angles.* Pour l'obtenir avec la plus grande précision, on se sert d'instruments répétiteurs. Les uns donnent les angles dans le plan des objets : tel est le cercle répétiteur.

361. *Réduction à l'horizon.* L'emploi du cercle entraîne la nécessité de cette correction, pour ramener les angles observés à l'expression de l'inclinaison, les uns sur les autres, des plans verticaux passant par les objets deux à deux. Un autre instrument, le théodolite, évite cette réduction ; il fournit immédiatement la mesure des angles dièdres, ou la projection à l'horizon des angles qne forment les objets.

362. *Réduction au centre de la station.* Les angles ne peuvent pas toujonrs être observés au centre de la station : de là, une nouvelle réduction à leur faire subir.

363. *Correction de phase.* Les signaux sur lesquels on pointe, ponvant présenter différentes phases, suivant la position dn soleil, le rayon visuel ne passe pas toujours par l'axe du signal. La correction qui serait la conséquence de ce fait s'effectue très-rarement.

364. *Calcul des côtés.* Les angles observés appartiennent à des triangles sphériques. En faisant leur somme, elle dépasse 200^g de ce qu'on nomme l'excès sphérique combiné toutefois avec les erreurs d'observation. On retranche de chaque angle le tiers de cet excès, et l'on a trois nonveaux angles qui appartiennent à

un triangle rectiligne qui, comme le démontre un théorème de Legendre, a les côtés égaux en longueur à ceux du triangle sphérique. Ceci n'est vrai que pour les triangles dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère; et ceux tracés sur la terre sont dans ce cas.

Dans cet état de choses, on résout au moyen des formules de la trigonométrie rectiligne, et l'on connaît ainsi les côtés des triangles.

365. Au moyen des distances zénithales qui ont été observées à la suite des angles horizontaux, on calcule les différences de niveau.

366. *Latitudes et longitudes.* Nous avons dit qu'en connaissant un premier azimut, une première latitude et une première longitude, on calculait les latitudes et longitudes de tous les autres points : nous aurons à nous occuper de la recherche des formules qui résolvent ces problèmes.

367. Il est indispensable, pour avoir une entière confiance dans le résultat des opérations, si la contrée que l'on triangule a une grande étendue, de mesurer plusieurs bases et d'observer plusieurs azimuts, latitudes et longitudes. Les résultats obtenus par l'enchaînement des triangles devront coïncider avec ceux qui donneront les opérations directes.

Ces vérifications indispensables ne sont pourtant pas concluantes. La concordance des bases calculées et mesurées peut provenir de compensations qui auront toujours lieu, partiellement du moins, entre les erreurs commises sur les côtés intermédiaires. Observons pourtant que plus le nombre de ces vérifications aura été grand, plus il y aura de chances pour que ces concordances proviennent, non plus seulement des compensations, mais de l'exactitude des opérations elles-mêmes.

La vérification provenant de la similitude des latitude, longitude et azimuts calculés et observés peut rarement conduire à des résultats satisfaisants, pour deux causes :

1° La détermination astronomique d'une latitude ou d'une longitude ne peut pas se faire à moins d'une ou deux secondes, ce qui répond, en latitude du moins, à 10 ou 20 mètres environ;

2° La latitude ou la longitude calculées sont une conséquence de la figure adoptée pour la surface terrestre, figure qui influe sur les formules employées. La discordance, dans les résultats du calcul et dans ceux de l'observation, peut donc provenir, soit

des erreurs commises dans l'exécution du canevas géodésique, soit d'une déformation locale de la figure terrestre.

368. Malgré tous les soins employés pour la mesure des angles, ceux-ci seront entachés d'erreurs inévitables. Ces erreurs n'auront pas toujours la même influence sur la longueur des côtés, quelle que soit la forme des triangles employés. Il est donc avantageux de se rapprocher de la forme qui, avec les mêmes erreurs angulaires, donnera le minimum d'erreur sur les côtés; cherchons cette forme particulière.

Nous verrons plus tard qu'on substitue à la résolution du triangle sphérique dont on connaît un côté b et dont on a mesuré les trois angles, la résolution d'un triangle rectiligne ayant même longueur de côtés et dont les angles sont des fonctions très-simples de ceux du triangle sphérique.

Soient A,B,C les éléments du triangle plan substitué, tels qu'ils auraient été si l'on n'avait pas commis des erreurs d'observations.

Soient $A+\alpha$, $B+\beta$, $C+\gamma$, les mêmes éléments réellement employés; les erreurs angulaires α,β,γ sont des fonctions des erreurs d'observations.

La résolution du triangle vrai b,A,B,C, conduirait

$$a=\frac{b\sin.A}{\sin.B}$$

Celles du triangle faux donnera, en désignant par da l'erreur qui résultera sur le côté a,

$$a+da=\frac{b\sin.(A+\alpha)}{\sin.(B+\beta)}$$

De ces deux équations, on tire facilement

$$da=b\left(\frac{\sin.(A+\alpha)}{\sin.(B+\beta)}-\frac{\sin.A}{\sin.B}\right)$$

$$=\frac{b}{\sin.B\sin.(B+\beta)}(\alpha\cos.A.\sin.B-\beta\sin.A\cos.B)$$

en observant que α et β sont toujours assez petits pour que, dans les développements en séries de leurs lignes trigonométriques, on puisse se borner à prendre les premiers termes seulement.

Les angles B et $B+\beta$ différant très-peu, on peut confondre leurs sinus, et l'on aura

$$da=b\left(\frac{\alpha\cos.A}{\sin.B}-\frac{\beta\sin.A}{\sin B}\cot.B\right)$$

mais $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$; donc $da = \frac{a \sin . B}{\sin . A} \left(\alpha \frac{\cos . A}{\sin . B} - \beta \frac{\sin . A}{\sin . B} \cot . B \right)$

$$da = a\,(\alpha \cot . A - \beta \cot . B)$$

On aurait de même, pour le troisième côté,

$$dc = c\,(\gamma \cot . C - \beta \cot . B)$$

La forme pour laquelle les erreurs *da* et *dc* seraient minima est évidemment celle qui rendrait les deux seconds membres nuls. Mais ces seconds membres sont fonction des erreurs angulaires α, β, γ, qui ne sont connues ni en grandeur ni en signes. Diverses hypothèses faites sur ces variables conduiraient à des formes de triangles favorables pour les cas examinés, mais défavorables pour les autres, et, comme on ne connaît aucunement le cas dans lequel se trouvera le triangle employé, il nous semble inutile de rechercher ce qu'on devrait faire dans une circonstance qui sera toujours inconnue.

La seule relation $\alpha + \beta + \gamma = o$ (puisqu'il s'agit de triangles rectilignes A,B,C et $A + \alpha$, $B + \beta$, $C + \gamma$) ne précisant pas les valeurs relatives de ces variables, il nous semble rationnel de chercher à diminuer les erreurs linéaires *da* et *dc*, en diminuant les termes dont elles se composent, ce qui conduit aux conséquences suivantes :

a petit ou A petit, A proche de 100^g, B proche de 100^g,
c *id.* C *id.*, C *id.*, B *id.*

Mettant de côté celles de ces conditions qui sont contraires les unes aux autres, il ne reste que B proche de 100^g, qui, joint à la similitude des rôles joués par A et C, conduit à cette conséquence, que la forme la plus avantageuse généralement à donner aux triangles rectilignes substitués aux triangles géodésiques est celle du triangle isocèle rectangle.

Dans la pratique, on se contente d'exclure les angles qui donneraient trop d'importance aux facteurs cot. A, cot. B, cot. C, c'est-à-dire ceux qui seraient trop petits ou trop rapprochés de 200^g. On n'emploie pas d'angles plus petits que 20^g ou plus grands que 180^g.

La base dont on part, pour y attacher une chaîne de triangles, est toujours plus petite que la longueur moyenne qu'il convient d'adopter pour les côtés de triangles. Cela s'explique par la difficulté de trouver un terrain favorable d'une étendue suffisante, et aussi en raison du temps considérable et de la fatigue extrême

que nécessite la mesure d'une base. Il faut donc faire croître successivement la longueur des côtés, et cela ne peut avoir lieu qu'autant que B est aigu. Si l'on employait une succession de triangles équilatéraux, les côtés resteraient toujours de même longueur que la base *b*. Si l'angle B était droit, *a* et *c* seraient plus petits que *b*. Les côtés qui s'appuieraient sur *a* et *c* seraient, par le même motif, plus petits qu'eux, et ainsi de suite. On arriverait donc bientôt à des proportions inadmissibles.

Reconnaissons cependant, par rapport aux triangles équilatéraux, qu'une fois arrivé à la dimension moyenne des côtés, on a un double motif pour les employer. D'une part, les côtés restent dans les dimensions jugées convenables, et de l'autre, comme de tous les triangles ayant même périmètre l'équilatéral est celui dont la surface est la plus grande, il s'ensuit, et c'est un avantage, qu'on parvient à couvrir le terrain avec un moins grand nombre de triangles.

370. Terminons en disant que, dans les grandes opérations géodésiques, telles que celles relatives à la nouvelle carte de la France, on ne s'est pas contenté de la mesure d'une seule base. Dans ce cas (*fig.* 279), l'une étant la base de départ, les autres sont des bases de vérification, sur lesquelles viennent aboutir les réseaux de triangles. Pour celles-ci, il faut, par une marche contraire et pour le motif énoncé plus haut, diminuer successivement les côtés de triangles. C'est alors qu'il y a lieu d'employer une succession plus ou moins grande de triangles isocèles rectangles qui, au moyen d'un côté connu, en déterminent deux plus petits que lui.

371. L'inexactitude d'un côté serait d'une conséquence beaucoup plus grave, et, en effet, en admettant que les angles A et B soient exacts et, si au lieu de *b* on a trouvé $b+db$, on aura

$$(a+da)\sin.B=(b+db)\sin.A.$$

d'où

$$a\sin.B+da.\sin.B=b\sin.A+db.\sin.A$$

et

$$da=d.b\,\frac{\sin.A}{\sin.B}$$

Dans le cas le plus favorable, celui où $A=B$, on aura $da=db$. Si $B<A$, alors $da>db$.

Nous tirons de là cette conséquence, qu'il ne faut pas prendre une base *b* trop courte ou qu'il ne faut pas faire croître trop ra-

pidement les côtés des triangles, puisque alors $A > B$ donnerait $da > db$, et, qu'ainsi, les erreurs iraient toujours croissant.

372. Voyons enfin ce qui arriverait si les angles et la base contenaient quelques erreurs

$$(a+da)\sin.(B+\beta)=(b+db)\sin.(A+\alpha)$$

$$(a+da)(\sin.B+\beta\cos.B)=(b+db)(\sin.A+\alpha\cos.A)$$

en négligeant le produit des petites quantités telles que da et β, on arrive à

$$a\sin B+a\beta\cos.B+da\sin.B=b\sin.A+b\alpha\cos.A+db\sin.A$$

$$da=\frac{db\sin A}{\sin B}+\frac{b}{\sin B}\alpha\cos.A-a\beta\cot.B$$

$$da=\frac{db.\sin A}{\sin.B}+a(\alpha\cot.A-\beta\cot.B)$$

Le premier terme du second membre indique l'erreur sur a lorsque la base seule n'est pas exacte.

Le deuxième exprime l'erreur due à l'inexactitude des angles. Donc, quand les deux circonstances fâcheuses se présentent à la fois, elles ne s'aggravent ni ne se compensent : elles ont collectivement la même influence que lorsqu'elles ne se rencontrent pas ensemble.

373. L'expérience a prouvé que, dans une chaîne établie sur ces principes, les erreurs, au lieu de s'accumuler, se compensaient en partie : ainsi, dans la mesure de l'arc du méridien qui s'étend de Dunkerque à Perpignan, les observateurs avaient mesuré deux bases : l'une près de Melun, l'autre vers Perpignan. Cette dernière, conclue du calcul de tous les triangles intermédiaires, fut trouvée égale à la mesure directe à $0^m,3$ près. Ces bases ont été mesurées au moyen de quatre règles en platine de 4^m chacune.

CHAPITRE II.

MESURE DES BASES.

374. Nous avons vu que le calcul d'un réseau de triangles nécessitait la mesure d'une première base. Cette mesure, sur laquelle repose l'exactitude de tout le reste de l'opération, doit être

faite avec les précautions les plus minutieuses. On choisit pour cela un terrain uni, on détermine les deux extrémités, et l'on jalonne l'alignement. On dispose dans cette direction des madriers établis sur chevalets, dans toute la longueur, puis on applique dessus bout à bout des règles de métal ou de bois, ou encore, comme l'ont pratiqué des savants anglais, des tubes de verre. Ces règles ayant été disposées horizontalement à l'aide d'un niveau, leur somme donne la longueur de la base; mais, dans le cas le plus général, la température n'est pas constante pendant toute la durée de l'opération : les règles ne peuvent pas toujours être mises horizontales : la base n'est pas en ligne droite; enfin, la surface sur laquelle on opère n'est pas au niveau de celle des eaux moyennes de la mer.

De là, quatre corrections distinctes à opérer :

1° Correction due à la variation de température ;

2° Réduction de la base à l'horizon de l'un de ses termes ;

3° Réduction à un arc de grand cercle ;

4° Réduction au niveau de la mer.

Occupons-nous d'abord du premier cas, qui présente deux circonstances différentes, suivant que l'on connaît ou non la dilatation de la substance dont se composent les règles.

375. *Dilatation connue.* Supposons d'abord que l'on emploie une règle en fer f pour mesurer la base B. Cette règle, dont la dilatation d est connue (0,0000122 ou $\frac{1}{81900}$ pour un grade du thermomètre centigrade), a été étalonnée à la température de 10^g, sur un mètre étalon en platine qui, à la température de la glace fondante, représente le mètre légal égal à 443,296 lignes. L'aplatissement de la terre étant $\frac{1}{334}$, le quart du méridien a été trouvé de 5,130,740 toises, et l'on a déduit, en divisant par dix millions, la longueur indiquée ci-dessus pour le mètre.

La température n'étant pas constante, désignons par t, t', t'', t''', etc., les indications du thermomètre à chaque fois que l'on a placé la règle.

Il viendra $$B = f_t + f_{t''} + f_{t'''} + \text{etc.}$$

Le nombre des termes du second membre est K.

La valeur cherchée de la base est ainsi exprimée en fonction d'autant d'inconnues qu'il y a de termes, puisque la longueur de la règle varie avec la température. Nous allons chercher à réduire



toutes ces inconnues à une seule ; puis nous en trouverons la valeur par un moyen subsidiaire.

Si nous désignons par x, la température, inconnue pour le moment, à laquelle la règle de fer est égale à un mètre, il viendra, en vertu de

$$f_t = f_x + d\,(t - x)$$
$$f_{t'} = f_x + d\,(t' - x)$$

substitués dans la valeur de la base,

$$\text{B} = \text{K}\,f_x + d(t + t' + t'' + \text{etc.}) - \text{K}dx = \text{K}\;(1\text{ mètre}) + d\,(t + t' + \text{etc.}) - \text{K}dx.$$

Reste donc à déterminer x : or, nous avons dit que l'étalon de platine à 0 grade représente le mètre ; donc

$$\text{P}_0 = f_x$$

A la température de 10^g, on a eu, en étalonnant la règle de fer

$$\text{P}_{10} = f_{10}$$

Et si nous désignons par d' la dilatation du platine, qui est 0,000008565 ou $\frac{1}{116760}$ pour un grade, il en résultera

$$\text{P}_{10} = \text{P}_0 + 10\,d' = f_{10} = f_x + d\,(10 - x)$$

d'où $\quad 10.\,d' = 10.\,d - dx \quad \text{et} \quad x = \frac{10\,(d - d')}{d}$

Cette valeur de x une fois déterminée, la longueur de la base B est connue. Cherchons l'expression de x au moyen des valeurs numériques connues de d et d', on a

$$x = \frac{10\,(0{,}0000122 - 0{,}0000086)}{0{,}0000122} = \frac{0{,}000036}{0{,}0000122} = \frac{36}{12{,}2}$$

log. 36 = 1,55630125
log. 12,2 = 1,0863598
log. x = 0,4700527 et $x = 2^g,9516$

C'est donc à la température de $2^g,95$ que la règle de fer est égale au mètre. On peut, pour vérification, voir si, en partant de cette température pour la règle de fer et de zéro pour celle de platine, on arrive à deux longueurs égales pour les deux règles à 10^g.

De $2^g,95$ à 10^g il y a 7^g05 qui, multipliés par 0,0000122, donnent 0,00008601.

Ainsi la règle de fer à la température 10^g est égale à $1^m,00008601$.

Quant à la règle de platine $10.d' = 0,00000865 \times 10 = 0,0000865$ qui, ajoutés au mètre, donnent pour sa longueur, la même que celle de la règle de fer.

Si l'on ne tient pas à connaître la température x à laquelle la règle de fer est précisément égale au mètre, on modifie la marche du calcul ainsi qu'il suit :

$$B = Kf = f_t + f_{t'} + f_{t''} + \text{etc.}$$

$$f_t = f_{10} + d\,(t - 10)$$

$$f_{t'} = f_{10} + d\,(t' - 10) \ldots \text{etc.}$$

$$B = Kf_{10} + d\,(t + t' + t'' + \text{etc.}) - 10\,Kd.$$

Or $$f_{10} = P_{10} = P_0 + 10\,D = 1^m + 10\,D.$$

donc $$B = K^m + d\,(t + t' + t'' + \text{etc.}) + 10\,K.\,(D - d)$$

376. *Dilatation inconnue.* Supposons la base B mesurée avec des règles en bois. On donne le nom de portée à l'ensemble des règles que l'on emploie : on se sert ordinairement de trois ou quatre et l'on n'observe la température que pour chaque portée.

On aura ainsi, p désignant une portée

$$B = p_t + p_{t'} + p_{t''} + p_{t'''} + \text{etc.}$$

Si nous désignons par D, la variation de longueur de la portée entière pour un grade, nous diminuerons le nombre des inconnues du second membre en remarquant que

$$B = Kp_0 + D\,(t + t' + t'' + \text{etc.})$$

puisque $$p_t = p_0 + Dt;\ \ p_{t'} = p_0 = Dt', \text{ etc.}$$

p_0 ou la longueur de la portée à la température de la glace fondante ne nous est pas connue : il en est de même de la dilatation D, c'est donc de la recherche de ces deux quantités qu'il nous reste à nous occuper.

Pour cela, on plante deux bornes en terre, à une distance un peu plus grande qu'une portée : cette distance comptée de centre en centre est invariable.

On la mesure avec les règles en bois qui composent la portée, et l'on a, en la désignant par E,

$$E = P_t + f_t$$

f ne représente ici qu'une petite portion de la règle de fer que nous savons maintenant être égale au mètre à la température 2°95, si elle a été construite égale à l'étalon de platine à 10°.

Mettons en évidence dans la valeur de E les quantités p_0 et D que nous nous proposons de déterminer, c'est-à-dire écrivons p_t en fonction de p_0, nous aurons $p_t = p_0 + Dt$; transformons de même f_t, il viendra

$$f_t = f_{2.95} + f_{2.95}\,[d\,(t - 2.95)] = f_{2.95}\,[1 + d\,(t - 2.95)]$$

et par suite $\quad E = p_0 + Dt + f_{2.95}\,[1 + d\,(t - 2.95)] \qquad (1)$

Deux cas se présentent ici :

1° La portée a été une première fois comparée au mètre étalon. Supposons que cette opération faite à la température 0 ait donné p_0; la règle de fer étalonnée également a un coefficient de dilatation connu, en sorte que la nouvelle équation renferme deux inconnues seulement E et D. Une seconde mesure de E faite à une nouvelle température t' donnera

$$E = p_0 + Dt' + f'_{2.95}\,[1 + d\,(t' - 2.95)]$$

retranchant les deux équations l'une de l'autre, on élimine E, et l'on connaît D, qui substitué dans

$$B = Kp_0 + D\,(t + t' + t'' \ldots) \qquad (2)$$

fait connaître la base.

2° La portée n'a pas été étalonnée préalablement, par suite p_0 est inconnu. Il faut alors le mesurer directement avec la règle de fer, ou mieux, il faut mesurer avec celle-ci la distance E dont la valeur corrigée, comme il a été dit au § 375, reportée dans l'équation (1) en même temps que D calculé par une double mesure, ainsi qu'il vient d'être indiqué précédemment, donnera une équation ne renfermant plus que l'inconnue p_0 qu'elle fera connaître. L'équation (2) donnera ensuite la longueur de la base.

Il pourrait se faire encore, quoique cela soit peu à craindre,

que le coefficient de dilatation de la règle métallique fût inconnu. Il faudrait alors rapporter les fractions mesurées avec cette règle à celle de son étalonnage, ce qui donnerait deux équations de la forme,

$$E = p_0 + Dt + f_{10}[1 + d(t - 10)] \qquad (3)$$

Deux mesures directes de E faites avec la règle métallique donneraient deux nouvelles équations de la forme

$$E = mf_t = mf_{10}[1 + d(t - 10)] \qquad (4)$$

m étant un cofficient numérique. Les équations (4) feraient connaître E et d, qui substitués dans les équations (3) permettraient de calculer p_0 et D, dont il n'y aurait plus qu'à reporter les valeurs dans l'équation (2).

Il est convenable de dire que la dilatation du bois étant peu sensible dans le sens de la longueur, surtout lorsque, par des préparations préalables, on a cherché à le soustraire aux influences hygrométriques, on se dispense le plus souvent de tenir compte de l'effet de la température.

377. *Réduction de la base à l'un de ses termes, ou réduction à l'horizon.* Les opérations géodésiques qui ont pour but de projeter les sommets des triangles sur la surface des eaux moyennes de la mer, exigent que la base qui jusqu'à présent se trouve seulement dans un plan vertical, soit encore projetée sur l'arc de cercle correspondant de la sphère des eaux moyennes. Réduisons d'abord cette base à sa projection sur un grand cercle passant par l'une de ses extrémités. C'est dans ce but qu'on a mesuré l'inclinaison à l'horizon de *chacun* de ses éléments. Soit $AB = b$, (*fig.* 230), une portée. Si l'on regarde les deux verticales qui passent par ses extrémités comme parallèles, la tangente AB' pourra être prise comme égale à l'arc de cercle AB $= \beta$ qui est la vraie projection cherchée, et sera représentée par $\beta = b \cos.\alpha$. Rigoureusement $AB'' < AB' < b \cos.\alpha$, mais pour un élément de la base l'erreur commise en prenant $\beta = b \cos.\alpha$, quoique se répétant un grand nombre de fois, est complétement négligeable. Il n'en serait plus ainsi si l'on appliquait ce raisonnement à la longueur totale de la base ou à une fraction considérable de celle-ci.

Désignons par b, b' b''.... les éléments mesurés sous des inclinaisons α, α' α''..., par β, β', β''... les projections sur les arcs des

grands cercles passant par chaque extrémité de ces éléments, et par B et B′ la base mesurée et celle qui résulte de la réduction. On aura évidemment

$$B - B' = b\,(1 - \cos.\alpha) + b'\,(1 - \cos.\alpha') + b''\,(1 - \cos.\alpha'')\ldots\ldots$$
$$= 2b\,\overline{\sin.}^2\,\tfrac{1}{2}\,\alpha + 2b'\,\overline{\sin.}^2\,\tfrac{1}{2}\,\alpha' + 2b''\,\overline{\sin.}^2\,\tfrac{1}{2}\,\alpha''\ldots\ldots\ldots$$

La correction ainsi obtenue conduira à la connaissance de B′. Observons qu'on n'obtiendra ainsi que la somme des arcs de cercle β, β', β''... de la figure 280 *bis*, tandis qu'on aurait dû avoir $\beta + \beta_1' + \beta_1'' + \ldots$ des arcs appartenant à un même cercle. Mais si l'on remarque que l'on a toujours soin de prendre les éléments de la base très-peu inclinés sur leurs divers horizons, on en conclura qu'on peut, sans erreur sensible, regarder la base $\beta + \beta' + \beta''\ldots$ calculée, comme se confondant avec $\beta + \beta_1' + \beta_1'' + \ldots$ appartenant à un cercle qui passe par une de ses extrémités, ou mieux à un cercle intermédiaire. Une vérification directe faite par le calcul prouve que l'erreur commise, dans les circonstances de longueur et d'inclinaison des bases mesurées jusqu'ici, est au-dessous des erreurs d'observations inévitables.

Il est important de bien faire sentir ici le double but pour lequel on cherche la différence entre la ligne mesurée et sa projection, au lieu de cette projection elle-même, parce que plusieurs fois, pour les mêmes motifs, nous opèrerons plus tard de semblables transformations. Dans le choix du terrain, on s'est arrêté à un qui fût, sinon entièrement horizontal, du moins fort peu incliné : ainsi α est toujours un angle très-petit. Or, quand les angles approchent de zéro, les cosinus varient très-lentement, et leurs valeurs sont représentées dans les tables par des logarithmes qui ne diffèrent pas ou presque pas entre eux dans les sept premières décimales.

La substitution des sinus est alors très-favorable; puisque, dans les mêmes circonstances, ils varient fort rapidement, et permettent ainsi de tenir compte, avec beaucoup de précision, de la valeur de α.

Le second avantage est, qu'en calculant par logarithmes $2MM^{IV}\sin.^2\frac{1}{2}\alpha$, qui est l'expression de la différence, on trouve, correspondant au logarithme de ce produit, un nombre qui contient la même quantité de chiffres, quelle que soit la caractéristique : plus celle-ci est petite, plus le résultat est donné avec précision, puisque le nombre de chiffres décimaux qu'il contient

est d'autant plus grand. Prenons un exemple numérique pour mieux faire entendre ceci :

Au logarithme 46611853 correspond le nombre 29254 : si la caractéristique est 4, le nombre ne contiendra pas de décimales, et on pourra dire qu'on le connaît à moins d'une unité, tandis que, si la caractéristique est zéro, le nombre correspondant ne contiendra qu'un chiffre entier ; tous les autres exprimeront une fraction décimale : il sera 2,9254, et sera exact à un dix millième près.

Nous devons mentionner un autre avantage résultant de la recherche de la correction qu'il faut faire subir à un premier résultat pour en obtenir un second, au lieu de la recherche directe de celui-ci, quoique cet avantage n'apparaisse pas dans le cas actuel.

Cette correction est généralement très-petite ; on pourra alors se contenter de la calculer par approximation, en ne commettant sur le résultat final qu'une erreur d'autant moindre que la correction elle-même sera petite. On sera donc en droit d'apporter aux formules employées des simplifications qu'on n'aurait pas pu appliquer à celles des formules qui auraient donné la quantité cherchée elle-même. Ainsi, s'il s'agit de calculer une longueur de 10000^m au moyen d'une correction de 10^m, on pourra, dans la recherche de cette dernière, négliger un $\frac{1}{1000}$, c'est-à-dire, $0^m,01$, tandis que dans le calcul direct de la distance 10000 il n'aurait pas été permis de négliger le millième, qui aurait été de 10^m.

378. *Réduction de la base à un arc de grand cercle.* Supposons que la base mesurée soit ABC (*fig.* 281), faisant un angle en B. On n'a pas pu prendre de préférence la droite AC pour base, ou parce que A et C sont invisibles l'un de l'autre, ou parce qu'il y a un obstacle entre deux, ou enfin parce qu'une droite DE peu éloignée satisfait mieux à la condition que de ses extrémités on puisse voir tous les points destinés à être rattachés à la base : le terrain de D en E peut être en même temps plus difficile à mesurer que ABC que l'on peut supposer une grande route ou le bord d'une rivière.

Ayant les côtés AB, BC en mètres, on observe l'angle ABC, et résolvant le triangle, on connaît AC ainsi que les angles qui ont leurs sommets en A et C. A ces deux points on trace AD, CE perpendiculairement à AB, CB ; puis, par les points D,E, on mène

deux lignes DM, EF perpendiculaires sur les prolongements de AC. On résout alors les deux triangles rectangles DMA, ECP, dans lesquels on connaît les hypothénuses DA, CE et les angles ; en effet, puisque DAB et BCE sont droits, DAM = 100 — BAC et PCE = 100 — BCA : d'ailleurs, les côtés DA, CE ont pu être mesurés immédiatement sur le terrain, ou obtenus par la résolution des triangles ABD, CBE : dans ce cas, étant en B, on aura dû observer les angles ABD et CBE. On trouve de même, au moyen des triangles MDA, PCE, les valeurs de MA, DM, CP et PE. Cela posé, imaginons par le point D la ligne DG parallèle à AC ; DG sera égal à MP ou MA AC + OP, comme parallèles comprises entre parallèles : de plus, cette ligne formera l'un des côtés de l'angle droit, dans un triangle rectangle DEG dont l'hypothénuse DE est la nouvelle base cherchée. Le second côté de l'angle droit est EG = EP — DM.

Dès lors on a

$$\overline{DE}^2 = \overline{DG}^2 + \overline{EG}^2 = \overline{DG}^2\left\{1+\frac{\overline{EG}^2}{\overline{DG}^2}\right\} \quad \text{et} \quad DE = DG\left\{1+\frac{\overline{EG}^2}{\overline{DG}^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= DG\left\{1+\tfrac{1}{2}\frac{\overline{EG}^2}{\overline{DG}^2}\right\}$$

On voit que le but que l'on s'est proposé, en mettant $\overline{DG}^2$ en facteur commun, est d'avoir, dans la parenthèse, un binôme dont le second terme étant une quantité très-petite $\left(\frac{EG}{DG}\right)^2$, on pouvait, après l'extraction de la racine carrée des deux membres, s'en tenir aux deux premiers termes du développement, parce que le troisième terme contenant la quatrième puissance d'une très-petite fraction peut être négligé. Actuellement que le but de cette transformation est rempli, on simplifie et l'on a

$$DE = DG + \tfrac{1}{2}\frac{\overline{EG}^2}{DG} \quad \text{ou enfin} \quad DE - DG = \tfrac{1}{2}\frac{\overline{EG}^2}{DG}$$

On voit qu'ici, comme dans le cas précédent, et pour le même motif, celui d'obtenir un résultat plus précis, on cherche la différence des deux bases ABC, DE, de préférence à la valeur immédiate de cette dernière.

Co..trairement à ce que nous avons dit au § 368, l'angle B, qui sert à résoudre le triangle ABC, doit être obtus. Cela résulte des

données particulières a. c. B qui le définissent. En effet, la base AC serait déterminée par la formule

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac.\cos.B$$

Mais une erreur β commise sur la mesure de B conduira au résultat

$$b'^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos.(B+\beta)$$

d'où $$b^2 - b'^2 = 2\,ac\,\{\cos.(B+\beta) - \cos.B\} = 2\,ac\;\beta\sin B$$

Pour que l'erreur sur la base soit petite, il faut donc que B soit proche de 0 ou de 200°; mais comme, d'une autre part, b doit être grand, la limite favorable est $B = 200°$.

Nous avons traité comme rectilignes tous les triangles considérés. On est en droit d'agir ainsi, si l'on a soin de choisir AC et DE peu éloignés du parallélisme, B très-obtus et AM, CP, très-petits. Chacun des triangles sphériques résolus comme s'ils étaient rectilignes. a alors une très-petite surface, et nous verrons plus tard que les triangles plans ayant même longueur de côtés que les triangles sphériques, ont des angles très-sensiblement égaux à ceux de ces derniers, lorsque les surfaces sont très-petites.

379 *Réduction de la base au niveau de la mer.* Dans les deux triangles mixtilignes semblables de la figure 282, qui ont leur sommet commun au centre de la terre, on a la proportion $B : b :: R + h : R$. R est le rayon de la terre au niveau de la mer; h la hauteur de la base mesurée B au-dessus de ce niveau, et b la base réduite.

De la proportion ci-dessus on tire $b = \frac{BR}{R+h}$.

R et $R + h$ étant des nombres différant très peu l'un de l'autre, les tables de logarithmes ne donneraient pas assez de précision, bornées qu'elles sont généralement aux sept premières décimales, qui pourraient fort bien être identiques pour R et $R + h$. Afin d'éviter cet inconvénient, nous chercherons $B - b$. La même proportion nous donne

$$B - b : b :: h : R \quad \text{et} \quad B - b = \frac{bh}{R}$$

Substituant la valeur que nous avons trouvée plus haut pour b, il vient

$$B - b = \frac{Bh}{R+h}$$

On peut encore, si l'on veut, réduire cette expression en série : pour cela, on divise le numérateur et le dénominateur par R, puis on trouve successivement

$$B - b = \frac{B\frac{h}{R}}{1+\frac{h}{R}} = B\frac{h}{R}\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-1} = B\frac{h}{R}\left(1-\frac{h}{R}+\frac{h^2}{R^2}-\frac{h^3}{R^3}+\text{etc.}\right)$$

$$= B\left(\frac{h}{R}-\frac{h^2}{R^2}+\frac{h^3}{R^3}-\frac{h^4}{R^4}+\text{etc.}\right)$$

Nous verrons plus tard, en parlant du nivellement, comment on obtient h.

380. Pour faire voir avec quel degré de précision on mesure les bases et l'on observe les éléments des triangles, nous allons citer ici quelques résultats des opérations de la nouvelle carte de France.

En 1804, on a mesuré la base d'Ensisheim, près Colmar, avec trois des quatre règles de platine qui avaient été construites pour les opérations de la mesure de la méridienne, et dont la quatrième depuis lors reste constamment déposée au bureau des longitudes. On la trouva égale à 19044^m, 39. Elle devait servir de départ pour la carte de la Suisse. En partant de cette base, on est parvenu, par une suite de triangles,

Au côté Strasbourg. — Signal du Donon. .	= 43931^m,62
Le même côté, en partant de la base de Melun, a été trouvé.	= 43930^m,91
Différence.	= 0,^{m}71

Celle de *Plouescat*, sur les bords de la mer, non loin du cap Finistère, mesurée avec les mêmes règles, est de 10526^m,91, et calculée par une chaîne de 33 triangles qui la rattachent à la base de Melun, elle a été trouvée identiquement la même.

La base de *Gourbera* près Dax (Landes) mesurée avec les règles de platine est.	12220^m,031
Calculée au moyen des triangles qui la lient à celle de Perpignan, on a trouvé.	12220^m,769
Différence.	0^m,738

On a reconnu, dans cette dernière opération, que l'Océan et la Méditerranée sont de niveau.

381. Nous renvoyons ceux de nos lecteurs qui veulent connaître, dans leurs plus grands détails, les opérations minutieuses

et les instruments de précision qu'ont employés Delambre et Méchain, lors de la mesure d'un arc de méridien, à la description qu'en a donnée Puissant dans son *Traité de Géodésie :* il faudrait la copier textuellement ou la rendre incomplète en l'abrégeant. Nous nous bornerons donc à dire quelques mots de l'appareil do règles que possède l'Ecole d'application d'état-major, et qui présente une exactitude suffisante pour l'exécution des opérations relatives à la carte d'un pays occupé ou conquis.

Cet appareil est composé de deux règles de 4^{m} chacune. Les figures 283 et 284 représentent une de ces règles en projections verticale et horizontale. Elles sont en sapin imprégné d'huile bouillante, puis de vernis. Elles portent, à leurs extrémités, des talons en cuivre, et à l'une d'elles une languette A, qui a la faculté de glisser dans une rainure à queue d'aronde, pratiquée dans l'épaisseur de la règle, et qui se meut à l'aide d'un pignon engrenant dans une crémaillère intérieure. Cette languette est divisée en millimètres. On y a même adapté un vernier, afin de pouvoir opérer avec plus de précision. Le talon en B est terminé par une surface arrondie à laquelle vient s'appuyer tangentiellement la languette de la règle qui suit. La longueur de 4^{m} est comprise entre les points A et B : ainsi les languettes se comptent en plus. Chaque règle est soutenue par deux jambes ou montants J et J qui lui sont perpendiculaires; chacune d'elles pénètre dans une ouverture rectangulaire pratiquée dans la tablette supérieure d'un trépied. Cette ouverture est plus grande que n'est large le support; mais celui-ci, lorsqu'il en est temps, est maintenu par deux vis butantes dont les écroux sont noyés dans la tablette.

Vers la partie inférieure du trépied, est placée une autre planche qui relie les trois jambes, et sur laquelle repose et pivote au besoin l'extrémité O du support J. Enfin, les jambes du trépied sont terminées par des vis dont les larges têtes, tournées en contre-bas, appuient sur le sol. Ces vis sont destinées à remédier aux inégalités du terrain.

La règle et ses deux jambes sont unies par des doubles manchons M*m*, M'*m'*, dans lesquels elles peuvent glisser indépendamment l'une de l'autre. Des vis VV, TT', pressant sur des ressorts, fixent le tout ensemble, lorsque l'appareil est convenablement placé. Chaque règle est établie horizontalement au moyen du niveau SS' qui lui est adapté. On dispose enfin les règles dans une direction déterminée à l'aide d'une alidade et de jalons : puis on tend une corde d'un jalon à l'autre, pour disposer les jambes

J, J dans un même plan vertical. C'est alors que les deux vis butantes sont approchées peu à peu du montant J, qui était resté libre jusqu'à ce moment pour ne pas contrarier les mouvements imprimés à la règle, tandis qu'on la rendait horizontale. Toutes les vis étant bien serrées, l'appareil est stable. On fait sortir la languette de la règle précédente pour apprécier le petit intervalle que l'on avait conservé à dessein, afin d'éviter toute chance de recul.

382. *Appareil nouveau pour la mesure des bases géodésiques, par M. Porro, officier supérieur du génie sarde.*

Cet appareil nous a paru digne d'être décrit avec détails, en raison de sa simplicité et de l'extrême précision qu'il donne.

Voici en quoi il consiste :

1° Une seule verge de sapin, huilée et vernie, de $0^m,01$ de diamètre et de $3^m,07$ de longueur, est enfermée dans un tube en cuivre mince dont elle occupe l'axe et maintenue par des diaphragmes concentriques. Ce tube, qui ne s'appuie sur les supports que par ses extrémités garnies de pattes de cuivre, a reçu une contre-courbure telle, que son axe est parfaitement rectiligne lorsque, supporté par ses extrémités seulement, il est soumis aux effets de la pesanteur.

Un niveau à bulle d'air assez long, d'une courbure prononcée, exécuté avec le plus grand soin, est placé sur le milieu du tube. Il est gradué de manière que, si φ indique la distance zénithale de l'une des extrémités de la verge observée de l'autre extrémité et α et β, les lectures faites aux deux bouts de la bulle, on a

$$\varphi = \alpha + \beta$$

On vérifie l'exactitude de cette indication, en retournant l'appareil sur ses appuis et, s'il y a quelque correction à faire, on l'obtient au moyen de vis destinées à cet usage.

Un petit niveau placé perpendiculairement à la direction de l'appareil, vers l'extrémité postérieure, sous la main de l'un des opérateurs, a pour fonction d'assurer la verticalité de la section longitudinale utile du niveau principal. On satisfait à cette condition par un mouvement du grand tube dans les collets qui le fixent aux pattes mentionnées plus haut.

Chacun des bouts de la verge de sapin est occupé, sauf $0^m,05$ de marge, par une languette en alliage de nikel incrustée dans le bois. Ces languettes ont $0^m,05$ de longueur ; elles sont divisées

en 500 parties, numérotées à chaque millimètre, de zéro à 50, du dedans au dehors. Dans le tube sont pratiquées des ouvertures à recouvrements mobiles, qui permettent de voir les divisions. La distance constante C entre les zéros des deux languettes a été fournie par un étalonnage fait avec beaucoup de soin.

2° Trois microscopes achromatiques, grossissant environ quarante fois, sont montés ainsi qu'il suit :

Sur le centre d'une pièce à trois branches (*fig.* 52, *planche* XXII), et à trois vis calantes, s'élève une colonne métallique creuse que des branches horizontales et parallèles traversent à deux hauteurs différentes et que termine un niveau sphérique. Ces branches portent en saillie d'un côté le microscope dont elles maintiennent l'axe dans une position verticale. Un pignon et une crémaillère permettent de faire monter ou descendre le microscope pour le mettre à la distance la plus favorable de l'objet qu'on veut observer. De l'autre côté de la colonne, les branches convenablement entaillées maintiennent dans la position verticale un objectif simple de 3^m de foyer et de $0^m,06$ d'ouverture, placé de manière que son plan optique prolongé passe par l'axe du microscope, et que son centre optique en soit distant de $0^m,125$.

Une échelle en ivoire, divisée en millimètres, occupe un diamètre horizontal de l'objectif. Elle peut se retourner pour faire face de tel côté que l'on veut et pour monter ou descendre d'une certaine quantité, parallèlement à elle-même. Cette mobilité est nécessaire, ainsi qu'on le verra bientôt, pour le cas où le terrain est incliné. On peut enfin la faire pivoter autour de l'une de ses extrémités, pour la déplacer lorsqu'on n'a pas à s'en servir.

L'origine de ses graduations est prise à partir de l'axe optique du microscope. Les trois objectifs et leurs échelles constituent ce que M. Porro nomme *l'appareil directeur*.

Parfaitement semblables, et numérotés 1, 2, 3, ces instruments sont maintenus sur le terrain par trois pieds ordinaires en bois.

Un niveau sphérique supplémentaire, monté de manière à pouvoir prendre la place du microscope, sert à assurer la verticalité de l'axe optique. Il faut toujours opérer par inversion. Lorsqu'on a rendu l'axe optique vertical, on rectifie le niveau de la colonne, de telle sorte qu'il soit d'accord avec le niveau supplémentaire. On remet alors l'oculaire en place, et tout est prêt à fonctionner.

3° Après avoir jalonné la ligne à mesurer et fait placer aux extrémités des bornes, dans le centre desquelles un grain métalli-

que est fixé pour recevoir un trait finement gravé, on place le microscope n° 1 sur l'extrémité de la base où l'on veut commencer. On s'assure que l'axe optique correspond parfaitement avec le trait gravé, et l'on a bien soin que le niveau de la colonne soit calé.

A trois mètres environ de distance, et dans l'alignement approximatif de la base, on place sur son pied et l'on cale le microscope n° 2. On a soin, en plaçant les microscopes, de faire en sorte que la direction des branches métalliques qui portent toutes les pièces soit à peu près perpendiculaire à celle de la base, afin que l'axe optique des objectifs directeurs soit approximativement parallèle à la base.

On place de même le microscope n° 3 à 3 mètres du n° 2. Ce sera ensuite le n° 1, puis le n° 2, etc., qui viendront successivement se poser de 3 en 3 mètres en avant.

Lorsque les microscopes n°s 1 et 2 sont placés, et tandis que l'un des opérateurs pose le n° 3, deux autres personnes présentent la verge sous les n°s 1 et 2, lisent sur les languettes les quantités qui se trouvent sous les croisées de fils et les enregistrent ainsi que l'inclinaison $\varphi = \alpha + \beta$, fournie par le niveau.

On aura donc, en désignant par P_1 la distance comprise entre les axes optiques verticaux des deux microscopes consécutifs, et par a_1, b_1, les lectures des languettes

$$P_1 = (C + a_1 + b_1) \sin.\varphi_1$$

Le troisième microscope se trouvant placé avec les mêmes précautions, on transporte la verge à la deuxième portée P_2 comprise entre les microscopes 2 et 3, et l'on a même

$$P_2 = (C + a_2 + b_2) \sin.\varphi_2$$

4° Les quantités P_1, P_2, P_3, etc., représentent les distances entre les verticales successivement déterminées par les axes optiques des microscopes : mais ceux-ci n'ayant été, comme il a été dit plus haut, qu'approximativement alignés, il sera nécessaire d'évaluer les éléments de la correction à apporter à ces valeurs pour avoir les portées réelles que l'on peut désigner par π_1, π_2, π_3, etc.

C'est à la détermination de cette correction que servent les objectifs et les échelles d'ivoire dont il a été déjà question.

Voici comment on procède :

A une assez grande distance, sur l'alignement de la base, prolongée au besoin, on place un gros fil à plomb. On en place même plusieurs, si la base a un développement considérable ; ils sont maintenus et accrochés au sommet de trois perches ou jalons unis ensemble.

L'alignement exact de ces fils à plomb, ou les éléments de la correction, si leur alignement n'est qu'approximatif, s'obtiennent par des moyens connus. Cet alignement est considéré comme parallèle à la véritable ligne à mesurer, et séparé d'elle par une distance de $0^m,125$, puisque nous avons, plus haut, admis ce chiffre comme expression de l'écartement entre l'axe optique d'un microscope et celui de l'objectif directeur correspondant.

Soit maintenant (*fig.* 51, *planche* XXII) M_n, $M_{(n+1)}$ la position de deux microscopes consécutifs à la n^{me} portée. Soit Q le fil à plomb sur lequel on veut relever l'élément de correction de l'alignement : un observateur O regarde le fil à plomb Q avec une lunette à main, qu'il tient de manière que son objectif soit en partie masqué par l'*objectif directeur* du microscope voisin $M_{(n+1)}$. Dans cette position, l'échelle d'ivoire du microscope M lui apparaîtra dans le champ de la lunette, et l'image du fil à plomb marquera sur l'image de l'échelle un nombre D de millimètres.

Des principes d'optique, il résulte :

1° Que D est indépendant de la position de l'observateur et des petits mouvements qu'il peut, malgré lui-même, imprimer à la lunette dont il se sert ;

2° Que le lieu de l'échelle où cette quantité correspond est exactement le point *a* d'intersection entre l'échelle du microscope M_n et la ligne qui, du centre optique *o* de l'objectif directeur du microscope $M_{(n+1)}$, se dirige au point Q.

3° Si l'on mène, par l'un des microscopes, une parallèle $M_n q$ à l'alignement vrai, et si l'on abaisse de l'autre $M_{(n+1)} q$ perpendiculaire à $M_n q$, la ligne $M_{(n+1)} q = \delta$ sera sensiblement égale à D $- 0^m,125$, et le triangle rectangle $M_n M_{(n+1)} q$, dans lequel on connaît l'hypothénuse et le petit côté de l'angle droit, donnera la longueur réelle de la portée réduite $M_n q = P_n$.

4° Au lieu de chercher la portée réduite, on cherche, pour plus de précision, comme déjà nous avons fait dans d'autres circon-

stanoes, et notamment au § 377, la différence entre l'hypothénuse et le grand côté de l'angle droit, c'est-à-dire entre la portée mesurée et la portée réduite.

Désignées l'une par P, l'autre par π, on a donc $P - \pi = \frac{\delta^2}{2P}$.

Si, par suite des accidents très-prononcés du terrain, le fil à plomb directeur apparaissait beaucoup au-dessus ou au-dessous de l'horizon de l'observateur, celui-ci emploierait, au lieu d'une simple lunette à main, une lunette plongeante se mouvant à angle droit autour d'un axe dont l'horizontalité serait assurée par un petit niveau à bulle d'air.

5° Afin d'obtenir plus de précision encore et, en même temps, pour contrôler si la lecture n'est pas affectée de quelque erreur, on peut procéder ainsi que nous allons dire.

Après avoir lu, sur les languettes, les quantités telles que a,b, on déplace un peu la verge dans le sens longitudinal, et l'on fait la lecture qui donne deux nouveaux nombres a', b'; on procède plusieurs fois de la même manière, et l'on est assuré de l'exactitude des lectures, si $a + b = a' + b' = a'' + b'' =$, etc. Les sommes $a + b$, $a' + b'$, etc., différeront généralement de quelques millièmes ou même de un ou deux centièmes de millimètre, en raison de l'estime, surtout si les observateurs changent mutuellement de place, ainsi qu'il est bon de le faire, après chaque observation. La moyenne ne pourra, au surplus, qu'approcher davantage de la vérité.

6° Pour déterminer la constante C, c'est-à-dire pour étalonner la verge en la comparant à un étalon de mètre, on place d'abord arbitrairement et on cale le microscope n° 1, puis les 2e, 3e, à la distance d'un mètre l'un de l'autre, sur un même alignement que l'on vérifie par un fil tendu. On présente ensuite le mètre étalon lui-même sous les microscopes et on évalue les intervalles qui les séparent, ou bien on les rend exactement égaux au mètre étalon, si on le préfère. On transporte ensuite le microscope n° 2 à une quatrième position, dans le même alignement et à 1m du n° 3. Lorsqu'on a évalué ce troisième intervalle, on présente la verge, qui a 3m environ, sous les microscopes nos 1 et 2, qui occupent la première et la quatrième position. On lit, à plusieurs reprises, les quantités a, b, a' b', etc., comme il a été dit précédemment, pour obtenir un résultat moyen, dont l'exactitude dépend du nombre de répétitions qu'il convient à l'observateur de faire.

Si l'étalon dont on dispose est métallique, on doit naturellement tenir compte des effets de dilatation dus à la température.

7° L'appareil se démonte en trois parties pour pouvoir être contenu dans une boîte portative, et, bien que les joints de la verge de sapin soient ajustés de telle sorte qu'on peut les séparer et les assembler sans craindre de variation dans la longueur de la verge, on ne doit néanmoins pas se dispenser de refaire l'étalonnage sur les lieux mêmes, lorsqu'on veut opérer avec la plus grande précision. C'est pour ce motif qu'on ajoute à l'appareil un mètre-étalon en sapin de même grosseur et de même forme que la verge. Comme elle, il est garni de languettes. Inutile d'ajouter qu'il a été lui-même construit sur un étalon métallique légal. Ce mètre en sapin sert aussi comme auxiliaire pour mesurer des parties de la base moindres que la portée.

8° Les pieds ou supports, au nombre de quatre, destinés à porter les microscopes, sont d'une construction qui leur donne à le fois de la légèreté et de la stabilité : ils se prêtent, par leur simplicité, à une manœuvre prompte et aisée. Un seul écrou suffit pour arrêter tous les mouvements. La planchette qui les termine peut être disposée horizontalement, de manière que l'opérateur, après y avoir été placer le microscope, n'a presque plus rien à faire avec les vis à caler de ce dernier. Au point où correspond l'axe optique du microscope, la planchette est percée d'un trou garni d'un anneau métallique dont on va voir l'utilité.

9° Il arrive assez souvent que le point de départ est marqué sur la borne ou sur la tête d'un piquet enfoncé jusqu'à fleur du sol. Il faut donc placer l'axe optique du premier microscope dans la verticale de ce point.

On se sert pour cela d'un petit instrument accessoire, composé d'une tige en cuivre, creuse, d'une longueur variable et surmontée d'un niveau disposé de manière à assurer la verticalité de cette tige. Celle-ci se termine, à sa partie inférieure, par une pointe d'acier très-fine qui entre dans un trou très-petit aussi, pratiqué dans la tête de la goupille métallique qui masque l'extrémité de la base. Cet instrument est surmonté d'une échelle horizontale en argent, divisée comme les languettes de la verge de sapin, et disposée de telle sorte que, passant au foyer du microscope, on peut aisément apprécier l'intervalle compris entre la verticale de l'extrémité de la base et l'axe optique du microscope.

Deux lectures faites sur cette échelle, la première avec le zéro

à droite, la seconde avec le zéro à gauche, donneront deux quantités α et β, telles que $\frac{\alpha+\beta}{2}$ sera l'expression de l'intervalle.

Lorsqu'on arrive à l'extrémité d'une base ou quand il faut suspendre l'opération le soir, pour la reprendre le lendemain, on plante un piquet affleurant le sol, et l'on marque sur la goupille l'indice qui doit servir, à la séance suivante, pour continuer la mesure.

Chaque support est garni d'un fil à plomb adapté au centre de la planchette. On conçoit facilement quelle est son utilité, lorsque l'on cesse ou qu'on reprend le cours des opérations.

10° En faisant usage de quatre supports au lieu de trois, on charge un aide de placer, toujours par avance, le pied vacant à la distance de 3 mètres du dernier microscope. On trouve pour cela, dans la boîte de l'instrument, une autre verge de sapin, qui a 3^m et qui se démonte comme l'autre.

Un autre moyen, plus commode dans la plupart des cas, consiste dans l'emploi d'un niveau sphérique, d'une petite lunette de sextant et de deux prismes, le tout contenu dans une petite boîte.

Le niveau est disposé de manière à indiquer au poseur si cette boîte, placée sur le support, est horizontale, ou dans quel sens il faut faire varier sa position, si elle ne l'est pas.

Les fils à plomb adaptés à chaque pied ont exactement $0^m,75$ de longueur : ils sont terminés par des sphères de cuivre ; la lunette et les deux prismes, disposés dans la boîte de telle sorte qu'il produisent un effet de double image semblable à celui de tous les instruments à réflexion, mesurent un angle invariable dont la tangente est

$$\frac{0^m,75}{3^m,00}=0,25$$

L'instrument, placé sur le pied à régler, étant dirigé vers le pied précédent, l'opérateur verra l'image de la sphère du fil à plomb de ce dernier se balancer sur sa planchette, à laquelle elle semblera tangente, et même paraîtra posée dessus, si la distance est précisement de 3^m. Cette coïncidence n'aura pas lieu, si la distance est un peu plus ou un peu moins grande. Le poseur devra rapprocher ou éloigner le pied, jusqu'à ce qu'il obtienne la coïncidence apparente avec une approximation suffisante. Ce

moyen, nous le répétons, est préférable et plus prompt que l'emploi de la perche auxiliaire.

Nous terminerons cette description, dont les détails minutieux pourraient un jour être très-utiles à quelques-uns de nos lecteurs obligés de mesurer une base avec soin, en faisant remarquer que la perche pouvant s'incliner jusqu'à 6^g par rapport à l'horizon, sans que l'exactitude soit compromise en rien, on rencontrera bien plus facilement un terrain favorable d'ailleurs à la mesure d'une base.

CHAPITRE III.

MESURE DES ANGLES. — INSTRUMENTS.

Après avoir indiqué les moyens de mesurer une base, nous devons parler de la mesure des angles et décrire d'abord les instruments qui servent à cet usage.

383. *Cercle répétiteur.* Il est fondé sur le principe suivant : si l'on porte successivement n fois la longueur d'un arc sur une circonférence graduée de même rayon, et à partir d'un point fixe, jusqu'à ce que sa seconde extrémité tombe exactement sur une des lignes de division, ou du moins à une quantité près inappréciable, la longueur de cet arc en grades sera égale à l'arc total parcouru, divisé par n.

Si, par exemple, la circonférence graduée contenant 4,000 parties, l'arc dont nous avons parlé, après avoir été porté 9 fois, a son extrémité sur la 167e division, au delà d'une circonférence entière, on aura $arc = \frac{4167}{9} = 463$ parties $= 46^g,30'$. Il est clair alors que l'erreur qui a pu être commise sur l'ensemble des longueurs portées à la suite les unes des autres devra être divisée par 9 pour indiquer l'erreur dont est affecté l'arc dont on voulait connaître l'amplitude. Rien n'empêche d'atténuer encore cette erreur, en multipliant davantage les opérations.

384. Le cercle répétiteur, comme nous allons le voir, donne successivement le double, le quadruple, etc., de l'arc cherché, et si l'on suppose que l'on ait répété les observations jusqu'à la 20e, on aura, en divisant l'arc total par 20, et d'après le principe précédent, l'arc simple, à $\frac{1}{20}$ près de l'erreur totale.

Pour bien concevoir la marche de l'opération, nous allons supposer l'instrument réduit à des lignes mathématiques, persuadé

que, lorsque l'on aura bien compris son principe et ses propriétés, l'inspection d'un cercle suffira pour en faire deviner le mécanisme qui, d'ailleurs, varie d'un instrument à un autre.

Concevons un cercle gradué et deux lunettes pivotant autour de son centre, l'une se mouvant sur le plan supérieur du limbe, l'autre sur la face inférieure.

385. Soient D et G les deux objets entre lesquels est compris l'angle que l'on veut mesurer. Fixons la lunette supérieure OA (*fig.* 285) à zéro : amenons-la, en faisant tourner tout l'instrument sur l'objet de droite D, si les divisions vont de gauche à droite : ce serait sur l'objet de gauche que l'on dirigerait cette lunette, si le limbe était divisé dans le sens inverse. Portons la lunette inférieure O'B sur l'objet de gauche, au moyen d'un mouvement qui lui est propre : l'angle compris entre les deux lunettes est l'angle cherché ; mais on ne peut le lire, puisque, relativement au limbe, c'est la lunette inférieure qui a bougé, tandis que le zéro marqué près de l'oculaire de la lunette supérieure est encore, comme au commencement de l'opération, sur celui du limbe. Actuellement, faisons tourner tout le système jusqu'à ce que D soit sur l'axe optique de la lunette inférieure : l'autre, toujours attachée au limbe, viendra en A'O', et l'angle ACA' sera égal à ACB. Détachons-la pour la diriger sur G, son index parcourra l'arc O'OO'' double de l'angle cherché. Le chiffre indiquant la division qui est en O'', divisé par 2, sera donc l'expression de l'angle formé par les deux objets D et G : ainsi, le double de l'angle s'obtient au moyen de deux observations conjuguées.

Si l'on recommence une nouvelle couple d'observations en ramenant la lunette supérieure, son index restant en O'', sur l'objet D, on arrivera au quadruple de l'angle, et ainsi de suite.

On pourrait facilement obtenir la série 1, 2, 3, etc., des angles : car, si après avoir dirigé la lunette supérieure marquant zéro sur D, on y amène aussi la lunette inférieure qui, dans ce cas, sert de repère, et si l'on rend cette dernière fixe par rapport au limbe, on aura l'angle simple, en rendant libre la lunette supérieure, et la faisant tourner jusqu'à ce qu'elle soit dans la direction de G. En continuant à opérer ainsi, on aura l'angle simple, double, triple, etc. Cette méthode, beaucoup plus longue, n'est guère employée.

386. Le cercle répétiteur sert encore à prendre les distances

zénithales des objets, c'est-à-dire l'angle ZAB ou ZAC (*fig.* 278), AZ étant la verticale du lieu de l'observation.

Soit O l'objet observé : plaçons le limbe vertical au moyen d'un fil à plomb ; pointons la lunette supérieure sur O, après l'avoir fixée au limbe sur zéro ; calons un niveau qui est (*fig.* 286) fixé à la lunette inférieure ; retournons tout l'instrument par un mouvement de 200^g autour de la colonne verticale : la lunette supérieure viendra en *ll*, son zéro en O , et sa position nouvelle sera symétrique par rapport au niveau NN , qui n'aura pas dû cesser d'être horizontal.

S'il s'était décalé dans le retournement, ce qui a presque toujours lieu, plus ou moins, parce que la colonne n'est pas parfaitement verticale, on le remettrait au moyen du mouvement général du limbe. L'angle *l*'CN sera donc égal à L CN'. Si maintenant on détache la lunette supérieure, de manière à ramener l'oculaire de *l* en L, sa position première, l'objectif parcourra l'arc *l* QL' double de la distance zénithale, et l'index, parcourant un arc égal, indiquera le double de l'angle cherché.

Ce résultat s'obtient donc aussi par deux observations conjuguées ; et en continuant de la même manière, on a successivement le quadruple, le sextuple, etc., de la distance zénithale.

Il pourrait se faire que les localités ne permissent pas de retourner l'instrument pour la seconde observation conjuguée : on prendrait alors l'angle OCN , complément de la distance zénithale d'où l'on conclurait immédiatement cette dernière.

On rend les deux lunettes parallèles en les dirigeant toutes deux sur un objet très-éloigné, puis on les établit horizontales, au moyen du niveau qui appartient à l'une d'elles, la lunette supérieure étant toujours à zéro. Alors on dirige celle-ci sur le point O, et l'on a l'angle simple, etc.

Cette manière d'opérer suppose que l'axe optique de la lunette inférieure est horizontal quand le niveau est calé. Pour s'en assurer, on opère par la méthode générale sur un point pour lequel le retournement est possible, puis cherchant la même distance zénithale par le second procédé, on arrive à deux valeurs identiques si la condition est satisfaite, on à deux valeurs différentes qui, retranchées l'une de l'autre, feront connaître une erreur de collimation constante, qu'il suffira d'ajouter ou de retrancher dans tous les cas.

387. Il est indispensable de connaître les vérifications auxquelles doit être soumis l'instrument et les rectifications que

l'on peut y apporter : un cercle de $0^{m},43$ (16 pouces) de diamètre suffit pour les opérations les plus délicates de la géodésie ; on se contente même, en maintes circonstances, d'un cercle de $0^{m},27$ (10 pouces). Le limbe est divisé en 4,000 parties ou décigrades ; chaque division représente ainsi $10'$ centésimales. On adapte à l'index de la lunette supérieure un vernier divisé en 50 parties, embrassant le même espace que 49 divisions du limbe : la différence entre les plus petites parties du limbe et celles du vernier est donc un 50e de $10'$ ou $20''$, c'est-à-dire la 200000e partie du cercle.

Les lunettes sont du genre de celles que l'on nomme astronomiques : à leurs foyers sont placés les réticules. Ce sont des anneaux de métal dont deux diamètres rectangulaires sont représentés par des fils extrêmement déliés.

Le réticule a la faculté de se mouvoir dans le sens de l'axe de la lunette, pour pouvoir être placé exactement au foyer, et dans son plan, autour de ce même axe, soit pour établir les deux fils horizontal et vertical, soit pour les incliner tous deux de 50^{g}, l'un à gauche et l'autre à droite de la verticale. Le niveau adapté invariablement à la lunette inférieure est un tube de cuivre découvrant en partie un autre tube de verre rempli presque entièrement d'alcool et fermé hermétiquement. La bulle d'air qu'il contient, et qui varie de longueur en raison des différences de température, se déplace pour marcher dans le sens de la longueur du tube, suivant que l'on modifie son inclinaison. On trace, sur la partie supérieure et apparente du tube de verre, des divisions qui peuvent être d'un écartement quelconque, mais également espacées à partir de son milieu à droite et à gauche. On dit que le niveau est calé, lorsque les deux extrémités de la bulle correspondent à deux divisions symétriques. On comprend que le tube n'est pas tout à fait cylindrique, mais légèrement enflé vers son milieu ; s'il en était autrement, le niveau étant parfaitement horizontal, la bulle devrait s'allonger sur toute la longueur, et suivant une génératrice du cylindre.

Lorsqu'au contraire la paroi intérieure présente la courbure d'un arc de très-grand rayon, le niveau étant horizontal, ses deux extrémités sont au-dessous du milieu d'une quantité égale, et c'est en ce point que vient nécessairement se placer la petite bulle d'air contenu, en raison de sa pesanteur moindre que celle du liquide.

D'après ce qui précède, on voit qu'il faut : 1° que les axes op-

tiques des lunettes, déterminés par les centres de réfraction des lentilles et la croisée des fils du réticule, soient parallèles au plan du limbe. Pour voir si cette condition est remplie, on vise un objet avec la lunette de l'instrument et avec une lunette d'épreuve posée sur le limbe. Cette dernière est supportée par deux collets A,B (*fig.* 122) quadrangulaires. On la vérifie d'abord elle-même en la tournant successivement sur les quatre faces des collets, visant toujours le même point. Lorsqu'on trouve quelque différence, on la corrige au moyen de vis butantes du réticule qui porte les fils. Si, à l'aide de cette lunette, on reconnait que l'axe optique de celle de l'instrument est incliné par rapport au limbe, on rectifie l'erreur comme il vient d'être dit pour la lunette d'épreuve.

2° Il faut mettre les axes des lunettes et conséquemment le limbe dans le plan des objets. Pour cela, on dirige l'une d'elles sur l'un d'eux; puis la seconde sur l'autre : mais, pour ne pas procéder par tâtonnements, voici comment on s'y prend, et d'abord en quelques mots, et pour pouvoir nous faire comprendre, disons quels sont les différentes pièces et les divers mouvements du cercle.

Sur le cercle gradué est placée une lunette qui y adhère au moyen d'une pince et d'une vis de rappel : cette dernière produit des mouvements aussi insensibles que possible, quand la pince est serrée : lorsqu'elle est libre, on peut donner telle impulsion aussi grande qu'on le veut avec la main seulement. Au-dessous du limbe est disposée excentriquement la seconde lunette qui se meut également à l'aide d'une pince et d'une vis de rappel. Sous le limbe se trouve un axe perpendiculaire à son plan, et qui passe dans un cylindre creux au-dessous duquel est un renflement PQ (*fig.* 287 et 287*bis*), nommé *tambour*, garni d'une pince : il sert à rendre indépendants ou à fixer l'un à l'autre l'axe et le cylindre creux. Celui-ci fait corps avec un axe de rotation AB qui lui est perpendiculaire. AB repose et pivote sur deux supports réunis par leurs parties inférieures, au moyen d'une semelle qui ne forme qu'une seule pièce avec eux. Cette partie de l'instrument se nomme la fourche, et est maintenue par deux vis M et N sur une traverse formant T sur la colonne qui est destinée à supporter le tout. La colonne est creuse et descend jusqu'à un cercle horizontal F et F', dit *cercle azimutal*, qui est fixé à un pied à trois branches. Celles-ci sont traversées par trois vis V, V', V'', qui servent à rendre la colonne verticale ou à mo-

difier son inclinaison : ces vis, à larges têtes plates en cuivre, sont en acier et terminées par des cônes aigus qui, en pénétrant dans de petits cônes creux pratiqués dans des pièces dites *gouttes de suif*, évitent que l'instrument se déplace pendant la durée des observations, parce que les gouttes de suif sont garnies en dessous de petites pointes aiguës, en acier trempé, qui entrent dans les pores ou inégalités de la table ou du massif sur lequel est placé l'instrument. Un axe vertical en fer, adhérent au cercle azimutal, pénètre dans le vide de la colonne qui est terminée dans le bas par une branche horizontale à l'extrémité de laquelle est établie une pince. Quand cette pince est serrée, la colonne et tout ce qu'elle supporte font corps avec le trépied ; quand elle est desserrée, le pied ne varie pas, mais la colonne et la partie supérieure de l'instrument peuvent pivoter autour de l'axe qui remplit le creux de la colonne. Il reste, pour compléter cette description succincte, à dire qu'à l'axe de rotation AB est adapté un quart de cercle KL, qui longe l'un des supports de la fourche, et conserve la position qu'on lui donne par l'effet d'une vis de pression H ; que, sur l'axe perpendiculaire placé sous le limbe, est posé un petit niveau dont le but est de rendre cet axe horizontal, et par conséquent le limbe vertical, quand il s'agit d'observer des distances zénithales ; que, pour cette même opération, on a placé un grand niveau sur la lunette inférieure, et qu'enfin, la lunette supérieure entraîne avec elle deux et quelquefois quatre verniers placés à angles droits.

Cela posé, disons comment on met le limbe dans le plan des objets.

On dirige deux des vis du pied, V et V', par exemple, vers l'un des objets ; on desserre la pince F, et l'on fait tourner la colonne jusqu'à ce que l'axe AB ait pris la même direction : alors on serre bien F, on rend libre l'une des lunettes, soit par son mouvement propre, soit par le mouvement général, c'est-à-dire à l'aide de la vis P du tambour. C'est surtout ce dernier moyen que l'on emploie, si les divisions allant de gauche à droite, et le vernier étant placé à zéro, c'est de l'objet de droite qu'il s'agit, et la lunette supérieure dont on fait usage la première. Pour lui donner l'inclinaison convenable, c'est-à-dire faire que le point D soit couvert par la croisée des fils, on se sert des vis V et V' du pied que les deux mains font tourner simultanément et en sens inverse. Ceci fait, on rend libre la lunette inférieure, on l'amène dans le plan vertical passant par l'objet G ; puis on desserre la vis H qui

presse sur le quart de cercle KL, et l'on fait tourner le limbe et les lunettes jusqu'à ce que celle de dessous rencontre le point de mire de l'objet de gauche. Quelques instruments ont un mouvement doux, annexé au quart de cercle KL ; mais ce n'est pas bien nécessaire. On doit remarquer que cette seconde partie de l'opération n'a pas dérangé ce qu'on avait fait dans la première : car la lunette supérieure ayant été, à dessein, établie parallèle à l'axe AB, autour duquel vient de se faire le mouvement, décrit une portion de surface cylindrique dont le rayon de la base est la petite distance de l'axe de rotation à la lunette. Celle-ci restant donc parallèle à elle-même, son axe optique ira toujours passer par l'objet D qui est à une distance infiniment grande, comparativement au déplacement de l'axe optique. On peut également employer la troisième vis du pied, pour arriver au même résultat. C'est dans cette prévision qu'on a dirigé les deux autres vis dans la direction de l'objet de droite.

La direction attribuée aux deux vis du pied et à l'axe de rotation ne pouvant être qu'approchée, il y aura lieu de recommencer plusieurs fois l'opération.

388. Nous avons dit que la lunette supérieure entraînait avec elle quatre verniers placés à angles droits, autant qu'a pu le faire le constructeur. Leur but est d'atténuer, en prenant une moyenne entre les quatre indications, les erreurs dues à la lecture et à l'imperfection de l'instrument. Voici comment on opère pour obtenir l'arc moyen parcouru par un vernier imaginaire moyen.

Supposons qu'au point de départ, les quatre verniers indiquent

$$0{,}0000 \quad +0{,}0020'' \quad +0{,}0030'' \quad -0{,}0010''$$

En désignant par + et — la position du zéro de chacun des verniers en avant ou en arrière de 100, 200 et 300^g : le départ du vernier moyen sera $\frac{+50-10}{4} = +10''$.

Si, à la fin des observations, on lit

$$\begin{array}{r} 1451^g{,}8520 \\ 8540 \\ 8480 \\ 8500 \\ \hline 34040 \end{array}$$

$$\frac{34040}{4} = 8510''$$

Le vernier moyen indiquerait donc $1451^g{,}8510''$; mais il partait de $+10''$ au lieu de zéro ; on aura donc pour résultat final l'arc moyen parcouru $= 1451^g{,}8500''$.

Afin de mettre beaucoup d'ordre dans les observations que l'on recueille sur les lieux, on a fait des tableaux dans lesquels on inscrit les angles multiples et simples, ainsi que tous les éléments de réduction dont nous parlerons plus tard.

Dans les observations du premier ordre, on prend trois ou quatre séries du même angle, et chacune le donne vingt fois. Une seule série fournissant l'angle décuple suffit généralement pour le second ordre, et l'on se contente de l'angle sextuple pour les points conclus, quand d'ailleurs la série marche bien. On écrit les angles multiples dans la colonne qui leur est destinée, à mesure qu'on les obtient, et l'on opère immédiatement les divisions par 2, 4, 6, etc., pour voir comment marche la série. Vers la fin de l'opération, les quotients successifs qui expriment l'angle simple doivent différer très-peu.

389. Pour observer une distance zénithale, il faut d'abord rendre la colonne verticale, pour deux motifs : le premier, afin que le niveau, étant calé dans la première opération, ne soit pas trop éloigné de l'être encore après le retournement, ce qui retarderait d'autant ; et, en second lieu, parce que les angles que l'on observe devant être parcourus dans un plan vertical, le limbe qui, dans sa position première, aurait été placé verticalement au moyen d'un fil à plomb, ne le serait plus dans la seconde position. Voici comment on procède : on renverse le limbe pour le mettre à peu près vertical ; on détache la lunette inférieure et on cale son niveau, en ayant soin de la placer dans la direction de deux des vis du pied. Si, après avoir fait tourner le tout autour de la colonne de 200^g, que l'on apprécie au moyen du cercle azimutal, le niveau est dérangé, on le rétablit, moitié avec les deux vis du pied mentionnées plus haut, et moitié par le mouvement propre de la lunette inférieure ou par celui du limbe. Après quelques épreuves, le niveau reste calé dans les deux positions : ce qui prouve déjà que la colonne est située dans un plan vertical perpendiculaire au niveau, et qu'ils forment entre eux un angle droit. Et ensuite, toujours au moyen du cercle azimutal, on met la lunette inférieure dans un plan perpendiculaire à celui qui la contenait d'abord, on cale le niveau seulement à l'aide de la troisième vis du pied, et l'on arrive à conclure que l'axe de la colonne, étant situé à la fois dans deux plans verticaux, est leur commune intersection, et par conséquent est vertical ; la seconde opération ayant généralement dérangé la verticalité du premier plan, il y aura lieu d'opérer par

tâtonnements successifs. Enfin, on place le limbe verticalement au moyen d'un fil à plomb : son axe est alors horizontal, et le petit niveau qu'il porte doit être calé, s'il est bien réglé; s'il ne l'est pas, on le règle au moyen du mécanisme qui est destiné à cet usage et, dans les opérations ultérieures, on peut dire que le plan du limbe est vertical lorsque la bulle est dans ses repères. Il y a quelquefois dans l'un des supports AM ou BN, une vis qui sert de buttoir, et que l'on amène jusqu'au contact d'une saillie située vers l'extrémité L du quart du cercle. C'est un second guide qui sert à rendre promptement le limbe vertical.

Pour plus de sûreté dans le pointé, on met alternativement le fil vertical à droite et à gauche de l'axe du signal, quand on observe l'angle entre deux objets; et, quand il s'agit d'une distance verticale, on fait en sorte que le point de mire soit successivement dessus et dessous le fil horizontal; ou bien on incline les deux fils à 50ᵍ chacun de chaque côté de la verticale. (*Voy.* les *fig.* 287, 287 *bis* et 287 *ter.*)

390. *Correction de l'excentricité des lunettes.* Les lunettes ne sont pas généralement disposées de manière que leurs axes optiques soient des diamètres du limbe. Dans tous les instruments, la lunette inférieure est nécessairement excentrique, à cause de l'emplacement qu'occupent l'axe et la douille CP, dans laquelle il se meut. Cherchons quelle correction cela entraîne pour les angles observés. Supposons d'abord deux excentricités : puis, dans l'expression de la correction, nous ferons l'une d'elles égale à zéro, si nous voulons exprimer que la lunette supérieure est, comme presque toujours de fait, établie de telle manière que son axe optique est dans un plan normal à la surface du limbe, et la coupant suivant un diamètre.

Soient AM, BN (*fig.* 288), les lunettes supérieure et inférieure dont les distances au centre, ou les excentricités CA, CB, seront représentées par e, e'. Nous supposons les lunettes dirigées sur D et G. Désignons par x l'angle cherché DCG, et par y l'arc BB'A'A, et voyons ce qui se passe dans l'observation. Après avoir fixé le vernier à zéro, les lunettes placées comme nous venons de le dire, on ramène l'inférieure sur D par le mouvement de tout le limbe. Le point A est alors reporté en A'', l'arc AA'' égalant BB' et la lunette supérieure prend la position A''M''. On détache ensuite cette lunette, et on la porte en A'M', de manière qu'elle soit dans la direction de G : le point A décrit donc un arc.

$A'A'' = AA' + AA'' = BB' + AA' = m$ nous aurons $y = DCA + GCB + x$.

On peut également écrire

$$y = DCB' + GCA' + m - x,$$

d'où $$m - 2x = DCA + GCB - DCB' - GCA'.$$

Remarquant que, dans les triangles DCA, DCB', GCA', GCB, les angles α, α', β, β', sont assez petits pour que l'on prenne leurs tangentes pour eux-mêmes, on aura

$$DCA = 100 - \alpha = 100 - \frac{CA}{DA} = 100 - \frac{e}{D};$$

$$DCB' = 100 - \alpha' = 100 - \frac{CB'}{B'D} = 100 - \frac{e'}{D};$$

$$GBC = 100 - \beta = 100 - \frac{CB}{BG} = 100 - \frac{e'}{G};$$

$$GCA' = 100 - \beta' = 100 - \frac{CA'}{A'G} = 100 - \frac{e}{G}.$$

Substituant ces quatre valeurs dans celle de $m - 2x$, il vient,

$$m - 2x = 100 - \frac{e}{D} + 100 - \frac{e'}{G} - 100 + \frac{e'}{D} - 100 + \frac{e}{G} = \frac{e' - e}{D} + \frac{e - e'}{G}$$

$$\text{et} \quad m - 2x = \frac{(D - G)(e - e')}{DG}.$$

On voit que nous avons, pour abréger, désigné par D et G, dans cette expression, les distances aux objets de droite et de gauche.

m est l'angle formé par la lunette supérieure dans sa première position sur D et sa dernière sur G : $\frac{m}{2}$ est l'angle entre les deux objets, quand il n'y a pas d'excentricité, ce n'est pas autre chose que x. En divisant par 2 les membres de l'équation ci-dessus, et par sin. 1'', parce que la correction doit être exprimée en secondes, nous trouvons

$$\frac{m}{2} - x = \frac{(D - G)(e - e')}{2.D.G. \sin.1''}$$

Discutons cette expression en faisant différentes suppositions sur e et e'.

Nous voyons d'abord que la correction est nulle, lorsque $e = e'$.

Si maintenant nous supposons $e = o$, elle devient

$$\frac{m}{2} - x = \frac{(G - D)\,e'}{2.D.G. \sin.1''}$$

Il est évident que presque toujours cette correction est négligeable : car elle se compose d'une très-petite fraction.

Il est remarquable que la somme des corrections d'excentricité appliquées aux trois angles d'un triangle est nulle : en effet, nommons A,B,C, les trois angles d'un triangle, et a,b,c ses trois côtés, nous aurons, pour la correction de l'angle

$$A, \quad \frac{e'-e}{2b}-\frac{e'-e}{2c}$$

$$\text{en B,} \quad \frac{e'-e}{2c}-\frac{e'-e}{2a}$$

$$\text{en C,} \quad \frac{e'-e}{2a}-\frac{e'-e}{2b}$$

et la somme égale à zéro.

On a pu remarquer encore que la correction est d'autant plus faible que les côtés sont plus grands.

391. Le *théodolite* est un instrument qui, comme le cercle, sert à observer les angles entre les objets, ainsi que les distances zénithales : mais qui a sur lui l'avantage de fournir les angles réduits à l'horizon, et d'éviter ainsi les calculs relatifs à cette correction. Cet instrument se compose de deux limbes concentriques (*fig.* 289 et 289 *bis*), l'un extérieur portant une division, l'autre intérieur portant quatre verniers. Ces deux cercles peuvent se mouvoir ensemble ou séparément : ils sont supportés par deux axes concentriques et coniques, perpendiculaires à leurs plans. L'axe du limbe intérieur est plein, l'autre est creux. Ce dernier porte un autre axe qui lui est perpendiculaire et qui repose sur deux collets adhérents à la colonne qui forme le pied de l'instrument. C'est autour de cet axe que se fait le mouvement qui sert à placer le limbe horizontalement ou verticalement. On arrête ce mouvement au moyen d'une vis pressant sur un quart de cercle vertical fixé au limbe : la vis tient à la colonne, qui est aussi composée de deux axes concentriques et coniques, servant à faire tourner tout l'instrument sans déranger les pieds, et si le plan du limbe est vertical, à le mettre dans le plan de l'azimut cherché. Une division, tracée sur le cercle horizontal placé au pied de la colonne, en facilite la recherche. L'instrument est porté par trois vis qui servent à élever ou abaisser le limbe, et à incliner la colonne. Tous les mouvements s'opèrent vite ou lentement et s'arrêtent au moyen de vis de pression et de rappel combinées.

Il existe deux lunettes : l'une supérieure servant à pointer les objets entre lesquels on mesure l'angle ; l'autre inférieure, attachée à la colonne, et servant à indiquer les dérangements que peut éprouver l'instrument. Ces lunettes ont deux fils en croix à leurs foyers comme celles des instruments précédemment décrits. La lunette supérieure est supportée par un axe perpendiculaire à sa direction, et posant sur deux collets dépendant du limbe intérieur. Elle peut ainsi décrire un plan vertical, quand son axe de rotation est horizontal.

La lunette inférieure peut aussi se mouvoir dans un plan vertical ; mais elle n'a pas de vis de rappel.

Le limbe extérieur est divisé en 400^g, et chaque grade en décigrades ou dizaines de minute centésimale. Chacun des verniers du limbe intérieur comprend 49 divisions du limbe, ou $4^g,90'$, et est divisé en 50 parties : l'approximation est donc de $20''$.

Ainsi, le vernier donne les minutes indiquées par des chiffres placés de 5 en 5 divisions, et ensuite autant de fois $20''$ qu'il y a de divisions, depuis la dernière minute jusqu'à la division qui coïncide avec l'une de celles du limbe.

Quatre loupes correspondant aux verniers, servent à lire avec plus de facilité et de précision. Le limbe intérieur est toujours un peu plus bas que l'autre, de sorte qu'en lisant on projette la division du limbe sur celle du vernier. Cela donne lieu à une parallaxe qui va souvent à plusieurs divisions ; mais on ne saurait mieux faire. Si l'on plaçait les limbes dans le même plan, les deux divisions paraîtraient très-éloignées l'une de l'autre pour pouvoir bien juger de celles qui correspondent le plus exactement, parce qu'on est obligé, pour éviter le frottement, de laisser entre les deux limbes un vide qui, vu à travers la loupe, paraît plus grand encore.

Pour observer les angles horizontaux, on place le limbe à peu près horizontal, au moyen des vis du pied ; on tire l'oculaire des lunettes, de manière à voir bien nettement les fils ; puis ensuite, on tire ensemble et les fils et l'oculaire, afin de voir les objets clairement. On cherche un point remarquable et bien visible, sur lequel on dirige la lunette de repère : puis on serre fortement la vis du cercle azimutal.

392. *Moyen de régler le niveau.* Le limbe n'a été mis horizontal qu'à peu près : il faut actuellement l'y mettre exactement. Pour cela, on se sert d'un niveau mobile (*fig.* 289 *ter*), fait de manière

à pouvoir se placer sur l'axe de rotation de la lunette. Ce niveau a d'abord besoin d'être rectifié lui-même, c'est-à-dire qu'il faut s'assurer du parallélisme de son axe et de la ligne déterminée par les piedsdes supports de ce niveau. Pour cela, on le place sur l'axe de rotation de la lunette, et on le cale au moyen des deux vis du pied de l'instrument qui, à dessein, déterminent une ligne qui lui est à peu près parallèle. Si le bas des supports ou l'axe de rotation sur lequel ils posent est parallèle à l'axe du niveau, c'est-à-dire horizontal, en enlevant le niveau et le retournant bout pour bout, il doit, dans cette nouvelle position, être encore horizontal; s'il ne l'est pas, c'est parce que ses pieds ne sont pas égaux et que l'axe de rotation est incliné à l'horizon. La correction se fait moitié avec les deux vis du pied susmentionnées, et moitié par le moyen d'une vis placée à l'une des extrémités du niveau, et dont le but est de modifier la longueur relative de ses deux pieds. Cette méthode n'étant que de tâtonnement, il faut souvent plusieurs fois répéter l'opération indiquée, avant de trouver la bulle dans ses repères, pour les deux positions symétriques du niveau.

393. Le niveau ainsi réglé, il faut placer le limbe horizontal. Le niveau étant horizontal sur l'axe de rotation, le limbe extérieur étant fixe et le vernier correspondant à une division que l'on remarque, on fait décrire 200^g au limbe intérieur. Si dans cette nouvelle position le niveau se déplace, cela indique que les supports ne posent pas sur un plan horizontal et ne sont pas de même hauteur : on corrige donc, partie avec les vis du pied, et partie avec une vis attachée à l'un des montants; et, comme précédemment, on procède par tâtonnements, jusqu'à ce que le niveau soit horizontal dans les deux positions : ensuite, on fait marcher le vernier de 100^g, on cale le niveau avec la troisième vis du pied, et l'on remet le vernier dans l'une des précédentes positions pour s'assurer que l'horizontalité n'a pas changé dans ce sens. Bientôt le niveau reste calé dans trois positions, et il le sera encore dans toutes les autres, si l'instrument est bien confectionné. Au reste, une différence de quelques divisions sur le tube de verre du niveau est de peu d'importance.

Il faut ensuite vérifier si l'axe optique de la lunette, à l'intersection des fils, est perpendiculaire à l'axe de rotation de cette lunette, de manière à décrire un plan vertical. Cela se fait en plaçant l'intersection des fils sur un objet bien visible, serrant les vis des limbes, enlevant la lunette de dessus les collets, et re-

tournant l'axe de rotation bout pour bout, c'est-à-dire, faisant tourner la lunette de 200^g autour de son axe optique. Si l'intersection des fils ne donne plus sur le même objet, cela prouve que l'axe optique ne fait pas un angle droit avec celui de rotation. On corrige cette erreur, moitié avec les vis du réticule, moitié avec l'une de celles des limbes.

394. Si l'on pointait toujours exactement à l'intersection des fils, peu importerait leur direction : mais comme on se sert généralement, pour pointer, de tout le fil vertical, il faut qu'il le soit exactement. Cela se vérifie en le mettant sur un objet bien déterminé et faisant mouvoir la lunette autour de l'axe de rotation. Le fil est vertical, si dans le mouvement il reste constamment sur l'objet : s'il n'en est pas ainsi, on desserre la vis qui fixe le réticule, puis on le fait tourner de manière à redresser le fil.

395. Quand toutes ces vérifications sont faites, l'instrument est réglé pour prendre les angles horizontaux. Supposons que les divisions aillent de gauche à droite, et voyons comment on observe les angles. On met le vernier à zéro; pour le premier ordre, on lit les trois autres alidades; on desserre la vis du limbe intérieur et l'on fait mouvoir les deux limbes ensemble, de manière à amener la lunette supérieure sur l'objet de droite; on arrête le mouvement au moyen de la pince. On examine si la lunette de repère n'est pas dérangée : si, contre l'ordinaire, elle l'était un peu, on la replacerait au moyen de la vis de rappel du cercle azimutal; puis ensuite, on remettrait la lunette supérieure sur l'objet de droite à l'aide de la pince inférieure. On desserre la pince supérieure; on fait tourner le limbe intérieur qui entraîne la lunette, jusqu'à ce qu'elle arrive dans la direction de l'objet de gauche. On examine encore si la lunette de repère n'a pas varié de position; si elle était dérangée, ce serait comme précédemment que l'on y remédierait. Le vernier a, pendant cette opération, parcouru l'arc qui mesure l'angle réduit à l'horizon : on lit donc et l'on a l'angle simple. Au moyen du mouvement général, on ramène la lunette sur l'objet de droite, et l'on procède de la même manière que la première fois. On se contente de lire les observations de deux en deux.

396. Pour observer les distances zénithales, on retire le niveau mobile; on rend la lunette supérieure à peu près parallèle au limbe, puis on la fixe dans cette position par des procédés qui peuvent varier d'un instrument à un autre, et en serrant for-



tement les vis des collets des tourillons : on desserre une vis située au-dessous du limbe, et l'on amène celui-ci dans le plan vertical ; puis on adapte un contre poids, pour faire équilibre au limbe : enfin, on desserre la vis du cercle azimutal. La colonne se trouve à peu près verticale, et on la règle définitivement au moyen d'un niveau qui y est fixé. Pour s'assurer d'abord que l'axe de la colonne et celui du niveau forment un angle droit, on rend le niveau horizontal avec les vis du pied, on lit la division du cercle azimutal, on fait décrire 200^g à l'instrument, et le niveau se retrouve dans une position parallèle à la première. S'il reste calé, c'est signe qu'il est à angle droit sur la colonne, et qu'elle est verticale. S'il n'en est pas ainsi, on corrige l'erreur moitié avec les vis du pied, moitié avec une vis attachée à l'une des extrémités du niveau : on revient à la première position, et après quelques essais, le niveau se trouve horizontal dans deux positions symétriques. Il est donc à angle droit avec l'axe qui se trouve ainsi situé dans un plan vertical. Faisant décrire ensuite 100^g à l'instrument, et calant le niveau avec la vis du pied la plus directe, on parvient, après quelques tâtonnements, à mettre le niveau horizontal dans deux directions perpendiculaires ; la colonne est donc située dans deux plans verticaux, et par conséquent verticale, si la seconde opération n'a pas dérangé la verticalité du premier plan. On a eu soin, dans ce but, de mettre le niveau dans la direction de deux des vis du pied. Néanmoins il sera nécessaire d'opérer par tâtonnements.

On s'occupe alors de rendre le limbe vertical, au moyen d'un fil à plomb. Pour cela, on fixe sur deux points opposés du limbe, deux pinces portant des lignes de repère.

Préalablement, on vérifie si les points de contact avec le limbe et les lignes de repère sont équidistants pour les deux pinces ; puis ensuite, on s'assure de la verticalité des points de repère, et par conséquent du limbe, au moyen du fil à plomb.

Si le limbe est incliné, on le redresse avec une vis sur laquelle bute le petit quart de cercle qui est situé sous le limbe : quand ce dernier est vertical, on cale un petit niveau qui lui est perpendiculaire, et qui plus tard sert à reconnaître les dérangements, et à y apporter remède, sans se servir encore des pinces et du fil à plomb.

Il s'agit ensuite de rendre la lunette parallèle au plan du limbe : cela se fait en plaçant la lunette sur un objet, arrêtant les vis des limbes, lisant la division azimutale et tournant l'in-

strument de 200g. Le limbe se trouve alors dans une position symétrique à la première. Si la lunette est parallèle au limbe, elle doit porter encore sur le même objet, à la différence du double de la distance de son axe à celui de la colonne, quantité presque nulle, eu égard à l'éloignement de l'objet visé. Si la lunette ne donne plus dessus, après toutefois, pour s'en assurer avoir ramené vers soi l'oculaire, on corrige la différence, moitié par la vis de rappel du cercle azimutal, et moitié avec la vis qui fixe la lunette au limbe. En continuant cette opération, on arrive à retrouver aux deux positions, le même objet à la croisée des fils. Quand il y aurait une légère différence dans le retournement, cela affecterait peu le résultat : aussi se contente-t-on, quelquefois, pour obtenir le parallélisme, de mettre à vue le plan du limbe sur un objet, et d'y diriger également la lunette.

Le fil principal avait été placé verticalement pour l'observation des angles, il se trouvera donc maintenant horizontal. Si d'ailleurs il ne l'était pas, on le réglerait comme il a été dit précédemment.

397. L'instrument ainsi réglé est propre à l'observation des distances zénithales. Pour y procéder, on place le vernier à zéro, on desserre la vis du limbe extérieur, on met le plan du limbe dans la direction de l'objet, le limbe étant à droite de la colonne, si les divisions vont de gauche à droite ; on serre la pince, et l'on vise exactement avec la vis de rappel, après avoir examiné si le niveau n'est pas dérangé. On tourne ensuite l'instrument de 200g, et si la bulle du niveau n'est plus dans ses repères, on l'y replace avec la vis la plus directe du pied : on desserre celle du limbe intérieur, on ramène la lunette sur l'objet, et dans ce mouvement, l'objectif a parcouru le double de la distance zénithale cherchée. En multipliant de semblables opérations, on aura le double, le quadruple, etc.

Lorsque, dans un édifice, l'ouverture par laquelle on observe n'est pas assez grande pour pouvoir placer le limbe dans les deux positions à 200g, on peut encore obtenir les distances zénithales d'un seul côté. Il y a, pour cette circonstance, une marche analogue à celle décrite pour le cercle répétiteur à la fin du n° 386.

398. *Cercle à réflexion*. Il nous reste à parler de cet instrument. Nous ne répéterons pas ce que nous avons établi n° 151, des propriétés de la lumière sur lesquelles est fondée la théorie des instruments à réflexion. Celui dont nous allons parler a beaucoup

d'analogie avec le sextant. Comme lui, il est armé d'une lunette et de deux miroirs : l'arc gradué est remplacé par une circonférence entière. Ici, l'alidade qui porte la lunette EF (*fig.* 290) et le petit miroir MN, est mobile : soit PQ le grand miroir mobile aussi, et passant par le centre C. Le vernier tracé à l'une des extrémités de son alidade est mis d'abord en O à zéro du limbe au moyen d'une vis de rappel.

Le limbe est divisé en 800 parties ou demi-grades qui, pour la mesure de l'angle que forment deux directions, exprimeront des grades ; quelquefois même, chaque partie étant divisée en deux, ces plus petites divisions fournissent les demi-grades de l'angle observé. Supposons le vernier divisé en dix, et embrassant neuf petites divisions du limbe, l'estimation sera, comme nous le savons calculer déjà, de cinq minutes. Cela posé, si d'ailleurs l'instrument est divisé de droite à gauche, on vise l'objet de droite avec la lunette EF ; puis on fait tourner le grand miroir, l'alidade qui le porte et qui d'avance a été mise à zéro, et enfin le limbe lui-même, jusqu'à ce que la position de ce grand miroir PQ soit telle, qu'il fasse coïncider la seconde réflexion de G avec le rayon ED qui vient directement de l'objet de droite. On fixe alors au limbe, et au moyen d'une vis de pression, la lunette qui, jusque-là, en avait été indépendante ; on la dirige sur l'objet de gauche, en imprimant à tout l'instrument un mouvement de droite à gauche. Il est évident que les deux miroirs conservant encore leurs positions relatives, l'observateur apercevrait à la fois le point G et un point à sa gauche, de la même quantité angulaire que D l'est vers la droite ; si l'on desserre la vis qui fixait l'alidade au limbe, on pourra, en la faisant tourner, amener le miroir PC à être parallèle à MN ; le zéro du vernier aura atteint alors le chiffre qui exprime l'angle des deux objets, en ne parcourant cependant réellement que l'angle des deux miroirs. On pourrait donc lire l'angle simple ; mais, puisque tel n'est pas le but, on continue le mouvement que l'on a imprimé à l'alidade, jusqu'à ce que le miroir PQ renvoie la seconde réflexion de D dans la direction de l'axe optique de la lunette. La lecture donne alors le double de l'angle que forment les directions CD, CG. Pour obtenir plus de précision, en multipliant les observations, on rend libre la lunette que l'on dirige de nouveau sur D, et l'on continue comme précédemment.

Les conditions auxquelles doit satisfaire cet instrument sont :

1° Que la lunette soit parallèle au plan du limbe ;

2° Que les miroirs soient perpendiculaires au limbe.

Le moyen de s'en assurer étant donné au n° 155, nous nous abstenons de le reproduire ici.

399. On se sert encore de cet instrument pour mesurer les hauteurs des objets au-dessus de l'horizon. Sur terre, on emploie un horizon artificiel, qui est formé par du mercure contenu dans une boîte : sa surface est toujours réfléchissante et horizontale. L'horizon artificiel est placé en M (*fig.* 291), en avant de l'œil qui y aperçoit directement l'image A' de l'astre, et qui, au moyen du cercle, reçoit la seconde réflexion de A dans la direction OA'. On obtient ainsi l'angle AOA' qui diffère trop peu de AMA', pour que l'on tienne compte de la différence. On a par conséquent la hauteur de l'astre au-dessus de l'horizon, en prenant la moitié de l'angle observé.

En mer, on prend l'angle entre l'astre dont on veut connaître la hauteur et le point de l'horizon situé dans son plan vertical ; mais rien ne détermine, *à priori*, ce plan vertical ; pour préciser l'observation, il faut alors avoir recours à l'observation suivante ; l'angle entre l'astre et un point quelconque de l'horizon de la mer, variable avec celui-ci, atteint son minimum lorsque le point employé est dans le vertical de l'astre. Si donc on a observé dans ce dernier plan et qu'on incline ensuite l'instrument, après avoir serré les vis des miroirs, l'image du point de l'horizon de la mer correspondant à la nouvelle position devra s'écarter de l'image de l'objet, puisque l'angle qui s'y rapporte est plus grand que celui qui a déterminé la position des miroirs. Il suffira donc, pour opérer dans le plan vertical de l'astre, d'imprimer à l'instrument un petit mouvement d'oscillation et de saisir l'instant où la trajectoire décrite par l'image de l'astre se trouve tangente à l'image de l'horizon de la mer.

Cette méthode d'observation donne en réalité, non pas l'angle avec l'horizontale du lieu, mais bien celui qui est formé avec l'horizontale de l'horizon de la mer.

Pour les marins qui observent sur le tillac d'un navire dont la hauteur est toujours très-petite, l'erreur qui en résulte est toujours très-petite elle-même. Cependant, il peut se présenter des circonstances dans lesquelles une hauteur plus considérable du lieu de l'observation au-dessus de la surface de la mer donne naissance à une erreur assez importante qu'il est nécessaire de corriger. Soit O la position de l'observateur situé à une hauteur m au-dessus de la surface MN de la mer (*fig.* 291 *bis*). L'angle

observé sera H au lieu d'être h. L'erreur $H - h$ est l'angle des tangentes aux points M et O, angle égal à celui des rayons et que nous appellerons α. En désignant par R le rayon terrestre, on a évidemment

$$\cos.\alpha = \frac{R}{R+m} = \frac{1}{1+\frac{m}{R}} = 1 - \frac{m}{R} \text{ approximativement.}$$

Pour rendre cette expression calculable par logarithmes, on peut la remplacer par

$$2 \sin.^2 \tfrac{1}{2}\alpha = 1 - \cos.\alpha = \frac{m}{R}, \qquad \sin.\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{m}{2R}}$$

α est l'erreur qui affecte l'angle à l'horizon. La formule donne cet angle exprimé par un rapport ; pour avoir son expression en secondes, nous savons qu'il faut diviser par sin. 1'' ; la correction que devra subir l'angle observé sera donc

$$\alpha'' = \frac{1}{\sin.1''} \sqrt{\frac{2m}{R}}$$

Si l'on n'avait pas d'horizon artificiel, on pourrait encore obtenir la distance zénithale d'un astre ou d'un objet élevé au-dessus de l'horizon par un procédé commun à tout autre instrument qui aurait un cercle gradué et une lunette : car nous ne ferons ici aucun usage des miroirs. Ce procédé consiste à fixer, au moyen d'un étrier, un niveau au prolongement du diamètre qui porte le grand miroir : en effet, fixons le vernier L de la lunette (*fig.* 292) sur le zéro du limbe, et visons l'objet O.

L'alidade AC du grand miroir a été rendue libre d'abord, et on la fixe ensuite dans la position pour laquelle le niveau est calé, le point visé O étant toujours à la croisée des fils de la lunette qui, pour cette manière d'opérer, doit porter un réticule inutile dans l'usage habituel du cercle à réflexion. L'on fait ensuite exécuter une révolution de 200^g à l'instrument, on rend libre la lunette dont le vernier marquera le double de la distance zénithale, lorsque le niveau fixé au limbe sera calé et lorsqu'on apercevra le point O à la croisée des fils.

Cette méthode est, en définitive, celle indiquée pour l'usage du cercle répétiteur et du théodolite ; elle serait très-difficile à employer avec le cercle à réflexion sans support fixe.

400. *Causes d'erreur qui affectent la mesure des angles.* Pour apprécier l'exactitude des résultats auxquels on peut arriver,

ainsi que des conditions auxquelles il faut satisfaire pour avoir de bonnes observations, il est nécessaire de se rendre compte des causes d'erreur possibles, ou tout au moins des principales d'entre elles. Nous supposerons que l'observateur satisfait exactement aux conditions exigées de l'instrument qu'il emploie, conditions qui ont été expliquées lors de la description des instruments usités pour les opérations géodésiques. Observons ici que toutes les prescriptions alors indiquées n'ont pas même importance. Ainsi, pour ne prendre qu'un exemple, une horizontalité, quelque peu défectueuse du limbe du théodolite, aurait pour résultat de projeter les angles sur un plan quelque peu différent du plan horizontal. Il s'en suivrait une erreur, il est vrai, mais une erreur fonction seulement, de l'inclinaison donnée au limbe et toujours beaucoup plus petite que cette inclinaison.

Si, au contraire, dans la mesure à l'horizon, avec le même instrument, le mouvement général n'a pas été très-fortement arrêté, le mouvement particulier de la lunette nécessaire pour pointer à gauche pourra entraîner le limbe, et l'erreur commise aura une grande influence, car elle se transportera en vraie grandeur sur la mesure de l'angle, ou du moins sur le multiple de cet angle. Disons, en passant, que c'est dans ce déplacement possible, et dont la constatation ne peut avoir lieu, que consiste l'infériorité du théodolite comparé au cercle répétiteur pour lequel le déplacement sera indiqué par la seconde lunette qui, dans le cas analogue, doit rester pointée sur l'objet de droite. L'importance de cette grave cause d'erreur ne peut être atténuée qu'en faisant pivoter la lunette du théodolite, tantôt à droite, tantôt à gauche, pour l'amener par son mouvement particulier au pointé de l'objet de gauche.

Nous ne pouvons pas passer en revue tous les cas qui se présentent dans l'usage des instruments répétiteurs. C'est à la sagacité de l'observateur à apprécier l'importance relative des diverses prescriptions indiquées; dans le doute, il devra se rappeler que trop de précautions prises ne peuvent avoir d'autre influence qu'une légère perte de temps, tandis que leur insuffisance peut nuire à l'exactitude des résultats.

Les causes d'erreur indépendantes de l'observateur sont les suivantes :

1° Mauvaise division du limbe ; — 2° axe de rotation différent du centre du limbe ; — 3° erreur de pointé ; — 4° erreur de lecture ; — 5° dérangement d'une partie de l'instrument.

Passons-les successivement en revue :

1° *Mauvaise division du limbe.* Pour que les arcs parcourus par les verniers mesurent bien les angles, il faut que les divisions du limbe soient parfaitement égales. Quelque soin qu'on apporte à la construction de l'instrument, il y aura toujours certaines inégalités commises.

2° *Excentricité de l'axe de rotation.* Il faut de plus que les angles aient leurs sommets au centre du cercle gradué, sans quoi, trop grandes dans une position, les mesures seraient trop petites dans la position opposée.

Comme la première, cette condition ne sera jamais rigoureusement satisfaite ; les meilleurs instruments, avec le temps, deviennent sujets à l'erreur qui en résulte, par suite de l'*usure des centres.*

L'usage des instruments répétiteurs obvie en partie à ces deux inconvénients. En effet, par suite de la répétition, le même angle est mesuré successivement dans différentes parties du limbe, et s'il a été mesuré une première fois avec les divisions trop grandes, il peut l'être une autre fois avec les divisions trop petites. Il y a donc compensation tout au moins partielle. L'usage de plusieurs verniers agit dans le même sens.

3° *Erreur de pointé.* Cette erreur peut provenir, soit de l'imperfection inévitable dans toutes les opérations des hommes, soit du doute qui peut exister sur le point à viser lui-même. Les instruments répétiteurs tendent à diminuer l'influence de la première cause, car dans la seconde visée, il y a chance de commettre une erreur inverse de la première. La compensation n'aura pas toujours lieu, mais elle est possible pourtant, et le cas le plus défavorable n'atteindrait jamais que la même erreur commise dans l'opération simple.

L'influence des instruments répétiteurs n'est plus aussi évidente quand il s'agit du vague qui peut exister dans le pointé par suite de la nature du point visé.

Les sommets de triangles, qui devraient être des points mathématiques, ne sont souvent qu'une conséquence de la forme des monuments qui, éclairés différemment suivant la position du soleil, apparaissent à l'observateur sous des aspects différents. Ainsi, l'axe d'une tour circulaire devant être sommet du triangle ne sera pas vu directement d'une autre station, et l'observateur sera obligé de prendre, pour sa position, le milieu de la partie visible, laquelle partie varie avec la position du soleil. De là

naît la correction de *phase* dont il est possible de tenir compte dans quelques cas, mais qu'on néglige la plupart du temps.

Le point qui devrait être visé peut devenir invisible et être remplacé par un autre défectueux. Ainsi, quelquefois les clochers qui servent de signaux ne sont pas verticaux, en sorte que l'extrémité de la flèche qu'on a choisie pour représenter une station n'étant plus visible quand l'éloignement devient considérable, se trouve remplacée, pour l'observateur, par un autre point moins élevé qui n'est plus sur la même verticale. Cette cause d'erreur a une influence plus grande encore pour les distances zénithales, que la flèche soit ou ne soit pas verticale.

Il n'y a pas d'autre moyen d'obvier à ces défectuosités du pointé, que de changer la nature du signal. Pour bien faire, il faudrait surmonter le monument d'une mire pour laquelle le doute ne serait plus possible, comme cela a lieu dans les signaux construits *ad hoc*.

Outre l'emploi de cette mire, on avait songé pour les opérations très-importantes à observer de nuit des *signaux de feu*, tels que des réverbères ; mais on y a trouvé des inconvénients graves provenant de la *réfraction*. Généralement, l'effet produit par ce phénomène est de faire paraître le point vu plus élevé que celui de la nature, en le laissant dans le même vertical. Les angles dans le sens horizontal n'en sont pas affectés, et l'on sait corriger approximativement l'erreur commise sur les distances zénithales. Mais il n'en est plus de même pour les observations de nuit ; l'état de l'atmosphère est soumis à de bien plus grandes variations que dans le jour, et les séries de la même distance zénithale observée varient entre elles, quelquefois, de plusieurs minutes.

D'un autre côté, il ne semble plus exact de supposer que la réfraction n'a d'influence que dans le plan vertical ; on est porté à croire qu'il existe aussi des réfractions latérales pour les rayons géodésiques qui sont toujours très-rapprochés du sol, parce qu'alors la terre rayonne au lieu d'absorber la chaleur.

On a donc été forcé d'abandonner les observations de nuit, et on se contente de faire signaler aussi bien que possible les points les plus importants.

Les observations doivent se faire par un temps calme, ni trop matin, ni trop tard, afin d'éviter les irrégularités de la réfraction.

4° *Erreur de lecture.* En admettant que l'angle marqué par le vernier soit bon, on commettra toujours quelque erreur dans

la lecture. Ici, reparaît l'avantage des instruments répétiteurs. Avec ces instruments, on lit tous les multiples pairs de l'angle, et on fait les quotients seulement pour voir si les séries marchent bien ; mais l'angle que l'on choisit est le dernier quotient. L'erreur de lecture se trouve alors divisée par le dernier coefficient.

Les quatre verniers atténuent encore l'influence de cette erreur de lecture.

5° *Dérangement d'une partie de l'instrument pendant l'opération.* On évitera cette cause d'inexactitude en suivant exactement les prescriptions indiquées pour la manœuvre des instruments géodésiques, et en se pénétrant bien des principes exposés au § 347-4, relativement à la mesure des angles effectuée avec le secours d'une lunette.

401. *Approximation des résultats.* Toutes ces causes d'erreur combinées, indépendamment de celles qui peuvent provenir du fait de l'observateur, font qu'on ne peut pas répondre de la valeur rigoureusement exacte de l'angle. Plus les opérations sont importantes, plus on répète un grand nombre de fois les observations du même angle pour atténuer l'influence de certaines de ces causes.

Il existe un moyen de calculer directement l'excès sphérique des triangles, excès qui, comparé à la différence à 200g de la somme des trois angles, conduit à la connaissance de la somme des trois erreurs. Cette opération, répétée très-souvent, a fait voir que cette somme ne descendait pas généralement au-dessous de 12 à 15'', et que, par suite, on ne peut pas répondre de la valeur des angles horizontaux à moins de 4 ou 5'' près.

Quant aux distances zénithales, la variation probablement continuelle de la réfraction, l'usure des centres qui déplace l'axe de rotation et peut-être une légère flexion de la lunette ou du fil horizontal du réticule, font que les séries concordent beaucoup moins bien, et que, par exemple, trois séries du même angle différant entre elles de 50'', en moyenne, on ne peut pas répondre des mesures obtenues, à moins de 15 à 20'' près. En outre de ces erreurs variables, les distances zénithales paraissent affectées d'une erreur négative proportionnelle à leurs sinus, erreur peu importante qui est attribuée à l'usure des centres.

On ne sera pas étonné de l'importance des inexactitudes commises dans la mesure des angles, si l'on reporte sa pensée vers toutes les causes d'erreur que nous avons signalées précédem-

ment, et si l'on y ajoute cette observation que les fils des réticules qui servent au pointé sous-tendent à l'œil de l'observateur un angle d'environ 10″. On avait pensé, pour diminuer la valeur de cet angle, à tracer deux lignes très-tenues sur un verre à faces parallèles. On a dû renoncer à ce système, par suite des effets de diffraction qui se produisent, et surtout par suite de la réflexion de ces lignes sur la seconde face du verre, réflexion qui double l'image du réticule.

Nous terminerons les observations relatives à la mesure des angles, en disant que l'usage des instruments répétiteurs n'est pas adopté par tout le monde. Ainsi, les Anglais préfèrent le sextant au cercle à réflexion, par exemple, et ils recommencent plusieurs fois la mesure du même angle en remettant le vernier à o. A dimension égale, le premier de ces instruments a des divisions plus grandes, il est vrai, mais là est son seul avantage; les lunettes, de même longueur, ont même puissance et donnent le même pointé; le défaut d'exactitude des divisions ou de centrage de l'axe de rotation existe avec toute son importance, puisque l'angle est toujours mesuré avec les mêmes graduations; la lecture, rendue plus facile par l'augmentation du rayon, est d'un autre côté entachée, au résultat final, d'une erreur que le calcul des probabilités indique égale à $\frac{\alpha}{\sqrt{n}}$ en désignant par α la valeur possible de l'erreur commise dans la lecture d'un angle, et par n le nombre des *réitérations*. Nous savons que par la *répétition* des angles, cette erreur est $\frac{\alpha'}{n}$, α' étant l'erreur de lecture isolée, qui pour l'instrument répétiteur d'un rayon moitié de celui employé pour la réitération est égal à 2α. Pour que l'avantage reste à la répétition sur la réitération, il suffit donc que $\frac{2\alpha}{n} < \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$ ou $\sqrt{n} > 2$, $n > 4$. Les répétitions étant toujours multipliées plus de 4 fois, il vaut donc mieux se servir des instruments répétiteurs, pour cette cause et pour celle que nous avons énoncée plus haut, relativement à la mauvaise division du limbe et au défaut de centrage.

CHAPITRE IV.

CALCULS RELATIFS A LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES.

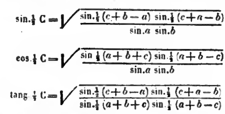
402. *Réduction des angles à l'horizon.* Quand on observe les



angles au moyen du théodolite, ils sont tout réduits à l'horizon ; mais ils doivent subir une correction lorsqu'ils sont mesurés avec le cercle.

Soient O (*fig.* 293) le centre de la station, OC la verticale, D et G les deux objets entre lesquels on a observé l'angle : leurs distances zénithales seront CA et CB, que l'on désigne par δ et δ' ; l'angle observé est mesuré par l'arc AB. Si l'on suppose décrits avec le même rayon qui est quelconque, et que l'on peut, pour simplifier, supposer égal à l'unité, les deux arcs CA, CB, l'angle réduit à l'horizon sera l'angle C du triangle, et sa mesure ou celle de l'angle dièdre formé par les deux plans verticaux sera bien l'arc A'B' compris dans le plan A'OB perpendiculaire à leur intersection commune OC.

La question est donc ramenée à la résolution d'un triangle dans lequel on connaît les trois côtés. La trigonométrie sphérique nous fournit les formules



$$\sin.\tfrac{1}{2}\,C = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(c+b-a)\,\sin.\frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin.a\,\sin.b}}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}\,C = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\,\sin.\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin.a\,\sin.b}}$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,C = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(c+b-a)\,\sin.\frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin.\frac{1}{2}(a+b+c)\,\sin.\frac{1}{2}(a+b-c)}}$$

Nous avons expliqué, n° 63, pourquoi la troisième est généralement préférable. Il y aurait ici, pour les deux premières, l'inconvénient d'avoir sous le radical, un dénominateur formé du produit de deux sinus qui varient très-lentement, puisqu'ils appartiennent à des angles δ et δ' différant toujours peu de 100^g : quant à la troisième, elle aurait l'inconvénient commun aux deux autres, d'être composée de facteurs qui marchent suivant une loi trop peu sensible entre les limites zéro et l'unité. On a donc préféré, pour obtenir plus de précision, employer une méthode déjà usitée en d'autres circonstances qui, au lieu de C, donnât la différence $C-c$, et qui, en même temps, contenant des tangentes et cotangentes au lieu de sinus, fût beaucoup plus rigoureuse dans la pratique, puisque la moindre différence sur un angle fait bien plus varier ces nouveaux facteurs qui, de 0 à 100^g, prennent toutes les grandeurs comprises entre zéro et l'infini. Un autre avantage de la formule que nous allons démontrer est la possibilité de la réduire en tables. Cette considération est

d'une grande importance pour des calculs tels que les réductions qui se reproduisent si souvent dans les calculs géodésiques.

Pour y arriver, reprenons la formule

$$\cos.C = \frac{\cos.c - \cos a \cos b}{\sin.a \sin b}$$

de laquelle avaient été déduites les précédentes. Désignons par x la différence cherchée, et nous aurons

$$\cos.C = \cos.(c + x) = \cos.c \cos.x - \sin.c \sin x$$

Nous pouvons dégager x de ses lignes trigonométriques, au moyen des développements en série, et négliger toutes les puissances supérieures à la première, en raison de la petitesse de x qui sera justifiée plus tard : remplaçons aussi a et b par leurs compléments α et β, et égalons les deux valeurs de C ; nous aurons

$$\cos.c - x \sin.c = \frac{\cos.c - \sin.\alpha \sin.\beta}{\cos.\alpha \cos.\beta}$$

Le but de l'introduction de α et β a été de substituer des angles très-petits, dont les lignes trigonométriques pourront encore être remplacées avec avantage par les développements en série : nous remarquerons cependant que α et β ayant presque toujours des valeurs notablement plus grandes que celle de x, nous devrons conserver les seconds termes qui sont de deuxième puissance dans les séries qui représentent leurs sinus et cosinus : la formule deviendra

$$\cos.c - x \sin c = \frac{\cos.c - \alpha\beta}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)\left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)} = \frac{\cos.c - \alpha\beta}{1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)} =$$

$$(\cos.c - \alpha\beta)\left[1 - \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right]^{-1}$$

et parce que le second terme $\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$ est très-petit, et que l'on peut s'en tenir aux deux premiers du développement de la puissance

$$\cos.c - x \sin.c = (\cos.c - \alpha\beta)\left[1 + \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right]$$

On arrive au même résultat, indépendamment du développement du binôme, en multipliant le numérateur et le dénominateur par $1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$: car alors le dénominateur devient $\left[1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right]$ $\left[1 + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right]$, c'est-à-dire le produit d'une somme par une différence ou la différence des carrés : or, nous avons dit que nous négligions les termes de troisième et, à plus forte raison, de qua-



trième puissance ; il en résulte donc que $1-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2$ se réduit à l'unité et que le second membre de l'équation est encore ce que nous avons trouvé par la première méthode.

Effectuant les opérations indiquées et négligeant le quatrième terme $-\frac{\alpha\beta}{2}\frac{1}{8}(\alpha^2+\beta^2)$ du produit, comme de quatrième ordre ; puis, supprimant cos.c commun aux deux membres, changeant tous les signes et divisant par sin.c

$$x=\frac{\alpha\beta-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\cos.c}{\sin.c}$$

Mais on sait que

$$\cos.c=\cos.^2\tfrac{1}{2}c-\sin.^2\tfrac{1}{2}c$$
$$\sin.c=2\sin.\tfrac{1}{2}c\cos.\tfrac{1}{2}c$$
$$1=\sin.^2\tfrac{1}{2}c+\cos.^2\tfrac{1}{2}c$$

on pourra donc écrire

$$x=\frac{\alpha\beta(\sin.^2\frac{1}{2}c+\cos.^2\frac{1}{2}c)-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)(\cos.^2\frac{1}{2}c-\sin.^2\frac{1}{2}c)}{2\sin.\frac{1}{2}c\cos.\frac{1}{2}c}$$

Réunissant d'une part les termes du numérateur qui contiennent sin.$^2\frac{1}{2}c$, et de l'autre, ceux qui contiennent cos.$^2\frac{1}{2}c$.

$$x=\frac{(\alpha\beta+\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2)\sin.^2\frac{1}{2}c-(\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2-\alpha\beta)\cos.^2\frac{1}{2}c}{\sin.\frac{1}{2}c\cos.\frac{1}{2}c}$$

Le coefficient du premier terme est la moitié du carré de $\alpha+\beta$: la parenthèse, dans le second, renferme la moitié du carré de $\alpha-\beta$, ainsi :

$$x=\frac{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2\sin.^2\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2\cos.^2\frac{1}{2}c}{2\sin.\frac{1}{2}c\cos.\frac{1}{2}c}=$$
$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\text{tang.}\tfrac{1}{2}c-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\text{cotang.}\tfrac{1}{2}c.$$

Si les angles à l'horizon α et β sont donnés par des rapports (ou nombres abstraits), x est lui-même exprimé en rapport, car il en est de même de tangente et cotangente de l'angle $\frac{1}{2}c$; la formule est homogène. Mais les angles α et β seront habituellement exprimés en secondes ; pour passer à leur expression en rapport, nous savons qu'il faut les multiplier par sin. 1'' (§ 55), et cette opération est essentielle, car les développements des sinus et cosinus en séries que nous avons invoqués ne sont vrais que pour cette expression des angles.

Si nous supposons que α et β soient des nombres de secondes, nous devrons donc multiplier chacun des termes du second membre par $\sin.^2 1''$, et le résultat nous donnera l'expression de x en rapport, expression que nous savons être égale au nombre de secondes cherché multiplié par $\sin. 1''$; ce qui donnera en définitive, par la suppression du facteur commun

$$x'' = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \text{tang.}\tfrac{1}{2}c \sin.1'' - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 \cot.\tfrac{1}{2}c \sin.1''$$

remplaçant les angles à l'horizon α et β, par $100-\delta$ et $100-\delta'$, la formule de réduction sera finalement

$$x = \left(\frac{200-(\delta+\delta')}{2}\right)^2 \sin.1'' \text{ tang.}\tfrac{1}{2}c - \left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right)^2 \sin.1'' \cot.\tfrac{1}{2}c$$

Les deux termes sont toujours de signes contraires, par la raison que c étant plus petit que 200^g, $\tfrac{1}{2}c$ est moindre qu'un angle droit, et ses tangente et cotangente sont constamment positives : de plus, les quantités renfermées dans les parenthèses étant élevées au carré sont aussi positives.

On peut calculer les deux termes par logarithmes, ou employer des tables qui les donnent plus promptement. Dans la première, on entre avec l'angle observé, et l'on trouve sur la même ligne horizontale et dans deux colonnes verticales différentes, intitulées *tangente* et *cotangente*, deux nombres de secondes dont l'un est positif et l'autre négatif. Dans la seconde table, entrant avec les arguments $200-(\delta+\delta')$ et $\delta-\delta'$, on trouve successivement deux nouveaux nombres qui, placés sous les premiers et multipliés par eux, donnent deux produits que l'on retranche l'un de l'autre pour avoir x. On peut encore préparer deux tables, analogues aux précédentes, qui donnent les logarithmes des mêmes facteurs.

Cette formule, basée sur l'hypothèse de α et β très-petits, est applicable aux opérations géodésiques seules, pour lesquelles cette condition est satisfaite. Les réductions analogues faites pour les observations astronomiques doivent se faire par la formule qui donne la tangente de $\tfrac{1}{2}$ C directement.

Observons encore que les facteurs tang. $\tfrac{1}{2}c$, cot. $\tfrac{1}{2}c$, devenant très-grands lorsque c est proche de 200^g ou de o, il y a lieu d'éviter ces deux sortes d'angles, pour lesquels l'approximation ne serait plus suffisante, dans certains cas. Ceci est, du reste, d'accord avec ce que nous avons dit relativement aux formes à donner aux triangles géodésiques.

403. *Réduction au centre de la station.* Il est souvent impossible d'observer au centre même de la station; dans ce cas, l'angle observé est susceptible d'une correction : or, on a, par rapport au triangle IOD (*fig.* 294), l'angle extérieur

$$DIG = IDO + IOD.$$

De même, en considérant le triangle GCI,

$$DIG = IGC + ICG$$

d'où

$IDO + IOD = IGC + ICG$ ou $\alpha + O = \beta + C$ ou encore $C - O = \alpha - \beta$.

Dans le triangle CDO, on a la proportion

$$\sin.\alpha : \sin.(O + y) :: CO : CD :: r : d.$$

Le triangle CGO donne également

$$\sin.\beta : \sin.y :: CO : CG :: r : g.$$

Des deux proportions on tire les valeurs

$$\sin.\alpha = \frac{r \sin.(O + y)}{d} \quad \text{et} \quad \sin.\beta = \frac{r \sin.y}{g}$$

On voit que nous désignons par d et g, les distances aux objets de droite et de gauche, par r la distance au centre, et par y, l'angle observé entre le centre et l'objet de gauche. Si nous remarquons les valeurs de sin. α et sin. β, nous voyons qu'elles sont de très-petites quantités, puisque le numérateur commun r est divisé par des quantités d et g infiniment plus grandes que lui, et qu'en outre, ces fractions sont multipliées par des sinus qui toujours sont plus petits que l'unité, maximum de grandeur qu'ils puissent atteindre. Nous pourrons donc substituer les sinus aux angles dans la valeur de C—O qui deviendra

$$C - O = \frac{r \sin.(O + y)}{d} - \frac{r \sin.y}{g}$$

Le second nombre de cette équation donne l'angle en rapport; pour avoir son expression en secondes, il faut le diviser par sin. 1'', ce qui donne pour résultat final

$$C - O = \frac{r \sin.(O + y)}{d \sin.1''} - \frac{r \sin.y}{g \sin.1''}$$

En faisant varier la position de la station O, on verrait que la formule est encore applicable, pourvu qu'on ait soin de toujours compter l'angle y compris entre l'objet de gauche et le centre de la station, en allant du premier au second de droite à gauche. Pour l'obtenir, il est inutile de remettre le vernier à zéro : les

observations multiples de l'angle étant terminées et la lunette supérieure se trouvant sur l'objet de gauche, on la fait mouvoir jusqu'à ce qu'elle soit dans la direction du centre. Le veruier indique alors $n\mathrm{O}+y$; n représentant le nombre de fois que l'angle a été répété.

y n'a pas besoin d'être connu très-exactement; mais r la distance au centre, à cause de son influence dans la formule, doit être mesuré avec le plus grand soin. Les longueurs d et g s'obtiennent avec une exactitude suffisante, soit par le calcul des triangles provisoires, soit, quelquefois même, au moyen d'un canevas graphique construit avec soin.

Lorsque les points observés sont des astres, les distances d et g devenant infinies, la réduction est nulle; elle le serait encore dans le cas particulier où les quatre points C, O, D et G se trouveraient situés sur une même circonférence; puisqu'alors les angles C et O seraient égaux, comme ayant leurs sommets sur cette circonférence, et embrassant une portion commune entre leurs côtés.

404. Si l'on a observé plusieurs angles O, O′, O″, O‴, O^iv (*fig.* 295) formant un tour d'horizon, la correction à faire à l'un quelconque de ces angles devra être égale à la somme de toutes les autres et de signe contraire. Soient C, C′, C″, C‴, C^iv, les angles corrigés; e, e', e'', e''', e^{iv} les corrections correspondantes: nous aurons

$$c=o+e,\quad c'=o'+e',\quad c''=o''+e'',\quad c'''=o'''+e''',\quad c^{iv}=o^{iv}+e^{iv}$$

d'où

$$c+c'+c''+c'''+c^{iv}=(o+o'+o''+o'''+o^{iv})+(e+c'+c''+e'''+e^{iv})$$

mais

$$c+c'+c''+c'''+c^{iv}=400^{g},\qquad o+o'+o''+o'''+o^{iv}=400^{g}$$

donc

$$c+e'+e''+c'''+c^{iv}=o \quad \text{et par suite} \quad e^{iv}=-(e+c'+c''+c''').$$

Quand on opère avec le cercle, l'angle au centre est pris sans changer la position du limbe; ainsi, les quatre points C, O, G, D sont bien dans le même plan, comme le suppose la démonstration: il est donc indifférent de commencer par le calcul de la réduction au centre, ou par celui de la réduction à l'horizon.

405. L'angle y et la distance r ne sont pas toujours très-faciles à obtenir dans la pratique. Voici quelques-uns des cas qui se présentent quelquefois:

Supposons que l'on soit placé en O (*fig.* 296) extérieurement à la tour ronde TZT'Z' : on imagine, pour avoir y, deux tangentes TO,T'O et l'on observe les angles qu'elles font avec l'objet de gauche G. Soient y' et y'' ces angles, on aura $y = \frac{y'+y''}{2}$. On peut encore prendre deux distances égales OX,OX', sur ces deux tangentes, et joignant X à X', diviser la ligne qui les unit en deux parties égales au point M qui appartient à la direction passant par le centre.

Pour avoir r, on mesure OZ, et l'on y ajoute le rayon CZ de la tour, que l'on obtient en mesurant la circonférence, ou que l'on mesure immédiatement, quand l'intérieur de la tour est accessible. Si quelque raison s'opposait à l'emploi de ces deux méthodes, on se rappellerait que

$$\overline{OT}^2 = Oz \times Oz' \quad \text{d'où} \quad Oz' = \frac{\overline{OT}^2}{Oz} \text{ et } 2R = \frac{\overline{OT}^2}{Oz} - Oz = \frac{\overline{OT}^2 - \overline{Oz}^2}{Oz}$$

R représente le rayon de la tour, tandis que r exprime la distance au centre.

$$r = Oz + \tfrac{1}{2}zz' = Oz + R = Oz + \frac{\overline{OT}^2 - \overline{Oz}^2}{2Oz} = \frac{\overline{OT}^2 + \overline{Oz}^2}{2Oz}$$

On peut encore trouver le rayon R de la tour, ou directement la distance au centre r, au moyen du triangle CTO, rectangle en T, dans lequel on a mesuré le côté TO, et dont on connaît l'angle COT, qui est égal à $\frac{y''-y'}{2}$.

On trouve, en effet, $CT = R = TO.\,\text{tang.}\frac{y''-y'}{2}$

$$CO = r = \frac{OT}{\cos.\frac{y''-y'}{2}} = OT.\,\text{séc.}\frac{y''-y'}{2}$$

Supposons maintenant que C soit le centre d'une tour carrée ABDE (*fig.* 297). Si de O, les extrémités A, D d'une diagonale sont visibles, on imagine les droites qui unissent ces points au lieu de l'observation, et à partir de ce dernier, on porte deux longueurs O*a*, O*d* proportionnelles à OA, OD qui sont mesurables. Le milieu de AD appartiendra à la direction OC. Une autre méthode consiste à abaisser OP perpendiculairement sur la face AE ou sur son prolongement. On suppose C*m* perpendiculaire

aussi sur AE, et l'on a deux triangles semblables Cmq, Opq, qui fournissent la proportion suivante

$$Cm : mq :: Op : pq \quad \text{ou} \quad Cm : mq :: Cm + Op : mq + pq$$

de là
$$mq = \frac{Cm \times mp}{Cm + Op}$$

et tout est connu dans le second terme ; m est à égale distance de A et E ; la position de q est donc déterminée ; puis en prenant l'angle entre OG et Oq on aura y.

Pour obtenir la distance au centre r, on a

$$r = Oq + Cq = Oq + \sqrt{\overline{Cm}^2 + \overline{mq}^2}$$

ou encore,

$$Cq : Oq :: Cm : Op, \quad Cq = \frac{Cm.\,Oq}{Op};$$

$$r = Oq + Cq = Oq + \frac{Cm.Oq}{Op} = Oq\left(1 + \frac{Cm}{Op}\right) = \frac{Oq}{Op}(Op + Cm)$$

Quand la base sera un polygone irrégulier, on emploiera, pour arriver à la connaissance des éléments de réduction, les procédés que peut fournir la géométrie ; mais, si la recherche devenait trop difficile ou trop incertaine, il faudrait faire choix d'un autre point de station et abandonner celui-là.

Ce serait ici le lieu de parler de la correction de phase : mais comme elle est très-rarement employée, nous nous abstiendrons de nous en occuper. Nous nous bornerons à dire qu'elle est due à ce que le signal que l'on observe étant éclairé par le soleil et son axe n'étant pas visible, on pointe sur le milieu de la partie éclairée, et alors le rayon visuel ne passe généralement pas par l'axe du signal.

406. *Calcul des triangles.* Après avoir fait subir aux angles observés les corrections relatives aux réductions au centre et à l'horizon, ils appartiennent aux triangles définitifs que l'on doit calculer pour trouver les côtés ; s'ils sont encore affectés d'erreur, elles ne sont dues qu'à l'incertitude du pointé et de la lecture, ainsi qu'à l'imperfection de l'instrument. Si, plus tard, nous avons le moyen de calculer l'excès sphérique d'un triangle, nous le comparerons à l'excès de la somme des trois angles corrigés sur deux droits, et la différence sera l'erreur dont nous venons d'indiquer les causes.

Si la terre était sphérique, on calculerait les côtés des trian-

gles par les formules de la trigonométrie sphérique, le plus habituellement par la formule des quatre sinus; mais comme nous savons que ces formules ne donnent que des relations entre des angles, il serait nécessaire de transformer la base b de départ connue en mètres; son expression en angle serait, en désignant par R le rayon de la sphère, $\frac{b}{R}$ en rapport ou $\frac{b}{R \sin.1''}$ en secondes; tous les résultats des calculs subséquents seraient les valeurs en secondes des côtés inconnus des triangles, valeurs dont la forme serait convenable pour le calcul des coordonnées. Il n'y aurait que pour la recherche des altitudes qu'on devrait les transformer inversement, afin de connaître les nombres de mètres renfermés dans les arcs terrestres qui les mesurent.

Mais la surface de la terre n'est pas sphérique; elle se rapproche de celle d'un ellipsoïde de révolution. Dans cette circonstance, le premier moyen qui se présente à l'esprit est le suivant :

Les côtés géodésiques sont nécessairement toujours très-petits par rapport aux dimensions de la terre, et il en est par suite de même des surfaces des triangles par rapport à la surface terrestre. On peut donc, approximativement, les regarder isolément comme appartenant à une sphère qui se confondrait avec l'ellipsoïde pendant l'étendue de chaque triangle considéré, et les résoudre alors comme triangles sphériques.

Pour agir ainsi, il est d'abord nécessaire de rechercher quel serait le rayon qui conviendrait le mieux à chacune de ces sphères. Nous rappellerons à ce sujet, sommairement, quelques notions de géométrie.

Si en un point d'une courbe on mène la tangente et la normale, tout cercle dont le centre sera situé sur cette dernière sera tangent à la courbe. Ces cercles, en nombre infini, ont des rayons allant de o à l'infini, le premier répondant au point et le second à la tangente. Parmi eux, il en est un, dépendant de la forme particulière de la courbe, qui a avec celle-ci un contact plus intime que tous les autres; on l'appelle *cercle osculateur*, et sa définition analytique est la suivante : il a avec la courbe trois points communs infiniment rapprochés, et par suite son équation a non-seulement même coefficient différentiel que celle de la courbe, propriété qui est commune à toutes les courbes tangentes, mais elle a encore même coefficient différentiel de second ordre. Quoi qu'il en soit de la définition d'un tel

cercle, il existe et peut être considéré comme se confondant avec la courbe pendant une étendue assez notable, relativement à son rayon qui reçoit le nom de rayon de courbure de celle-ci.

Si de la considération d'une ligne nous passons à celle d'une surface, nous dirons que si en un point quelconque on suppose une suite de sections planes, déterminées par des plans normaux, chacune de celles-ci aura un cercle osculateur dont le rayon pourra être regardé comme celui d'une sphère. Les sphéres ainsi obtenues seront plus intimement tangentes à la surface considérée que toutes les autres ayant seulement leurs centres sur la normale, et le contact sera mieux établi, pour chacune d'elles, dans le sens de la section pour laquelle son rayon sera celui du cercle osculateur de cette section.

Si nous appliquons les considérations précédentes à l'ellipsoïde de révolution supposé convenir à la surface terrestre, nous verrons que parmi toutes les sphères osculatrices dans les divers sens, il en existe deux plus importantes que les autres, et dont la recherche analytique est assez simple. Ce sont celles dont les rayons sont ceux des cercles osculateurs au méridien et au perpendiculaire. L'un est le plus petit et l'autre le plus grand des rayons relatifs aux diverses sections planes passant par le point considéré. Chacune de ces sphères se confondant avec la surface de l'ellipsoïde pendant une certaine étendue, pourra être regardée comme contenant la surface d'un triangle géodésique. La sphère osculatrice dans le sens du parallèle, constante pour toute l'étendue de ce parallèle, ayant dans tous les autres sens un contact plus intime que celle qui est osculatrice dans le sens du méridien, serait, pour la résolution des triangles, préférée à cette dernière. Son rayon est celui de la grande normale du parallèle.

Si tous les triangles du réseau géodésique se trouvaient sous le même parallèle, c'est-à-dire, s'ils avaient même latitude moyenne, il suffirait pour leur résolution de les considérer comme situés sur la sphère appartenant à cette latitude, et le calcul se ferait simplement comme nous l'avons indiqué pour l'hypothèse de la terre sphérique. Mais il n'en est pas ainsi, et situés sous des latitudes différentes, ils devront être regardés comme appartenant à des sphères de rayons différents. De là naîtrait une grande complication dans les calculs. Il faudrait, en effet, après avoir réduit un côté en secondes, sur une sphère, calculer un deuxième côté comme appartenant à la même surface, puis rechercher la

nouvelle valeur en secondes de l'angle qu'il sous-tendrait au centre d'une seconde sphère convenable pour la résolution du triangle suivant, c'est-à-dire, multiplier la première valeur par le rapport inverse des rayons. Ceux-ci dépendant des latitudes moyennes des deux triangles, on voit qu'il aurait été nécessaire d'effectuer d'abord un calcul approximatif de ces latitudes, en supposant tous les triangles situés sur la même sphère.

Pour éviter les complications du calcul résultant de la variation des rayons des sphères, on a proposé deux moyens. Nous d - rons d'abord quelques mots du procédé de Delambre, parce qu'il a été employé dans la mesure de l'arc du méridien de Dunkerque à Perpignan qui a servi à déterminer le mètre.

Ce procédé substitue à la résolution du triangle sphérique celle du triangle rectiligne formé par les cordes des arcs qui déterminent le premier.

Soient a, b, c les longueurs métriques de ces côtés, a', b', c' les cordes correspondantes. Il est évident que si r désigne le rayon de la sphère qui peut être regardée comme contenant le triangle, on a $a' = 2r \sin.\frac{1}{2}\frac{a}{r}$, et de même pour b et c'. L'angle $\frac{a}{r}$ étant toujours très-petit en géodésie, on peut écrire $a' = 2r \left(\frac{a}{2r} - \frac{a^3}{2.3.8\, r^3}\right)$, d'où $a - a' = \frac{a^3}{24.r^2}$. Le côté du triangle rectiligne substitué variera en réalité avec le rayon de la sphère substituable à l'ellipsoïde, c'est-à-dire, variera suivant qu'on le considérera comme appartenant à un premier triangle ou à un second, mais cela assez peu, en raison de la forme de la fonction, pour qu'on puisse regarder le rayon comme constant, ce qui n'avait pas lieu dans le premier procédé indiqué. On évitera donc ainsi les complications du calcul qui résultaient de cette variation du rayon.

Si A, B, C désignent les angles du triangle sphérique, A', B', C' ceux du triangle des cordes, les premiers seront les réductions, à l'horizon, des seconds dont les côtés auront des inclinaisons $\frac{1}{2}\frac{b}{r}, \frac{1}{2}\frac{c}{r}, \frac{1}{2}\frac{a}{r}$. On pourra donc déterminer A', B', C' par la formule du § 402, formule qui renferme, il est vrai, les angles $\frac{a}{r}\frac{b}{r}\frac{c}{r}$ dont deux sont inconnus dans la résolution des triangles géodésiques, mais qui, en raison de la petitesse de la correction, n'exige que la connaissance approchée de ces angles. Cette connaissance approchée s'obtiendra par une première résolution du triangle considéré comme plan, et par l'emploi d'une valeur approchée et

constante de r. Au moyen des données A, B, C, b, il sera donc possible de trouver A', B', C', b', et par suite de calculer a' et c', qui feront connaître a et c par la formule $a = a' + \frac{a^3}{24.r^2}$ dans dans laquelle on remplacera, sans erreur sensible, la correction $\frac{a^3}{24.r^2}$ par $\frac{a'^3}{24.r^2}$

La dernière méthode proposée, de beaucoup préférable, et la seule en usage actuellement, substitue au triangle sphérique un triangle rectiligne ayant mêmes longueurs de côtés ; elle a, comme la première, l'avantage de ne pas exiger la connaissance exacte du rayon de la sphère.

Elle s'appuie sur un théorème dont nous allons donner la démonstration.

407. *Théorème de Legendre.* Lorsque les côtés d'un triangle sphérique sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, on peut le résoudre comme un triangle rectiligne dont les côtés ont même longueur, et dont les angles sont respectivement égaux à ceux du triangle sphérique, diminués chacun du tiers de l'excès sphérique. Les quantités que l'on néglige dans ce cas (car l'énoncé n'est pas rigoureusement exact) ne sont que du quatrième ordre, relativement aux fractions qui représentent les rapports des côtés du triangle au rayon de la sphère.

Soient A, B, C, a, b, c, les éléments du triangle à résoudre ; A', B', C', a, b, c, ceux du triangle qu'on veut lui substituer ; il s'agit de trouver les différences qui existent entre A et A', B et B', C et C'. Désignons-les par x, x' x'', et nous aurons $A = A' + x$, d'où
$$\cos.A = \cos.(A' + x) = \cos.A' \cos.x - \sin.A' \sin x.$$

La différence x étant très-petite, comme nous aurons occasion de le reconnaître par la suite de la démonstration, nous pourrons, en remplaçant sin. x et cosin. x par leurs développements en séries, négliger les termes contenant des puissances de x supérieures à la première, il en résultera
$$\cos.A = \cos A' - x \sin.A'.$$

Si maintenant nous supposons menés, du centre de la sphère, les rayons qui aboutissent aux sommets A, B, C, ils perceront une sphère concentrique à la première et d'un rayon égal à l'unité, en trois points, qui formeront un triangle semblable au triangle donné : désignons ses côtés par α, β, γ, qui ne sont autre chose que $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$ et ses angles par les mêmes lettres A, B, C ; puisqu'ils

sont formés par les mêmes plans qui déterminent ceux du triangle tracé sur la surface du globe.

Nous aurons dans ce nouveau triangle

$$\cos\alpha = \cos\beta \cos.\gamma + \sin.\beta \sin.\gamma \cos.A.$$

Les rapports que représentent α, β, γ, sont très-petits : nous aurons donc une exactitude plus que suffisante en conservant les quatre premières puissances dans les développements de leurs lignes trigonométriques: il viendra ainsi, en mettant en évidence les côtés donnés a, b, c,

$$\left(\frac{b}{r}-\frac{b^3}{6r^3}\right)\left(\frac{c}{r}-\frac{c^3}{6r^3}\right)\cos.A = \left(1-\frac{a^2}{2.r^2}+\frac{a^4}{24r^4}\right) -$$

$$\left(1-\frac{b^2}{2r^2}+\frac{b^4}{24.r^4}\right)\left(1-\frac{c^2}{2r^2}+\frac{c^4}{24.r^4}\right)$$

ou, en effectuant les multiplications indiquées et ne conservant que les termes du quatrième ordre,

$$\frac{bc}{r^2}\left(1-\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)\cos.A = 1-\frac{a^2}{2r^2}+\frac{a^4}{24\,r^4}-$$

$$1+\frac{c}{2r^2}-\frac{c^4}{24.r^4}+\frac{b^2}{2r^2}-\frac{b^4}{24.r^4}-\frac{b^2c^2}{4r^4}$$

Réduisant et dégageant cos. A de son coefficient

$$\cos.A = \frac{1}{bc}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2}-\frac{b^4+c^4-a^4+6b^2c^2}{24.r^2}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)^{-1}$$

Dans le développement du dernier facteur, il est inutile d'aller au delà du deuxième terme, puisque le suivant étant de quatrième puissance par rapport à b et à c, donnerait, en effectuant ensuite le produit indiqué, des termes de puissances que nous avons regardées comme négligeables: ce développement se réduit donc à $1+\frac{b^2+c^2}{6r^2}$ et la valeur de cos. A devient

$$\cos.A = \frac{1}{bc}\left(\frac{b^2+b^2-a^2}{2}-\frac{b^4+c^4-a^4+6b^2c^2}{24\,r^2}+\frac{b^4+b^2c^2+b^2c^2+c^4-a^2b^2-a^2c^2}{12\,r^2}\right)$$

ou en réduisant

$$\cos.A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^4+b^4+c^4-2\,(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{24.b\,c.r^2}$$

Mais, en vertu du n° 30 du livre I, chap. 6, $\cos.A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

Donc,

$$\cos.A = \cos.A' + \frac{a^4+b^4+c^4-2\,(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{24.b.c.r^2} = \cos.A' + M.$$

Nous avons posé plus haut

$$\cos A = \cos.A' - x \sin.A', \quad \text{donc} \quad M = -x \sin.A'.$$

En nous rappelant que $\sin.^2 A' = 1 - \cos.^2 A'$, nous pouvons écrire

$$\sin.^2A' = 1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 = \frac{4b^2c^2-a^4-b^4-c^4-2b^2c^2+2a^2c^2+2a^2b^2}{4b^2c^2}$$

$$- \frac{a^4+b^4+c^4-2\,(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{4.b^2c^2}$$

ou encore

$$-bc.\sin.^2A' = \frac{a^4+b^4+c^4-2\,(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{4.bc}$$

Cette valeur est, comme on peut le remarquer, égale à M multiplié par $6r^2$, donc $M = \frac{-bc\sin.^2A'}{6.r^2}$, et, par suite, en égalant les deux valeurs de M,

$$x \sin.A' = \frac{bc.\sin.^2A'}{6.r^2} \quad \text{ou enfin} \quad x = \tfrac{1}{3}\,\frac{bc.\sin.A'}{2r^2}.$$

Supposons, pour trouver ce qu'exprime cette valeur de x, que la figure 298 représente le triangle rectiligne équivalant au sphérique tracé sur la sphère dont le rayon est l'unité : ses côtés seront $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$, sa surface sera $s = \frac{1}{2}\frac{c}{r}h$: mais $h = \frac{b}{r}\sin.A'$, donc $S = \frac{1}{2}\frac{bc}{r^2}\sin.A'$.

Si l'on avait cherché x' et x'', on aurait trouvé les expressions analogues $\frac{1}{3}\frac{ac.\sin.B'}{2r^2}$, $\frac{1}{3}\frac{ab.\sin.C'}{2r^2}$ qui représentent également la surface du même triangle. Nous concluons d'abord de ce fait que $x = x' = x''$, et qu'ainsi

$$A + B + C = A' + B' + C' + 3x \quad \text{ou} \quad 3x = A + B + C - 200^g.$$

Il est donc démontré que la correction est la même pour les trois angles, et de plus, que $3x$ étant l'excès sphérique que nous savons (n° 56) exprimer la surface du triangle tracé sur la sphère

qui a l'unité pour rayon, les deux triangles sont équivalents en surface. La même relation existera évidemment entre celui qui est formé sur la terre et le triangle rectiligne analogue.

Il découle encore un avantage de ce qui précède, c'est de pouvoir trouver l'excès sphérique sans l'emploi des trois angles, mais bien au moyen de l'un d'eux et des côtés qui le comprennent, ou au moyen des trois côtés. Comparant donc l'excès ainsi obtenu avec l'excédant des trois angles sur deux droits, la différence sera l'erreur commise dans les observations.

Nous venons de trouver l'expression de l'excès sphérique égale à celle du triangle : mais, comme le résultat doit être une certaine quantité de secondes et non un nombre abstrait, il faut diviser par *sin.* 1''.

Si l'on voulait l'excès sphérique en fonction d'un côté et des angles adjacents, on remarquerait que

$$c = \frac{b \sin.C'}{\sin.B'} = \frac{b. \sin.(A'+B')}{\sin.B'}$$

ce qui donne

$$S \text{ ou } 3e = \frac{b^2}{2\,r^2} \times \frac{\sin.A'. \sin.(A'+B')}{\sin.B' \sin.1''}$$

Les deux valeurs de l'excès sphérique que nous venons d'indiquer ne pourraient se réduire en tables, parce que l'une et l'autre contiennent trois variables.

Dans ce cas, on leur substitue l'expression que nous allons présenter ici et qui, comme celle de réduction au centre et à l'horizon, se compose de ces deux termes.

On divise le triangle en deux rectangles : la surface de l'un est

exprimée par $\dfrac{b^2 \sin.A' \cos.A'}{2R^2}$

et celle de l'autre par $\dfrac{a^2 \sin.B'.\cos.B'}{2R^2}$,

d'où l'on déduit pour la surface totale

$$S = \frac{b^2 \sin.A' \cos.A' + a^2 \sin.B' \cos.B'}{2.\, R^2}$$

$$S = \frac{b^2 \sin.2A' + a^2 \sin.2B'}{4\, R^2}$$

et par conséquent $3e = \dfrac{b^2 \sin.2A' + a^2 \sin.2B'}{4.R^2 \sin.1''}$

Puissant a placé dans son *Traité de géodésie* une table calculée à l'aide de cette formule, et qui donne chacun des termes.

On n'altère pas sensiblement la valeur de l'excès sphérique en négligeant les centièmes, les dixièmes et même les unités de a et b, ainsi que les minutes et secondes de A et B, en raison du très-grand dénominateur R^2.

Nous avons négligé la seconde puissance de x dans la valeur de cos. A, en faisant pressentir que cela n'apporterait pas d'inexactitude sensible dans les résultats : nous sommes actuellement en mesure de justifier cette manière de procéder, puisque x étant du deuxième ordre par rapport aux très-petites fractions $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$, son carré serait du quatrième ordre. Pour faire mieux sentir encore le peu d'importance de cette manière d'agir, prenons un exemple numérique : supposons que les côtés soient d'environ 40000^m. C'est, à quelques rares exceptions près, la plus grande dimension qu'ils aient. Le rapport d'une telle longueur à celle du rayon terrestre moyen, qui est 6366000^m, est représenté par 0,00628, dont la quatrième puissance est déjà réduite à 0,00000000155, quantité inappréciable.

408. Voici une autre démonstration du même théorème, due à M. le colonel Puissant. Soient a, b, c, A, B, C, les côtés et les angles d'un triangle sphérique ; soient a, b, c, A' B', C', les éléments d'un triangle rectiligne.

La même notation pour les côtés des deux triangles exprime suffisamment que nous les supposons de mêmes longueurs.

On peut toujours prendre A' et B' tels qu'ils diffèrent l'un et l'autre d'une même quantité x, de leurs correspondants A et B. Nous allons déterminer x, et nous trouverons que sa valeur est aussi celle de C — C'.

Dans le triangle rectiligne, nous aurons $\frac{a}{b} = \frac{\sin.(A-x)}{\sin.(B-x)}$ et $\frac{\sin a}{\sin. b} = \frac{\sin. A}{\sin. B}$ dans le triangle sphérique.

Nous savons que a étant un arc de grand cercle sur le globe, on a

$$\frac{\sin. a}{r} = \frac{a}{r} - \frac{a^3}{6.r^3} + \frac{a^5}{120.r^5} - \text{etc.} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{r} = \frac{\sin a}{r} + \frac{a^3}{6r^3} = \frac{\sin. a}{r}\left(1 + \frac{a^2}{6r^2}\right)$$

en négligeant les termes supérieurs à la quatrième puissance.

Cette dernière tranformation, qui n'est pas rigoureusement exacte, n'entraîne à sa suite aucune erreur appréciable, quand

il s'agit d'un arc dont le rapport au rayon du globe est assez petit pour que les deux extrémités de cet arc soient visibles l'une de l'autre.

Nous pourrons, en vertu de ce qui précède, transformer la première équation, de la manière suivante :

$$\frac{\sin.a\left(1+\frac{6r^2}{a^2}\right)}{\sin.b\left(1+\frac{6r^2}{b^2}\right)}=\frac{\sin.(A-x)}{\sin.(B-x)}=\frac{\sin.A\cos.x-\sin x\cos A}{\sin.B\cos.x-\sin x\cos B}=$$

$$\frac{\sin.A}{\sin.B}\times\frac{1-\tang.x\cot.A}{1-\tang.x\cot.B}$$

ou encore, parce que $\frac{\sin.a}{\sin.b}=\frac{\sin.A}{\sin.B}$ et x égale sensiblement tang. x.

$$\frac{1+\frac{a^2}{6r^2}}{1+\frac{b^2}{6r^2}}=\frac{1-x\cotang A}{1-x\cotang.B}$$

Résolvons par rapport à x, en négligeant les termes de quatrième puissance, nous aurons successivement

$$\left(1+\frac{a^2}{6.r^2}\right)(1-x\cotang.B)=\left(1+\frac{b^2}{6r^2}\right)(1-\cotang.A)$$

$$1+\frac{a^2}{6r^2}-x\cotang.B=1+\frac{b^2}{6r^2}-x\cotang.A$$

$$\frac{a^2-b^2}{6.r^2}=x(\cotang.B-\cotang.A)$$

en enfin $$x=\frac{a^2-b^2}{6.r^2}\frac{1}{\cotang.B-\cotang.A}$$

On sait que sin. $(A-B)=\sin.A.\ \text{Cos}.B-\sin.B.\ \text{Cos}.A$, et, par conséquent

$$\frac{\sin.(A-B)}{\sin.A\sin.B}=\cotang.B-\cotang.A.$$

Donc enfin,

$$x=\frac{a^2-b^2}{6.r^2}\times\frac{\sin.A\sin.B}{\sin.(A-B)}$$

Nous voici parvenus à une valeur de x en fonction de quatre éléments du triangle sphérique : ce que nous nous proposons actuellement, c'est de faire voir que cette expression représente le tiers de la surface du triangle proposé.

Soit T celle du triangle rectiligne; nous savons que $T = \frac{1}{2}\frac{bc}{r^2}$ sin.A'; d'ailleurs

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin.B'}{\sin.C'} = \frac{\sin.B'}{\sin.(A'+B')} \quad \text{d'où } b = \frac{c.\sin B'}{\sin.(A'+B)} \quad \text{et } T = \frac{1}{2}\frac{c^2 \sin.A' \sin.B'}{r^2 \sin.(A'+B')}$$

de
$$\frac{a}{r} : \frac{b}{r} : \frac{c}{r} :: \sin.A' : \sin.B' : \sin.C',$$

on tire
$$\frac{a^2}{r^2} - \frac{b^2}{r^2} : \frac{c^2}{r^2} :: \sin.^2 A' - \sin.^2 B' : \sin.^2 C'$$

ou encore
$$a^2 - b^2 : c^2 :: \overline{\sin.}^2 A' - \overline{\sin.}^2 B' : \sin.^2 (A'+B')$$

par conséquent

$$c^2 = (a^2 - b^2)\frac{\sin.^2(A'+B')}{\sin.^2 A' - \sin.^2 B'} = (a^2 - b^2)\frac{\sin.^2(A'+B')}{\sin.(A'+B')\sin.(A'-B')} =$$

$$= (a^2 - b^2)\frac{\sin.(A'+B')}{\sin.(A'-B')}.$$

Il résulte de là, en introduisant cette valeur de c^2 dans celle de T, que

$$T = \frac{1}{2}.\frac{a^2 - b^2}{r^2}.\quad \frac{\sin.A'.\sin.B'}{\sin.(A'-B')}.$$

A cela près que A' et B' remplacent A et B, on voit que la valeur de T est le triple de celle trouvée précédemment pour x, et si l'on remarque que les sinus de ces angles diffèrent très-peu, puisque les angles eux-mêmes sont égaux à quelques secondes près; qu'en outre, ils sont et dans T et dans x, multipliés par la différence des carrés des forts petits rapports $\frac{a}{r}$ et $\frac{b}{r}$, on pourra dire que l'expression de la surface du triangle rectiligne est aussi celle du triangle sphérique, et qu'ainsi x en est le tiers; mais nous savons (n° 56) que la surface du triangle sphérique $= A + B + C - (A' + B' + C')$.

D'ailleurs, parce que nous venons de trouver $A + B + C - (A' + B' + C') = 2x + x''$ et $2x = \frac{2}{3}$ surface du triangle, il suit que $x'' = \frac{1}{3}$ surface triangle $= x = C - C'$.

409. Supposons que l'on ait recueilli, sur le terrain, tous les éléments des formules de réduction que nous avons démontrées: voici quelle est la marche des calculs.

La réduction des angles à l'horizon se fait au moyen des deux tables dont nous avons parlé,

Pour la réduction au centre, ont est obligé de calculer les côtés qui entrent aux dénominateurs des termes de la correction. Ceci supposant les angles connus semblerait indiquer un cercle vicieux : mais, comme il suffit d'avoir ces côtés d'une manière approchée, on se sert des angles observés que l'on réduit à valoir 200^g les trois, en retranchant de chacun le tiers do l'excédant; puis on les calcule provisoirement d'après la relation des côtés proportionnels aux sinus des angles opposés. Dans ces calculs provisoires, on prend les logarithmes à 4 ou 5 décimales pour le premier ordre, et à 3 seulement pour le second et le troisième. On peut même se contenter de la longueur approximative des côtés fournis par un canevas fait avec soin.

On passe ensuite aux calculs de réduction au centre pour lesquels on peut employer différentes méthodes. Ce sera à l'aide des tables logarithmes, ou avec des tables analogues à celles de réduction à l'horizon, ou d'une manière graphique au moyen d'une figure imaginée par le colonel Epailly, ou enfin assez simplement, au moyen d'une table de logarithmes à 3 décimales en une feuille : elle contient les logarithmes des sinus de 0^g à 100^g diminués de celui de sin.1″ ; puis ceux des nombres naturels de 0 à 400, qui peuvent appartenir à des nombres beaucoup plus grands, en mettant la caractéristique convenable. Cette table préparée par M. le commandant Poudra nous parait être ce qu'il y a de plus commode.

Les angles étant corrigés, on fait leur somme pour chaque triangle, et l'on retrancho de chacun le tiers de l'excédant sur 200^g. Do cette manière, l'erreur d'observation est comprise implicitement dans la quantité qu'on retranche de chaque angle. Quand on veut connaître le degré de précision avec lequel on opère, on calcule à part l'excès sphérique qui a pour expression $\frac{bc.\sin.A'}{2.r^2 \sin.1''}$ dans laquelle on remplace c et A', quantités inconnues en réalité, par la valeur du côté obtenu par le calcul des triangles provisoires, et par l'angle non corrigé A. Ces valeurs approchées, destinées à la recherche d'uno quantité toujours très-petite, sont d'une exactitude plus que suffisante : on le compare à la quantité dont la somme des trois angles surpasse 200^g, et la différence est l'erreur due aux observations.

Celle-ci dépend do l'imperfection des instruments, de l'incertitude du pointé et do la lecture, enfin, de quelque inexactitude

dans les éléments de réduction. Elle est, au surplus, toujours peu considérable.

Ayant les angles corrigés, on calcule les côtés définitifs en partant de la base connue ; on prend les logarithmes avec 7 décimales pour le premier et le deuxième ordre, et à 5 pour le troisième.

On voit, qu'ainsi que nous l'avons annoncé, cette manière de résoudre les triangles géodésiques a l'avantage d'être indépendante du rayon de la sphère qui contient le triangle ; en sorte qu'elle est également applicable à la forme de la terre, que celle-ci soit sphérique, ellipsoïdale ou même irrégulière, pourvu, toutefois, que les côtés soient toujours petits par rapport au rayon de la sphère dans le premier cas, ou par rapport aux rayons de courbure du lieu du triangle dans les deux autres cas. L'excès sphérique $\frac{bc \sin. A'}{2r^2 \sin. 1''}$, qui même ne figure pas directement dans la correction des angles, n'exige pas, en effet, qu'on connaisse rigoureusement la valeur de r pour laquelle il suffit de mettre une valeur approchée.

Dans les triangles du troisième ordre on ne connaît que deux angles, et par conséquent, on ne peut pas opérer comme il vient d'être dit. Presque toujours, cette espèce de triangles sert à trouver les points les moins importants. On se contente alors de les résoudre à la manière des triangles rectilignes sans apporter de réduction aux angles ; cela a d'autant moins d'inconvénient que leurs côtés étant petits, ils diffèrent très-peu de triangles rectilignes. Mais dans certains cas, comme dans la mesure d'une méridienne, on peut avoir à résoudre des triangles très-importants, et ayant de grands côtés dans lesquels on n'a observé que les deux angles à la base. Alors, on calcule directement l'excès sphérique, et on en retranche le tiers de chacun des angles mesurés, laissant ainsi à chacun d'eux l'erreur d'observation intacte.

Il ne faut pas croire que la différence d'exactitude des deux procédés soit considérable. Désignons par α, β, γ, les erreurs commises dans la mesure des angles A, B. C. Chaque angle du triangle plan substitué sera entaché d'une erreur de la forme $\alpha - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$, dans la résolution du premier ordre. Le maximum de cette erreur répondant à β et γ de lignes contraires à celui d'α, peut aller à $\frac{4}{3}\alpha$ en regardant α comme la limite possible.

Dans le troisième ordre, l'erreur sur le troisième angle est égale $\alpha + \gamma$ dont le maximum est 2α.

Sans entrer dans de plus longs détails sur l'influence de ces erreurs dans la résolution de la formule qui doit donner les côtés, on voit pourtant, par la comparaison des maxima d'erreurs possibles $\frac{4}{3}\alpha$ et 2α, que les observations du premier ordre ne semblent pas offrir un grand avantage sur celles du troisième, quoique cet avantage existe néanmoins. Remarquons pourtant que, pour qu'il en soit ainsi, il faut que les deux angles du troisième ordre soient corrigés chacun du tiers de l'excès qui ne peut s'obtenir que par un calcul direct qui, appliqué à un grand nombre de triangles, augmente beaucoup le travail. Remarquons encore que les observations du troisième ordre pourraient être entachées de grossières erreurs, sans que rien en prévînt l'observateur, ce qui ne peut avoir lieu pour le premier ordre, la somme des trois angles devant toujours différer très-peu de 200ᵍ, et même cette somme pouvant être calculée, ce que ne permet pas la seule observation des deux angles à la base.

Nous verrons pourtant que la résolution des triangles du troisième ordre a été employée forcément dans les opérations géodésiques fondamentales, celles qui ont servi à la mesure du méridien ; mais alors on a réduit l'erreur à sa limite 2α par le calcul direct de l'excès sphérique, et l'importance de α a été diminuée par une excessive rigueur dans les opérations.

410. Nous avons résolu graphiquement en topographie, nᵒˢ 99 et suivants, un problème qui a pour but la détermination d'un point au moyen de trois autres : ce problème se présentant aussi parfois en géodésie, nous allons en donner la solution analytique.

Soit ABCD ou quadrilatère dans lequel on veut déterminer la position de D (*fig.* 299) connaissant les trois côtés a, b, c, et les angles α et β observés en D. Deux voies conduisent également au résultat : on peut chercher les angles x et y, puis résoudre les deux triangles ACD, BCD pour obtenir les côtés AD, BD, CD, ou bien chercher directement ces côtés.

Les deux triangles ACD, BCD, donnent deux valeurs du côté commun CD : les égalant, il vient

$$\frac{b.\sin.x}{\sin.\beta}=\frac{a.\sin.y}{\sin\alpha} \quad \text{ou} \quad b\sin.\alpha\sin.x=a\sin.\beta\sin.y. \qquad (1)$$

La somme des quatre angles du quadrilatère est égale à 400ᵍ : on a donc

$$\alpha+\beta+\gamma+x+y=400^g \quad \text{et} \quad y=400-(\alpha+\beta+\gamma)-x$$

α, β et γ sont connus : faisons $400 - (\alpha + \beta + \gamma) = \delta$, nous aurons $y = \delta - x$ (2), valeur qui, substituée dans l'équation (1), la transformera en la suivante

$$b \sin \alpha \sin.x - a \sin.\beta \sin.(\delta - x) = o$$

ou

$$b.\sin.\alpha \sin.x - a \sin.\beta \sin.\delta \cos.x + a \sin.\beta \cos.\delta \sin.x = o$$

puis, en divisant par $\sin.x$

$$b.\sin.\alpha - a \sin.\beta \sin.\delta \operatorname{cotang}.x + a \sin.\beta \cos.\delta =$$

de là

$$\operatorname{cotang}.x = \frac{b \sin.\alpha + a \sin.\beta \cos.\delta}{a \sin.\beta \sin.\delta} = \operatorname{cotang}.\delta + \frac{b \sin.\alpha}{a \sin.\beta \sin.\delta}$$

et enfin, en mettant cotang.δ en facteur commun

$$\operatorname{cotang}.x = \operatorname{cotang}.\delta \left(1 + \frac{b \sin.\alpha}{a \sin.\beta \cos.\delta}\right)$$

En suivant une marche analogue, on trouvera

$$\operatorname{cotang}.y = \operatorname{cotang}.\delta \left(1 + \frac{a \sin.\beta}{b \sin.\alpha \cos.\delta}\right)$$

Il suffira pour cela de remplacer dans (1), sin. x par sa valeur sin. $(\delta - y)$, fondée sur l'équation (2), qui d'abord avait donné y en fonction de x.

La seconde méthode donne les côtés, puis ensuite c'est en résolvant les triangles ADC, BDC, que l'on détermine x y.

Si nous imaginons une circonférence passant par les trois points A, B, D, et si nous prolongeons la droite DC jusqu'à ce qu'elle coupe la circonférence en E, nous voyons que les angles EAB, EDB, sont égaux comme ayant pour mesure commune la moitié de l'arc BE : il en est de même de ADE, ABE.

Ainsi, dans le triangle ABE, on connait le côté AB ou C, et les angles EAB ou α, EBA ou β, et en le résolvant, on trouve les côtés AE, BE. Ensuite on résout le triangle BEC, dans lequel sont connus BC, BE, et l'angle compris β — B : et l'on connait ainsi l'angle CEB ou DEB.

Des six éléments du triangle BDE, on a deux angles α, E ; puis le côté BE opposé à l'un d'eux : donc on peut déterminer les trois autres qui sont l'angle y et les distances DB, DE. On aurait trouvé de la même manière l'angle x et les côtés DA, DE. Ce dernier, commun aux deux triangles, devient ainsi un moyen

de vérification. Si l'on en retranche enfin CE calculé précédemment, on a CD.

CHAPITRE V.

PROJECTION DES POINTS.

411. Lorsque le réseau géodésique est complétement calculé, on n'a pas encore tous les éléments nécessaires pour assigner la place qu'occupent les sommets sur le globe. Il faut connaître aussi les latitude et longitude d'un point de départ et l'azimut d'un premier côté, c'est-à-dire l'angle qu'il fait avec le méridien qui passe par l'une de ses extrémités.

L'observation astronomique de ces trois éléments suffirait à la rigueur : car, ayant placé exactement la base, on pourrait, connaissant la longueur des côtés, rapporter tous les autres points par les intersections successives d'arcs de cercles ; mais d'abord ce moyen devrait être rejeté, quand bien même la terre serait plane, à cause de l'accumulation successive des erreurs : à plus forte raison quand le réseau est d'une grande étendue, puisqu'alors il embrasse une calotte sphérique qui n'est pas développable. On place les points isolément, soit par leurs distances à la méridienne et à la perpendiculaire, soit par leurs latitudes et longitudes. Pour employer ce dernier moyen, adopté aujourd'hui pour la nouvelle carte de France, il faut déduire les latitudes et longitudes de tous les points du réseau de celles d'un premier point et de l'azimut de l'un des côtés. Bientôt nous donnerons les formules nécessaires à la résolution de ce problème ; mais, en attendant, nous pouvons faire voir ici que, si la terre était sphérique, la question se réduirait à la résolution d'un triangle.

Soit AB (*fig.* 300) la base, on connaît par l'observation la latitude AA' et par suite son complément AP, l'arc AB, et l'azimut ou l'angle $PAB = Z - 200^g$. En résolvant donc le triangle PAB, on déterminera, au moyen des anologies de Neper, les deux angles B et P. Le premier est le supplément à l'azimut de AB par rapport au méridien de B, le second n'est autre chose que la différence en longitude mesurée par A'B'. Enfin la proportion des quatre sinus fournit BP complément de la latitude de B.

A l'aide du nouvel azimut et des éléments du triangle suivant, on arrivera de même aux latitude et longitude d'un troisième point, et ainsi de suite. Les choses ne se passent pas aussi simplement sur le sphéroïde terrestre, et nécessitent des formules dont la recherche est beaucoup plus compliquée.

Lorsqu'on connaît ainsi les coordonnées qui précisent la position des points sur la terre, il faut, pour pouvoir les utiliser à la confection de la carte, imaginer le globe divisé par certaines lignes principales, adopter une hypothèse en vertu de laquelle on les projette sur un plan et rapporter les points sur cette projection.

Parmi tous les systèmes de projection imaginés jusqu'à ce jour, nous allons parler de deux des principaux : celui que Cassini avait adopté pour sa carte de France, et celui de Flamstead modifié et employé au Dépôt général de la guerre, pour la confection de la nouvelle carte (*Voir*, pour plus de détails, le ch. X, qui traite des *projections*, n°s 462 et suivants).

412. Dans la projection de Cassini, on imagine le méridien principal SN (*fig.* 301), partagé en parties égales : par chaque point de division et par le diamètre OE, on fait passer des plans perpendiculaires à celui de SN. On divise de même le grand cercle OE qui passe par le point P milieu de la surface à représenter, et par chaque point on mène des plans parallèles à celui de SN. Alors tous les points d'intersection tels que M peuvent être déterminés par les deux coordonnées MA, AP, que l'on désigne sous le nom de distances à la méridienne et à la perpendiculaire. La première de ces distances MA est réellement la distance à la méridienne ; mais la seconde a été improprement appelée distance à la perpendiculaire. Cette dernière devrait en effet être mesurée sur un arc de grand cercle passant par M et perpendiculaire à OPM, et nous savons qu'elle serait plus petite que l'arc de petit cercle MN qui est lui-même plus petit que l'ordonnée employée AP. Dans la projection, on développe la méridienne SN et la perpendiculaire OE en lignes droites, suivant S'N', O'E' (*fig.* 302). Sur chacune de ces lignes, on porte des degrés respectivement égaux à ceux du globe, et par les points de division on trace des parallèles aux projections de la méridienne et de la perpendiculaire : ces parallèles sont considérées comme projections des arcs de cercles.

Le point M' correspondant à M, a pour coordonnées rectangulaires A'M', A'P'. Si, par exemple, le méridien principal et l'é-

quateur sont divisés de grade en grade, c'est-à-dire si les divisions ont 100 mille mètres, les coordonnées de M' seront 100000^m et 300000^m.

Les quadrilatères curvilignes de la terre, dont les dimensions E^{t}O^t sont constantes, mais dont les côtés N^{d}S^d vont en diminuant à mesure qu'on s'éloigne du méridien principal, sont représentés, sur la projection, par des carrés; de sorte que les longueurs E.O, toujours exactes, répondent à des longueurs N.S trop grandes. Il en résulte que la déformation a lieu dans le sens du nord au sud, d'une manière d'autant plus sensible qu'on s'éloigne davantage du méridien principal. Ce système de projection sera donc avantageux pour la représentation des pays qui s'étendent dans le sens du méridien plus que dans celui du parallèle. C'est cette raison qui a décidé Cassini à l'employer pour sa carte de France.

Observons, à l'avantage de ce système de projection, que les angles des figures développées sont droits comme ceux des figures qu'ils représentent.

Pour utiliser les observations géodésiques et les calculs qui en sont la conséquence, il faut savoir trouver les distances à la méridienne et à sa perpendiculaire ou fonction des angles et des côtés des triangles.

Soient (*fig.* 302 *bis*) O l'origine des coordonnées, A un point séparé de cette origine par un arc de cercle b. Menant par ce point un grand cercle perpendiculaire au méridien principal OH, les deux coordonnées cherchées seront AH et OH. La résolution du triangle rectangle OHA sera possible, si l'on connaît l'angle z supplément à 400^g de l'azimut du côté OA sur le méridien du point O. En opérant par la méthode de Legendre, il faudra d'abord chercher l'excès sphérique donné très-approximativement par

$$\varepsilon'' = \frac{1}{2}\,\frac{b^2}{r^2 \sin.1''}\,\sin.z\,\cos.z.$$

Le triangle plan substitué au triangle sphérique rectangle aura alors pour éléments connus

$$OA = b,\quad H' = 100^g - \tfrac{1}{3}\varepsilon,\quad O' = z - \tfrac{1}{3}\varepsilon.\quad A' = 100^g - z + \tfrac{2}{3}\varepsilon.$$

Les deux coordonnées, que nous désignerons par x et y, seront données par les formules

$$OH = x = b\,\frac{\cos.(z - \frac{1}{3}\varepsilon)}{\cos.\frac{1}{3}\varepsilon},\qquad AH = y = b\,\frac{\sin.(z - \frac{1}{3}\varepsilon)}{\cos.\frac{1}{3}\varepsilon}$$

Cette méthode serait fort longue à employer, aussi les géographes la simplifient-ils, en opérant de la manière suivante. L'excès sphérique E est toujours très-petit ; si on en néglige la valeur, les expressions de x et y deviennent

$$x = b\cos.z \qquad y = b\sin.z$$

ou, en introduisant l'azimut $Z = 400 - z$ compté toujours de o à 400^g en partant du sud du méridien et se dirigeant vers l'ouest,

$$x = b\cos.Z, \qquad y = -b\sin Z.$$

Les signes des seconds membres se rapportent à la figure qui a supposé les coordonnées positives au sud et à l'est. L'usage est de laisser les signes + en évidence et de prendre

$$x = b\cos.Z, \qquad y = b\sin.Z$$

auquel cas, l'x restant positif au sud, l'y positif passera à l'ouest (*fig.* 303).

Il s'agit ensuite de trouver les coordonnées x', y' d'un second point N séparé du premier par une longueur de côté b' incliné sur le premier P'M'' (*fig.* 303) d'un angle observé P'M''N. Il est évident qu'on a

$$x' = x + \text{RN}, \quad y' = y - \text{M''R}.$$

Mais en désignant par Z' l'azimut du nouveau côté M''N au méridien du point connu M''

$$\text{RN} = b'\sin.\text{NM''R} = b'\sin.(Z' - 300^g) = b'.\cos.Z'$$
$$\text{RM''} = b'\cos.\text{NM''R} = b'\cos.(Z' - 300^g) = -b'.\sin.Z'$$

par suite

$$x' = x + b'\cos.Z' \qquad y' = y + b\sin Z'$$

expressions de même forme que celles qui ont donné les premières coordonnées.

Il ne reste plus qu'à former l'azimut Z'. L'inspection de la figure fait voir que

$$Z' = 400^g - \text{S''M''N} = 400^g - (\text{S''M''P'} - \text{NM''P'})$$

mais S''M''P' = 200 — Z, et NM''P' est l'angle observé M'' : on peut donc écrire

$$Z' = 200 + Z + M''.$$

Remarquons, en terminant ce qui a trait à la projection de Cassini, que cette manière de la simplifier revient en définitive, par la suppression successive de tous les excès sphériques, à con-



sidérer la terre comme plane, ce qui supprime les hypothèses mêmes sur lesquelles est basé ce système de projection. Observons en effet que dans cette simplification nous n'avons nullement fait intervenir le rayon terrestre.

413. Pour la nouvelle carte de la France, on s'est servi d'une projection plus exacte : celle de Flamstead modifiée. Voici en quoi elle consiste : on suppose l'équateur et le méridien principal divisés en parties égales ; on imagine des méridiens passant par tous les points de division de l'équateur, et des parallèles à l'équateur par toutes les divisions du méridien principal. Pour en avoir la projection, on trace sur le papier le grand axe CX qui représente le méridien principal rectifié. D'un point C de cette droite comme centre et d'un rayon égal à la cotangente du parallèle moyen de la partie du globe que l'on veut décrire, de celui du 50ᵉ grade, par exemple, s'il s'agit de la France, on décrit une portion de circonférence BAE. Tous les autres parallèles sont représentés par des arcs concentriques décrits du même point C, à une distance l'un de l'autre égale à la partie rectifiée du méridien comprise entre ces parallèles sur la terre : on prend ensuite, sur chacun des parallèles, les degrés de longitude, tels que les donne la loi de décroissement de l'équateur aux pôles, c'est-à-dire proportionnels aux rayons de ces parallèles ou au cosinus de leurs latitudes. Enfin, on fait passer, par chaque série de points correspondants, une ligne courbe qui représente un méridien, et tous les autres s'obtiennent de la même manière.

Nous renvoyons au § 503 les développements relatifs aux modifications rendues nécessaires par la forme ellipsoïdale de la terre, que nous avons supposée sphérique dans les explications précédentes, et que nous supposerons telle encore dans le cas actuel.

Soit A (*fig.* 305) un point dont la latitude est 50ᵍ, et AC une tangente au méridien MP passant par ce point : AC est évidemment la tangente de l'arc AP, complément de la latitude : elle est donc la cotangente qui, comme nous l'avons dit plus haut, doit être le rayon de la projection du parallèle moyen. Dans le cas particulier que nous considérons, elle est égale au rayon de la terre, puisque, dans le triangle AOC rectangle en A, l'angle O étant de 50ᵍ, l'angle C lui est égal.

La même figure fait voir encore que le rayon FD d'un parallèle

quelconque sur le globe n'est autre chose que le cosinus de sa latitude. Enfin, AF étant rectifié sur AC, le point F vient en F′, et CF′ est le rayon de la projection de ce parallèle.

Dans la pratique, il est souvent impossible de tracer ces arcs de cercle d'une manière continue. Ainsi, le rayon de la terre supposée sphérique étant 6366198^m, pour une carte de la France à l'échelle de 0,00001, le rayon du parallèle moyen est égal à 63^m,662. Afin de remédier à cet inconvénient, on a imaginé de calculer, pour chaque parallèle, la position sur le plan de projection d'une suite de points également espacés, et assez rapprochés pour que le petit arc compris entre deux points consécutifs puisse être sans erreur sensible, considéré comme une droite. On rapporte cette position aux axes CX et CY (*fig.* 304). Le premier est le méridien principal, le second est une droite perpendiculaire passant par le centre commun C.

Proposons-nous de déterminer la position d'un point tel que F, en supposant la terre sphérique et sa circonférence égale à 40 millions de mètres.

Soient $R = 6366198^m$ le rayon de la terre.

L, la latitude du parallèle moyen BAE que, pour généraliser la question, nous ne supposerons pas celui de 50^g, mais quelconque,

l, la latitude du parallèle FDK,

P, la longitude du point F.

Cherchons CG, FG ou x et y en fonction de P et de l, longitude et latitude de F. On a, en désignant l'angle FCG par α,

$$x = CF.\cos\alpha, \quad y = CF.\sin.\alpha.$$

Mais $$CF = CD = CA - AD = R\ \mathrm{cotang.}L - AD.$$

AD est le développement de l'arc $l - L$ du méridien, compris entre le parallèle moyen et le parallèle FDK. Cet arc sera évalué en mètres, d'après la relation, 1 grade en latitude = 100000 mètres.

En appelant M le nombre de mètres contenus dans AD, nous aurons

$$CF = R\ \mathrm{cotang.}L - M$$

Pour déterminer l'angle α correspondant à une longitude sur le parallèle qui a pour latitude l, nous ferons remarquer qu'un arc quelconque de ce parallèle est dans le développement représenté par un autre arc de même longueur, mais de rayon diffé-

rent, et qu'ainsi les amplitudes de ces arcs sont en raison inverse des rayons (*) : or, l'arc du parallèle qui contient un nombre de grades marqué par P, a pour rayon R cos.l. L'arc du développement qui a même longueur et qui contient un nombre de grades désigné par α, a pour rayon R. cotang.L — M : donc on a la proportion

$$\text{R cotang.L} - \text{M} : \text{R cos.}l :: \text{P} : \alpha \quad \text{d'où} \quad \alpha = \text{P}\frac{\text{R. cos } l}{\text{R. cotang.L} - \text{M}}$$

Substituons les valeurs de CF et de α dans celles de x et de y et nous aurons

$$x = (\text{R cotang.L} - \text{M}) \cos. \frac{\text{P.R. cos.}l}{\text{R cotang.L} - \text{M}}$$

$$y = (\text{R cotang.L} - \text{M}) \sin. \frac{\text{P.R. cos.}l}{\text{R cotang.L} - \text{M}}$$

Réciproquement, connaissant les coordonnées x et y de la position sur le plan de projection d'un point F, il serait facile de trouver sa latitude et sa longitude : car on a $\text{CF} = \text{CD} = \frac{\text{Y}}{\sin.\alpha} = \frac{\text{X}}{\cos.\alpha}$ et l'angle α peut être déterminé par la relation tang. $\alpha = \frac{\text{Y}}{\text{X}}$. Ensuite, on a M ou $\text{CA} - \text{CD} = \text{R cotang. L} - \frac{\text{Y}}{\sin.\alpha}$ qui, converti en arc, au moyen de ce que 1g vaut 100000m, fera connaître la différence de la latitude entre le parallèle moyen et celui sur lequel se trouve le point considéré, et par suite la latitude de ce point.

Enfin, tirant la valeur de P de l'équation $\alpha = \text{P}\frac{\text{R. cos.}l}{\text{R cotang.L} - \text{M}}$ nous aurons $\text{P} = \alpha\frac{\text{R cotang.L} - \text{M}}{\text{R. cos.}l}$ et tout est connu dans le second membre.

L'inspection de la figure 404, construite d'après les indications qui viennent d'être données, fait voir que les arcs comptés sur le

---

(*) Les arcs DF, AB (*fig.* 306) sont supposés de même longueur : nous voulons faire voir que les angles qu'ils sous-tendent sont en raison inverse des rayons. D'abord

AB : DE :: AC : CD; on a aussi DF : DE :: DCF : DCE.

D'ailleurs AB = DF, donc AB : DE :: DCF : DCE,

et, à cause du rapport commun, DCF : DCE :: AC : CD.

Les angles DCF, DCE étant mesurés par les arcs AB, DF, il s'ensuit que le nombre des grades compris dans chacun de ces arcs ou leurs amplitudes sont en raison inverse des rayons avec lesquels ils sont décrits.

méridien principal et sur le parallèle moyen ont même longueur que sur la terre, mais qu'il n'en est plus de même si l'on compare les mêmes arcs pris sur deux lignes autres que les deux principales. Les arcs de parallèles tels que KI, EH conservent bien les mêmes dimensions que sur la terre, mais les arcs de méridiens correspondants KE, IH sont augmentés. Cette augmentation, d'autant plus sensible, dans le sens du nord au sud, qu'on s'éloigne dans le sens de l'est à l'ouest, produit un inconvénient, analogue à celui de la projection de Cassini. Un autre inconvénient de ce système résulte de la déformation des angles des quadrilatères terrestres qui, rectangulaires, sont représentés par des quadrilatères tels que KIHE dont les angles s'éloignent de 100^g d'autant plus qu'on est loin du méridien principal.

En regard de ces inconvénients, citons un avantage que la projection modifiée de Flamstead ne partage qu'avec la projection homalographique de M. Babinet et avec celle de Lorgna : les surfaces conservent leur étendue réelle. En effet, si on regarde le quadrilatère plan KIHE comme élémentaire, c'est-à-dire, comme formé par des côtés infiniment petits, l'expression de sa surface sera

$$\frac{IK + HE}{2} + AD$$

Ces trois lignes IK, HE, AD ont même longueur que sur la terre. Si l'on imagine le quadrilatère sphérique correspondant, on pourra le regarder comme entièrement situé dans son plan tangent, et le traiter comme plan. Dans ce cas, l'expression de sa surface sera précisément celle que nous venons de voir représenter le quadrilatère du développement. Les deux surfaces finies composées des mêmes surfaces élémentaires égales seront donc égales elles-mêmes.

Les valeurs des coordonnées x et y des points d'intersection de tous les méridiens et parallèles de décigrades en décigrades ont été calculées et mises sous forme de table par *Plessis*. Elle fournit donc le moyen de passer des latitudes et longitudes aux distances à la méridienne et à la perpendiculaire, et cela en tenant compte de l'aplatissement $\frac{1}{309}$, et non, comme nous l'avons fait dans la théorie précédente, en supposant la terre sphérique.

Pour placer sur la projection un point O qui tomberait dans l'un des quadrilatères ABCD (*fig.* 807) dont les sommets ont été déterminés au moyen des tables, il suffit, dans la marche que nous nous sommes tracée, d'exécuter une double interpolation

graphique : ainsi, par exemple, soient pour le point O, latitude $= 50^g,0536''$; longitude $= 0^g,0520$; on prendra sur AC et BD, considérés comme unités, des parties DE, CF, proportionnelles à 0,520, on joindra les points F et E, G et H, et l'intersection O donnera la position du point d'une manière très-approchée.

414. Il est un autre mode de développement plus simple, et qui, dans certains cas, pourrait être avantageusement employé. Un système de méridiens et de parallèles également espacés divise la terre en une série de quadrilatères curvilignes égaux pour la même latitude, mais variant avec celle-ci de forme et de dimension. Cette variation, considérable si l'on compare deux figures près du pôle et de l'équateur, devient beaucoup moins sensible si l'on se borne à considérer celles qui se rapportent à un pays de dimension moyenne. Remarquons encore que, si les méridiens et les parallèles sont suffisamment rapprochés, les figures qu'ils déterminent sont près d'être planes.

Ceci posé, supposons cette division pour la France, par exemple, effectuée par des méridiens différant de 1^g en longitude et par des parallèles différant de 40' en latitude, et remplaçons les quadrilatères qui en résulteront par des trapèzes dont les bases soient égales à la longueur du grade sous les deux latitudes successives, et dont la hauteur soit l'arc du méridien compris entre ces deux latitudes. Nous apprendrons plus tard (§ 434) à trouver ces valeurs. Nous aurons ainsi, pour la série des trapèzes, compris entre les latitudes 54^g et 55^g, des bases de 66366^m et de 65174^m, et une hauteur de 40030^m en nombres entiers. Ces dimensions sont à peu près celles du terrain représenté sur chaque feuille de la carte de France. Divisant ensuite ces lignes en parties proportionnelles, on aura la représentation des méridiens et des parallèles compris dans chaque feuille.

Les inconvénients de ce mode de développement résulteraient : 1° d'une très-légère variation dans la surface, variation d'autant plus petite que les quadrilatères seraient plus petits ; 2° de la variation des angles qui tous également droits sur la terre seraient rendus d'autant plus aigus qu'on se rapprocherait du pôle. Cette déformation variable des angles ne permettrait pas de rassembler toutes les feuilles sur un même plan sans intervalles vides ; aussi, ce système n'est-il applicable qu'aux cartes topographiques, que leur étendue force à fractionner en feuilles séparées.

Ses avantages résulteraient de son extrême simplicité qui s'applique aussi bien à la forme ellipsoïdale qu'à la forme sphérique et de l'uniformité d'exactitude de toutes les parties.

Lorsqu'il s'agit du canevas géodésique destiné à une levée isolée, on doit tracer les méridiens et les parallèles comme nous venons de l'indiquer, mais on peut même, dans la plupart des cas, se contenter de calculer la minute du méridien moyen et celle du parallèle moyen, et s'en servir pour décrire une suite de rectangles destinés à remplacer les petits trapèzes courbes dont nous avons parlé. Les latitudes et les longitudes des sommets de triangles servent ensuite à rapporter ceux-ci par interpolation, ainsi qu'il a été expliqué à la fin du § 413.

CHAPITRE VI.

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE INDISPENSABLES A L'INTELLIGENCE DES FORMULES DE LATITUDE ET DE LONGITUDE.

Recherche des équations de la ligne droite, des courbes du second degré, et de la tangente et de la normale à l'ellipse.

415. Nous avons fait voir plus haut de quelle simplicité serait la recherche des formules de latitude et de longitude, si la terre était sphérique; mais sa forme n'est pas telle: le globe est un solide de révolution aplati vers les pôles. Il peut donc être considéré comme engendré par une ellipse tournant autour de son petit axe qui est la ligne des pôles. Ici, les normales aux trois sommets A, B, P (*fig.* 300) du triangle ne se rencontrent plus en un même point; elles ne forment plus, comme dans la sphère, les trois arêtes d'une pyramide qui a pour base le triangle, et son sommet au centre. Nous verrons plus tard que, pour arriver à la formule qui donne la latitude B en fonction de celle de A, il faut prendre en considération la normale et la sous-normale. Il faut donc chercher l'expression de ces lignes en fonction de quantités constantes et de la latitude comme seule variable: de sorte, qu'en donnant toutes les valeurs possibles à la latitude, on obtienne les longueurs des normales et sous-normales correspondantes. Les constantes seront le grand et le petit axe de l'ellipse qui a engendré le globe terrestre, c'est-à-dire la ligne des pôles et le diamètre de l'équateur.

Cette recherche reposant sur la connaissance de la géométrie

analytique, il est indispensable de placer ici quelques notions de cette branche des mathématiques.

L'analyse appliquée a pour but d'exprimer par des équations les positions respectives des points et des lignes, de manière à trouver toutes les relations qui peuvent exister entre eux, en combinant ces équations d'une manière convenable.

La géométrie analytique traite les questions relatives aux lignes et aux surfaces. Les premières seulement nous étant nécessaires, nous ne nous occuperons pas des autres. Elle les considère situées dans l'espace ou dans un plan : nous n'envisagerons que cette dernière circonstance : car ce n'est point un cours d'analyse appliquée que nous faisons ici, et nous n'en parlons que comme d'une chose indispensable à l'intelligence de notre sujet.

Soient AX, AY, deux droites rectangulaires fixes et données dans un plan (*fig.* 308); M un point quelconque dont il s'agit de déterminer la position dans ce plan. Si de ce point on abaisse les perpendiculaires MP, MQ, il est clair que M sera fixé dès que l'on connaîtra les longueurs des deux côtés contigus AP, AQ, du rectangle APMQ, puisqu'il suffira de mener par les points P et Q parallèlement aux axes AX, AY, deux lignes dont l'intersection sera le point cherché M. Les distances mesurées sur AX sont les abscisses, et celles comptées sur AY les ordonnées : elles portent aussi le nom collectif de coordonnées. Enfin, le point A en est dit l'origine, parce que c'est à partir de ce point que se comptent les distances.

416. *Équations d'un point.* Le caractère de tout point considéré sur l'axe des y est $x=o$, puisque cette équation indique que la distance du point à cet axe est nulle. De même, tout point placé sur l'axe des x satisfait à $y=o$: donc, l'ensemble des deux équations $x=o$, $y=o$ appartient à l'origine A des coordonnées; car, pour ce point seulement, elles ont lieu en même temps. En général, $x=m$, $y=n$ considérées simultanément, caractérisent un point situé à une distance m de l'axe des y, et n de celui des x. On les nomme les équations du point.

Les signes indiquent dans lequel des quatre angles se trouve situé le point; sans eux, les valeurs absolues m et n appartiendraient indifféremment à quatre points placés symétriquement par rapport aux axes : en effet, $x=m$ exprime deux droites parallèles à l'axe des y situées l'une à sa droite, et l'autre à sa

gauche. $y = n$ convient de même à tous les points de deux parallèles à l'axe des abscisses : donc, l'ensemble de ces deux équations serait indifféremment résolu lorsque, pour le point cherché, on prendrait l'une des quatre intersections des deux systèmes de parallèles (*fig.* 309).

C'est pour détruire toute incertitude à l'égard de la position des points, qu'on a établi une règle des signes conforme à celle qui est adoptée pour les sinus et les cosinus : les abscisses étant assimilées aux cosinus et les ordonnées aux sinus.

Les axes ne sont pas toujours rectangulaires ; quelquefois les questions que l'on traite obligent à passer d'un système de coordonnées rectangulaires, à un système de coordonnées obliques ou réciproquement : mais les premières, qui donnent en général les équations les plus simples, sont les seules que nous ayons besoin de considérer pour ce que nous nous proposons.

Pour compléter la théorie du point, cherchons l'expression analytique de la distance entre deux points donnés dans un plan. Menons les ordonnées MP, M'P' (*fig.* 310), de M et M', et tirons M'R parallèle à AX, le triangle rectangle MRM' donne, en désignant par D l'hypothénuse,

$$D^2 = \overline{MR}^2 + \overline{M'R}^2 = (y'-y'')^2 + (x'-x'')^2 \quad \text{ou} \quad D = \sqrt{(y'-y'')^2 + (x'-x'')^2}.$$

Si l'un des points est situé à l'origine, de manière que ses coordonnées soient $x'' = o$, $y'' = o$:

L'équation ci-dessus devient $D = \sqrt{y^2 + x^2}$.

417. *Équation d'une droite.* Soit une droite BMM'M'' (*fig.* 311) indéfinie et située à volonté dans un plan. Prenons deux axes rectangulaires OX, OY dans ce plan : menons de différents points M, M', M'', les ordonnées MP, M'P', M''P'', etc. Cela posé, désignant par b et c les quantités constantes OC, OB, nous aurons, pour l'un quelconque des points de la droite, pour M par exemple, deux triangles semblables MPB, COB desquels nous tirerons la proportion

$$MP : BP :: CO : BO, \quad \text{c'est-à-dire} \quad y : c + x :: b : c$$

de là
$$y = \frac{bx + bc}{c} = \frac{b}{c}x + b$$

Dans le triangle rectangle BCO, $\frac{b}{c}$ exprime la tangente de l'an-

gle en B, désignons cet angle par α, et sa tangente par a, nous aurons

$$y = ax + b. \quad . \quad . \quad (1)$$

Telle sera l'équation de la droite : car cette relation aura lieu entre les coordonnées d'un tout autre point, aussi bien qu'entre celles de M. Les constantes a et b déterminent la position de la droite, puisqu'elles précisent son inclinaison et un point C, par lequel elle doit passer.

L'équation ci-dessus est donc la représentation analytique de la droite, en ce sens que, si, au moyen de cette équation, on veut retrouver les différents points de la ligne, il suffit de donner à x une suite de valeurs que l'on porte de A en P, P', P'', etc.: menant ensuite par ces derniers points des parallèles à AY, et prenant dessus des parties PM, P'M', P''M'', etc., égales aux valeurs correspondantes de y tirées de l'équation (1), on aura ainsi la position d'autant de points qui tous appartiennent à la droite. Si elle doit passer par l'origine, l'équation, pour être satisfaite, quand on fait $x = o$, doit donner $y = o$, c'est-à-dire que b est nul, et que l'équation se réduit à $y = ax$.

Si, dans l'équation (1), on fait $y = o$, elle donne $x = \frac{-b}{a} = \frac{-b}{\text{tang.}\alpha}$: ce qui se vérifie de suite dans le triangle OBC qui fournit OB ou x : OC :: cos. α : sin. α et $x = \frac{b}{\text{tang.}\alpha}$: quant au signe —, il indique que c'est à gauche de l'origine que la droite coupe l'axe des x.

Si l'on voulait exprimer que deux droites coupent l'axe des y en un même point, il faudrait dans les deux équations $y = ax + b$, $y = a'x + b'$, faire $b = b'$. Si une droite est parallèle à l'axe des x, a doit être nul, et l'équation se réduit à $y = b$; si elle est parallèle à l'axe des y, alors $b = \infty$ $a = \infty$ et $x = BO = c$.

Si les deux droites doivent se rencontrer au point C sur l'axe des x (*fig.* 312), il faut, en faisant $y = o$ dans les deux équations, que les valeurs de x correspondantes soient égales. On a d'une part $ax + b = o$, de l'autre $a'x + b' = o$, d'où $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$ ou $a'b = ab'$. C'est ce qu'on reconnait, en effet, en considérant les deux triangles rectangles CAB, CAB', de chacun desquels o peut déduire la valeur de CA.

Si enfin, l'on veut exprimer que deux droites sont parallèles, il faut que $a = a'$.

Pour trouver l'angle que forment deux droites, remarquons que $\alpha'=\alpha+M$ (*fig.* 313), donc

$$\tang.M=\tang.(\alpha'-\alpha)=\frac{\tang.\alpha'-\tang.\alpha}{1+\tang.\alpha'\,\tang.\alpha}=\frac{a'-a}{1+aa'}$$

On trouve encore ici la condition pour que deux droites soient parallèles : puisque, dans ce cas, l'angle qu'elles font est nul, sa tangente nulle aussi et le numérateur de la fraction qui la représente, égal à zéro ; c'est-à-dire $a=a'$.

Si les deux droites doivent être perpendiculaires, la tangente de l'inclinaison de l'une sur l'autre est infinie, et pour cela il faut que le dénominateur soit nul ; que l'on ait $aa'+1=o$ ou $a'=-\frac{1}{a}$. Dans ce cas, si la première équation est $y=ax+b$, il faut que celle de la seconde droite soit $y=\frac{-1}{a}x+b'$.

418. *Équation du cercle.* Soit un cercle d'un rayon r quelconque (*fig.* 314) dont le centre est en O. Désignant par p et q les coordonnées du centre, et par x et y celles d'un point M de la circonférence, nous aurons, en vertu de ce que nous avons vu plus haut, relativement à la distance entre deux points

$$r^2=(x-p)^2+(y-q)^2$$

Cette relation caractérisant tous les points de la circonférence, est l'équation du cercle. Elle devient plus simple quand on place l'origine au centre : dans ce cas, $p=o$, $q=o$, et l'équation se réduit à $r^2=x^2+y^2$.

Si l'on résout l'équation générale du cercle par rapport à x, il en résulte $x=p\pm\sqrt{r^2-(y-q)^2}$: pour que les valeurs de x soient réelles, il faut que $r^2-(y-p)^2$ ne soit pas négatif : à la limite $r=y-q$ ou $q-y$ et $y=r+q$ et alors $x=+p$. Quand $y=q$, l'expression sous le radical est la plus grande possible et les valeurs correspondantes de x sont un maximum et un minimum de la forme $x=p+r$ et $x=p-r$: c'est ce qui a lieu pour les points D et D' situés sur la parallèle à l'axe des X passant par le centre. Si l'on avait résolu par rapport à y, on aurait trouvé $y=q\pm\sqrt{r^2-(x-p)^2}$; à $x=p$ correspondent $y=q+r$ et $y=q-r$. Ces ordonnées sont celles des points E, E'.

Quand il s'agit de savoir où le cercle coupe l'axe des x et celui des y, il faut, dans l'équation, faire successivement $y=o$ et $x=o$. Par la première supposition, il vient $x=p\pm\sqrt{r^2-q^2}$. Cette ex-

pression donne deux valeurs de x, lorsque le radical n'exprime pas une quantité imaginaire, c'est-à-dire quand r^2-q^2 ou $(r+q)(r-q)$ est positif; cette condition n'est pas satisfaite dans la *fig.* 314, mais elle l'est dans la *fig.* 315. Si c'est x que l'on égale à zéro, on trouve pour les ordonnées correspondantes $y=q\pm\sqrt{r^2-p^2}=q\pm\sqrt{(r-p)(r+p)}$. Ici, nous voyons encore que si $p>r$, il n'existe pas de valeur réelle de y, ce qui exprime que la courbe ne rencontre pas l'axe des y, et c'est ce qui arrive *fig.* 314 et 315. Quand $r>p$, on a deux valeurs pour y. On voit (*fig.* 316) que, lorsque le cercle rencontre les axes, les points d'intersection sont placés symétriquement par rapport aux points où les coordonnées du centre coupent les axes.

419. *Construction et équation de l'ellipse.* Cette courbe jouit de cette propriété remarquable que, si l'on joint l'un quelconque de ses points à deux points fixes nommés foyers, et situés dans son intérieur, la somme des deux distances est une quantité constante.

Pour construire cette courbe d'après sa définition, prenons le milieu O (*fig.* 317) de la ligne qui unit les deux foyers FF, et, à partir de ce point, portons la moitié de 2A, somme constante de deux rayons vecteurs tels que FM et F'M, de O en R et en R'. Ces points appartiendront à la courbe : en effet, il résulte de cette construction que $RF'=R'F$, et qu'ainsi,

$$RF'+RF=R'F+RF=RR'=2A.$$

De même, si des points F et F' comme centres, on décrit avec un rayon égal à A, deux arcs, ils se couperont en deux points S et S', qui seront encore évidemment sur l'ellipse, puisque $FS+F'S=2A$ et $FS'+F'S'=2A$. S et S' sont également sur la perpendiculaire élevée par le milieu de RR'.

Pour obtenir des points intermédiaires, marquons sur RR', et entre F et F', un point quelconque L; puis, des foyers comme centres et avec des rayons égaux à RL et R'L, décrivons deux circonférences qui se coupent en M et m, nous aurons deux nouveaux points de la courbe, et ainsi de suite.

On peut encore décrire l'ellipse d'un mouvement continu, en fixant aux foyers les extrémités d'un fil dont la longueur égale 2A, et en faisant ensuite glisser un crayon qui tienne ce fil toujours tendu.

L'ellipse ainsi déterminée de forme, recherchons son équa-

tion, c'est-à-dire une relation entre les coordonnées de chacun de ses points rapportées à deux axes fixes.

Soient $OP = x$, $MP = y$; $FF' = 2C$, $RR' = 2A$; $FM = z$; $F'M = z'$

Les équations de deux cercles, qui ont leurs centres sur l'axe des x, en F et F' à droite et à gauche de l'origine, seront, en leur donnant z et z' pour rayons

(1) $y^2 + (x-c)^2 = z^2$ (2) $y^2 + (x+c) = z^2$ et de plus on a $z + z' = 2A$ (3)

Éliminons z et z' entre ces trois équations pour en avoir une seule qui, ne contenant que les variables x et y et les constantes A et C, appartiendra à l'ellipse, puisqu'elle satisfera à tous les points tels que M.

Retranchant (2) de (1), il vient,

$$(4)\ 4Cx = z'^2 - z^2 = (z'+z)(z'-z) \text{ d'où } z' \quad z = \frac{4Cx}{z'+z}$$

et en vertu de (3), $z' - z = \frac{4Cx}{2A} = 2\,\frac{Cx}{A}$. Des somme et différence de z et z', nous tirons $z' = A + \frac{Cx}{A}$, $z = A - \frac{Cx}{A}$; mais l'une seulement nous suffit.

Substituons la valeur de z dans (1) qui devient

$$y^2 + x^2 + C^2 - 2Cx = A^2 + \frac{C^2}{A^2}\,x^2 - 2Cx\,;$$

Réduisant et chassant le dénominateur

$$A^2y^2 + A^2x^2 + A^2C^2 = A^4 + C^2x^2 \quad \text{ou} \quad A^2y^2 + (A^2 - C^2)\,x^2 = A^2(A^2 - C^2)$$

Puisque FF' ou 2C est plus petit que RR' ou 2A, il s'ensuit que $A^2 - C^2$ est toujours positif, et si on le fait égal à B^2, l'équation de l'ellipse devient enfin

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$$

Le triangle F'CO dans lequel l'hypothénuse égale A et $F'O = C$ fait voir que $CO = B$, puisque $\overline{CF'}^2 - \overline{OF'}^2 = \overline{OC}^2$ ou $A^2 - C^2 = B^2$. On voit de suite que A et B sont les moitiés du grand et du petit axe, c'est-à-dire les distances du centre au point où la courbe rencontre les axes des x et des y : car, en faisant $y = o$, il vient $B^2x^2 = A^2B^2$ ou $x^2 = A^2$ et $x = \pm A$. Cette double valeur de x indique que les deux points d'intersection de la courbe avec l'axe des x sont placés symétriquement à droite et à gauche de l'origine.

On tire une conséquence analogue de la supposition $x=o$, qui réduit l'équation à $A^2y^2=A^2B^2$, d'où $y=\pm B$.

En résolvant successivement l'équation par rapport à y et à x, on voit que les plus grandes valeurs de ces coordonnées sont $y=\pm B$, $x=\pm A$: en effet, dans l'équation $y=\pm\frac{B}{A}\sqrt{A^2-x^2}$, il faut, pour que y soit une quantité réelle, que le binôme sous le radical soit positif, c'est-à-dire que $x<A$. La plus grande valeur que puisse prendre x est donc $\pm A$, auquel cas y devient nul. On voit de même, au moyen de $x=\pm\frac{A}{B}\sqrt{B^2-y^2}$, qu'à $x=o$ correspondent pour y deux *maxima* positif et négatif qui sont $y=\pm B$.

Si les deux axes de l'ellipse deviennent égaux, si l'on a $A=B$, l'équation devient $A^2y^2+A^2x^2=A^4$ ou $y^2+x^2=A^2$: ce qui indique que la courbe se réduit à un cercle dont le rayon égale A, et puisque l'on avait $A^2-C^2=B^2$, il faut que $C=o$, ou, en d'autres termes, que les deux foyers viennent se confondre avec le centre.

420. *Construction de l'ellipse par points.* L'équation de l'ellipse comparée à celle du cercle va nous fournir un moyen de construire cette courbe par points. Soient A et B ses demi-axes, et soit $\frac{A}{B}=n$. Décrivons un cercle RN (*fig.* 317) avec le rayon A ; abaissons de l'un quelconque de ses points NH perpendiculaire à OR, et prenons enfin le point Q de telle sorte que $\frac{NH}{QH}=n$. En désignant par x et y les coordonnées du cercle, et par x et y' celles de la courbe formée par la réunion d'une suite de points analogues à Q, nous aurons les deux équations

$$x^2+y^2=A^2,\quad x^2+\overline{y'n}^2=A^2$$

La seconde, qui représente la courbe, peut être mise sous la forme

$$x^2+\frac{A^2}{B^2}y'^2=A^2 \quad \text{ou} \quad A^2y'^2+B^2x^2=A^2B^2$$

puisque $n=\frac{A}{B}$. L'équation finale est précisément celle d'une ellipse dont les demi-axes sont A et B. Il suffira donc, pour la construire, d'abaisser de différents points du cercle décrit sur le grand axe, des perpendiculaires à cet axe, de diviser toutes les

ordonnées ainsi obtenues dans le rapport $\frac{A}{B}$, et de joindre les points qui en résultent par une courbe continue.

421. *Équation d'une tangente à l'ellipse.* Proposons-nous maintenant de mener une tangente à l'ellipse. Pour résoudre cette question, nous allons prendre l'équation d'une droite, la modifier de manière qu'elle exprime que la droite passe par deux points appartenant à la courbe, c'est-à-dire qu'elle est une sécante. Nous la rendrons ensuite tangente, en faisant confondre les deux points en un seul.

Soient $y = ax + b$ l'équation de la droite,

x', y', x'', y'', les coordonnées des deux points de l'ellipse.

Pour exprimer que la droite passe par ces deux points, il faut que l'on ait à la fois

$$y = ax + b, \quad y' = ax' + b, \quad y'' = ax'' + b$$

D'où l'on tire

$$y - y' = a\,(x - x') \quad \text{et} \quad y' - y'' = a\,(x' - x'').$$

Cette dernière fournit la valeur de a qui, substituée dans la première, donne pour équation de la droite

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x') \ldots \quad (1).$$

Il faut deux conditions pour déterminer la position d'une droite. L'équation générale indiquait à quelle distance de l'origine, la droite coupait l'axe des y, et quel angle elle formait avec l'axe des x. Dans l'équation (1), ces deux conditions sont remplacées par deux autres dont elles sont la conséquence, savoir : celle de passer par deux points déterminés de position. Pour exprimer aussi que l'ellipse passe par les deux points, il faut que son équation soit encore satisfaite, quand on y introduit les coordonnées x' y', x'', y'' ; il faut donc que

$$A^2y'^2 + B^2x'^2 = A^2B^2 \quad \text{et} \quad A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2$$

De là nous tirons, en retranchant la seconde de la première et en décomposant les différences de carrés en leurs facteurs

$$A^2\,(y'^2 - y''^2) + B^2\,(x'^2 - x''^2) = o, \quad A^2(y' - y'')\,(y' + y'') + B^2(x' - x'')\,(x' + x'') = o$$

d'où
$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{-B^2}{A^2}\,\frac{x' + x''}{y' + y''}$$

En substituant cette valeur dans (1), l'équation qui en résul-

tera sera bien celle d'une sécante, puisqu'elle naîtra d'une combinaison des équations de la droite et de l'ellipse.

Cette équation sera

$$y-y'=\frac{-B^2}{A^2}\,\frac{(x'+x'')}{(y'+y'')}(x-x')\ldots\ (2).$$

Supposons actuellement que les deux points se confondent en un seul, les coordonnées x' et x'', y' et y'', deviendront les mêmes, et (2) se transformera en

$$y-y'=\frac{-B^2x'}{A^2y'}(x-x').$$

Telle est l'équation de la tangente à l'ellipse ; on peut lui conserver cette forme ou la transformer ainsi qu'il suit : en chassant d'abord le dénominateur, on a

$$A^2y'(y-y')=-B^2x'(x-x')\,;\ A^2yy'-A^2y'^2=-B^2xx'+B^2x'^2\,;$$

$$A^2yy'+B^2xx'=A^2y'^2+B^2x'^2 \quad \text{et enfin} \quad A^2yy'+B^2xx'=A^2B^2$$

parce que $\qquad A^2y'^2+B^2x'^2=A^2B^2$

On trouve très-facilement l'équation de la tangente à l'ellipse au moyen des plus simples notions de calcul différentiel. La marche en est si simple, que nous croyons pouvoir l'indiquer ici :

L'équation d'une tangente à une courbe quelconque, pour un point dont les coordonnées sont x' est y', et $y-y'=\frac{dy}{dx}(x-x')$. C'est de l'équation différenciée de la courbe que l'on tire la valeur de $\frac{dy}{dx}$ coefficient de x. Or, l'équation de l'ellipse est $A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$; différenciée elle donne

$$2A^2ydy+2B^2xdx=o \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{B^2x}{A^2y}$$

et par conséquent en substituant, nous trouvons comme précédemment $y-y=\frac{-B^2x'}{A^2y'}(x-x')$.

Équation d'une normale à l'ellipse. S'il s'agit de mener par le point de tangence une droite perpendiculaire à la tangente, son équation sera de la forme $y-y'=a'(x-x')$.

Mais nous avons vu que la condition que deux droites soient perpendiculaires est $aa'+1=o$ ou $a'=\frac{-1}{a}$: or, l'équation de

la tangente donne $a = \frac{-B^2x'}{A^2y'}$, donc $a' = \frac{A^2y'}{B^2x'}$ et l'équation de la normale est $y - y' = \frac{A^2y'}{B^2x'}(x - x)'$.

Équations de la tangente et de la normale au cercle. Cette courbe n'étant qu'une circonstance particulière de l'ellipse pour laquelle $A = B = r$, on peut déduire ces deux équations de celles que nous venons de trouver, en faisant disparaître les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, ou les chercher directement, par une marche entièrement analogue à celle que nous avons employée.

Elles sont $y - y' = \frac{-x'}{y'}(x - x')$ ou $yy' + xx' = r^2$ pour la tangente et $y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x')$ ou $y = \frac{y'}{x'}x$ pour la normale : ces dernières confirment ce que nous savons déjà, que les normales au cercle passent toutes par le centre, puisqu'en faisant $x = o$, on trouve $y = o$ et réciproquement.

422. *Autres sections coniques.* Quoique l'on n'ait besoin de connaître que l'équation de l'ellipse et de sa normale pour résoudre les problèmes des latitudes et longitudes, il nous paraît convenable de dire ici quelques mots des deux autres courbes, la parabole et l'hyperbole. Ces courbes et l'ellipse sont le résultat de la section d'un cône par un plan. Le cône est un solide engendré par un triangle rectangle qui tourne autour de l'un des côtés de l'angle droit comme axe. Si l'on imagine que deux triangles rectangles semblables ABC, A'B C' (*fig.* 318), soient placés de telle sorte que les deux côtés homologues AC, A'C forment le prolongement l'un de l'autre, la rotation des deux hypoténuses engendrera ce que l'on nomme les deux nappes du cône. AA'' est l'axe, C le sommet, BB' la génératrice, et le cercle dont AB est le rayon, la directrice. Si l'on coupe cette surface par un plan qui rencontre toutes les génératrices, on aura une courbe fermée qui sera un cercle, si le plan est perpendiculaire à l'axe dans le cas où le cône est droit, ou en général, quand le plan est parallèle à la base : la courbe sera une ellipse, lorsque le plan sera incliné sur la base.

Si ce plan est parallèle à l'une des génératrices, il ne rencontrera, comme dans le cas précédent, qu'une des nappes, et formera une courbe non fermée, composée de deux branches qui



se prolongeront à l'infini, si la nappe du cône n'est pas limitée par une base. Cette courbe se nomme *parabole* (*fig.* 319).

Si enfin, l'inclinaison du plan sécant, par rapport à celui de la base, augmente encore, on obtiendra une courbe à quatre branches que l'on appelle *hyperbole* (*fig.* 320).

Nous allons, comme pour l'ellipse, en chercher la construction par points, puis les équations.

423. *Parabole.* La distance de chacun des points tels que M de la courbe à un point fixe F (*fig.* 321) est égale à celle de ce même point M, à une droite OQ nommée directrice.

Pour la construire graphiquement, on trace OF perpendiculaire à OY, et le point A, milieu de OF satisfaisant à la condition prescrite, est déjà un point de la parabole, puisque OA = AF. Au delà de A, on élève une droite MP parallèle à OY, et dont tous les points sont par conséquent distants de cette ligne d'une quantité OP. Puis de F comme centre et d'un rayon égal à OP, on trace un arc de cercle qui rencontre MP en M et en M'. Pour ces deux points, on a donc MQ = MP, M'Q' = M'P'. C'est ainsi que l'on construit la parabole par points.

S'il s'agit de la tracer d'une matière continue, on place le côté BC d'une équerre sur la directrice; on fixe à son angle D et au foyer F (*fig.* 322), les deux extrémités d'un fil de la longueur du côté CD de l'équerre; ensuite, on la fait glisser sur la directrice, en tenant le fil tendu sur CD. Quand le fil forme une ligne droite de D en F, le point D est sur un point M de la courbe, puisque CM = CF. Dans une autre position, D étant descendu en D, le point M sur C'D' appartient encore à la parabole, puisque de CD = DF, on retranche de part et d'autre M D', et qu'il reste ainsi pour satisfaire à l'énoncé, C'M' = M'F.

Pour obtenir l'équation, plaçons l'origine des coordonnées au sommet A de la courbe.

Désignant par p la distance OF (*fig.* 323), du foyer à la directrice, nous aurons $AF = OA = \frac{p}{2}$.

La circonférence décrite du point F donne entre les coordonnées d'un point M quelconque la relation $\overline{FM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{FP}^2$ ou

$$z^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 + x^2 + \frac{p^2}{4} - px$$

et d'ailleurs

$$FM \quad \text{ou} \quad z = OP = x + \frac{p}{2} \qquad \text{d'où} \qquad z^2 = x^2 + \frac{p^2}{4} + px.$$

Égalant ces deux valeurs de z^2, il vient

$$x^2+\frac{p^2}{4}+px=y^2+x^2+\frac{p^2}{4}-px \quad \text{et enfin} \quad y^2=2px.$$

Telle est la relation qui existe entre les coordonnées d'un point de la parabole.

Discutons cette équation. D'abord nous aurons $y=o$, en faisant $x=o$, ce qui coïncide avec la condition établie que nous prenions le sommet de la courbe pour origine.

En extrayant la racine carrée, $y=\pm\sqrt{2px}$. A chaque valeur de y correspondent deux valeurs égales et de signes contraires de y. x négatif donne pour y des valeurs imaginaires, ce qui indique que la courbe est entièrement située à droite de l'axe des y. Si l'on fait $x=\frac{p}{2}$, on a, pour les ordonnées correspondantes qui aboutissent au foyer, $y^2=p^2$ et $y=\pm p$. Ainsi la double ordonnée MM' passant par le foyer est double de la distance de la directrice à ce foyer.

424. *Hyperbole.* On demande l'équation d'une courbe telle que si l'on joint chacun de ses points M (*fig.* 324) à deux points fixes F, F la différence F M — FM soit égale à une ligne donnée 2A. Cette courbe est l'hyperbole : F, F' en sont les foyers, et FM,F M les rayons vecteurs.

Pour les tracer par points, on porte sur la droite qui passe par les foyers, à partir de son milieu O, deux longueurs OA, OB égales chacune à A : prenant un point L quelconque au delà de F, on trace, des points F et F comme centres, avec des rayons égaux à AL,BL, des arcs de cercles qui, se coupant deux à deux, donnent quatre points M,M M''M''. Ceux-ci appartiennent à la courbe, puisque, d'après la construction, la différence des deux rayons vecteurs, pour chacun d'eux, égale la constante 2A.

Pour trouver l'équation de l'hyperbole, on prend OB et OC comme axes des x et des y ; on a

$$OP=x\,;\ MP=y,\ OF=OF'=C,\ FM=z,\ F'M=z'.$$

Pour M, les deux cercles dont les centres sont F, F' ont pour équations

$$(1)\quad z^2=y^2+(c-x)^2=y^2+x^2+c^2-2cx,\ z'^2=y^2+(c+x)^2=y^2+x^2+c+2cx$$

retranchant, on obtient $z'^2-z^2=(z'+z)(z'-z)=4Cx$,

et puisque $z'-z=2A$, il vient $z+z'=\frac{4C}{2A}=2\frac{Cx}{A}$

par conséquent $z' = A + \frac{Cx}{A}, \ z = A - \frac{Cx}{A}.$

Substituons pour z sa valeur dans (1), et nous aurons

$$\frac{C^2x^2}{A^2} + A^2 = y^2 + x^2 + C^2, \ A^2y^2 + A^2x^2 + A^2C^2 = A^4 + C^2x^2$$

et

$$A^2y^2 + (A^2 - C^2)\,x^2 = (A^2 - C^2)$$

C est plus grand que A, ainsi $A^2 - C^2$ est négatif : faisons $C^2 - A^2 = B^2$, et l'équation deviendra

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2$$

Elle ne diffère de celle de l'ellipse que par le signe de B^2.

Si l'on fait $y = o$, il vient $x = \pm A$, ce qui indique que la courbe coupe l'axe des x à égale distance, à droite et à gauche de l'origine. Si $x = o$, on a $y \pm \sqrt{-B^2} = \pm B\sqrt{-1}$ quantité imaginaire : la courbe ne rencontre donc pas l'axe des y.

L'équation résolue par rapport à y devient

$$y = \pm \frac{B}{A}\sqrt{x^2 - A^2} = \pm \frac{B}{A}\sqrt{(x+A)(x-A)}.$$

On a donc deux valeurs de y égales et de signes contraires, pour une valeur de x, et l'on retrouve les mêmes, quand on change seulement le signe de x. Ainsi, à une même ordonnée y, correspondent deux abscisses qui ne diffèrent que par le signe ; de même que deux ordonnées égales et de signes contraires appartiennent à deux points de la courbe qui ont même abscisse. On voit encore, par la dernière forme sous laquelle nous avons mis l'équation, que toute valeur de x plus petite que A, n'a pas d'ordonnée correspondante. Les plus grandes valeurs de x qui ne rendent pas y imaginaire, le rendent nul : ce sont $x = +A$ et $y = -A$.

Dans ces notions très-élémentaires et très-incomplètes de géométrie analytique, nous avons dépassé ce qui nous est rigoureusement nécessaire ; mais nous avons pensé qu'il ne serait pas tout à fait inutile de faire voir de quelle ressource est l'analyse pour trouver la solution de toute espèce de problème.

CHAPITRE VII.

EXPRESSIONS ANALYTIQUES DE QUELQUES LIGNES REMARQUABLES DU SPHÉROÏDE TERRESTRE EN FONCTION DE LA LATITUDE.

425. *Grande et petite normales.* Soit M un point situé sur le

globe (*fig.* 325), et dont le méridien est PME. La normale à ce point est MR que l'on désigne par N ou grande normale, par opposition à MQ que l'on nomme n ou petite normale. L'angle MQE est la latitude L de M ; c'est aussi l'inclinaison de la normale sur l'axe des x.

Nous verrons plus tard qu'il nous est indispensable de connaître les expressions de ces deux lignes, en fonction de la latitude comme seule variable, et de quantités constantes qui sont le grand et le petit axe de l'ellipsoïde, c'est-à-dire du solide engendré par la révolution de l'ellipse autour de son petit axe.

Prenons l'équation de l'ellipse

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{A^2}=\frac{y^2}{B^2}=1. \ . \ . \ (1)$$

Celle de la normale est (n° 421),

$$y-y'=\frac{A^2y'}{B^2x'}(x-x')$$

x' y' sont les coordonnées du point de rencontre de la droite et de la courbe : $\frac{A^2y'}{B^2x'}$ représente la tangente de l'angle MQE ou L.

Donc $\quad \text{tang.L}=\frac{A^2y'}{B^2x'} \quad$ ou $\quad B^2x' \,\text{tang.L}=A^2y'. \ . \ . \ (2)$

Nous pouvons nous abstenir d'accentuer les coordonnées du point de tangence, actuellement que nous n'avons plus à nous servir de l'équation de la normale. En construisant les deux triangles rectangles MFQ, MRS, nous trouvons que

$$\text{MF} \quad \text{ou} \quad y=n \,\text{sin.L}. \ . \ . \ (3) \quad \text{et} \quad \text{RS} \quad \text{ou} \quad x=\text{N}\,\text{cosin.L}. \ . \ . \ (4)$$

Si nous substituons successivement ces deux valeurs de x et de y dans l'équation (2), nous trouvons

$$B^2x \,\text{tang.L}=A^2n \,\text{sin.L} \quad \text{d'où} \quad x=\frac{A^2}{B^2}\text{N}\cos \text{L}. \ . \ . \ (5)$$

$$B^2\text{N} \,\text{cos.L}\,\text{tang.L}=A^2y \quad \text{d'où} \quad y=\frac{B^2}{A^2}\text{N}\,\text{sin.L}. \ . \ . \ (6)$$

En comparant les valeurs de y fournies par (3) et (6) ou celles que (4) et (5) donnent pour x, on trouve $n=\frac{B^2}{A^2}\text{N}$

ou $$\text{N} : n :: A^2 : B^2.$$

c'est-à-dire que la grande et la petite normales sont entre elles dans le rapport des carrés du grand et du petit axe.

On arrive au même résultat, en divisant l'une par l'autre les expressions de N et n qui terminent ce paragraphe.

En introduisant dans (1) les valeurs de x et y en fonction de N tirées de (4) et (6); puis ensuite celles de ces mêmes coordonnées telles que les donnent (3) et (5) en fonction de n, nous aurons deux équations qui détermineront N et n.

$$\frac{N^2 \cos.^2 L}{A^2} + \frac{B^2}{A^4} N^2 \sin.^2 L = 1 \quad \text{ou} \quad N^2\left(\frac{\cos.^2 L}{A^2} + \frac{B^2}{A^4}\sin.^2 L\right) = 1$$

$$\frac{n^2 A^2 \cos.^2 L}{B^2} + \frac{n^2 \sin.^2 L}{B^2} = 1 \quad \text{ou} \quad n^2\left(\frac{A^2}{B^2}\cos.^2 L + \frac{\sin.^2 L}{B^2}\right) = 1$$

Chassant les dénominateurs

$$N^2 (A^2 \cos.^2 L + B^2 \sin.^2 L) = A^4. \qquad n^2 (A^2 \cos.^2 L + B^2 \sin.^2 L) = B^4.$$

et en remplaçant $\cos.^2 L.$ par $1 - \sin.^2 L$

$$N^2 [A^2 - (A^2 - B^2) \sin.^2 L] = A^4, \qquad n^2 [A^2 - (A^2 - B^2) \sin.^2 L] = B^4.$$

On appelle excentricité et on désigne par e le rapport de la distance focale C au demi-grand axe A, de manière que

$$e^2 = \frac{C^2}{A^2} = \frac{A^2 - B^2}{A^2} \quad \text{et que} \quad A^2 - B^2 = A^2 e^2,\ \text{et}\ B^2 = A^2 (1 - e^2)$$

Substituons ces expressions dans les dernières valeurs de N et n, et nous aurons

$$N^2 = \frac{A^4}{A^2 - A^2 e^2 \sin.^2 L}, \quad \text{et} \quad n^4 = \frac{A^4 (1 - e^2)^2}{A^2 - A^2 e^2 \sin.^2 L}$$

ou plutôt

$$N = \frac{A}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}, \qquad n = \frac{A (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

426. *Sous-normales.* La sous-normale OR se déduira facilement de ce qui précède et des relations qui existent entre les éléments du triangle OQR (*fig.* 325) : en effet, la sous-normale ou

$$OR = RQ \sin OQR = RQ \sin. L = (N - n) \sin. L = \frac{A - A(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}} \sin. L =$$

$$= \frac{A e^2 . \sin. L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

On trouverait de même que $OQ = \dfrac{A e^2 \cos. L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$

Si l'on remarque sur la figure 325 que $sN^2 + sn^2 = (N - n)^2$, on trouvera en substituant les valeurs ci-dessus de sN et sn ou OR et OQ

$$\frac{A^2 e^4 \sin.^2 L + A^2 e^4 \cos.^2 L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)} \quad \text{ou} \quad \frac{A^2 e^4}{(1 - e^2 \sin.^2 L)} = (N - n)^2$$

ou $$N - n = \frac{A e^2}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

comme on l'aurait trouvé directement au moyen de N et n.

L'abcisse d'un point M n'étant autre chose que le rayon du parallèle sur lequel il est situé, nous trouvons en désignant par ρ ce rayon et au moyen du triangle MRS

$$RS = OF \quad \rho = N \cos. L$$

$$\rho = \frac{A. \cos. L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

427. On peut aisément vérifier l'exactitude des expressions qui représentent les normales et sous-normales, pour le cas où l'ellipsoïde devient une sphère, auquel cas $A = B$ et $e^2 = o$: car alors on trouve, comme cela doit être, $N = n = A$; $OR = OQ = o$.

428. *Rayon de la terre en fonction de la latitude.* Un rayon quelconque tel que CA ou CB (*fig.* 325), que nous représenterons par R est lié aux coordonnées de son extrémité par l'équation $R^2 = y^2 + x^2$. Mettons pour x et y les valeurs fournies par (4) et (6), il viendra

$$R^2 = \frac{B^4}{A^4} N^2 \sin.^2 L + N^2 \cos.^2 L$$

et en remplaçant N par l'expression que nous venons de trouver plus haut

$$R^2 = \frac{B^4 \sin^2 L}{A^2 (1 - e^2 \sin.^2 L)} + \frac{A^2 \cos^2 L}{(1 - e^2 \sin^2 L)} =$$

$$\frac{B^4 \sin.^2 L + A^4 \cos.^2 L}{A^2 (1 - e^2 \sin.^2 L)} = \frac{A^4 - (A^4 - B^4) \sin^2 L}{A^2 (1 - e^2 \sin.^2 L)}$$

Nous savons que $B^4 = A^4 (1 - e^2)^2$, ou par suite

$$A^4 - B^4 = A^4 (2e^2 - e^4).$$

d'où, en divisant par A^2 haut et bas,

$$R^2 = \frac{A^2 (1 - (2e^2 - e^4) \sin.^2 L)}{1 - e^2 \sin.^2 L}$$

ou en supprimant le terme en $e^4 \sin.^2 L$

$$R^2 = \frac{A^2 (1 - 2e^2 \sin.^2 L)}{1 - e^2 \sin.^2 L}$$

et en faisant passer le dénominateur au numérateur, en lui donnant l'exposant -1, développant et s'en tenant au second terme,



parce que le troisième serait du quatrième ordre par rapport à e.

$$R^2 = A^2 (1 - 2e^2 \sin.^2 L)\,(1 + e^2 \sin.^2 L)$$

ou

$$R^2 = A^2 (1 + e^2 \sin.^2 L - 2e^2 \sin.^2 L - 2e^4 \sin.^4 L) = A^2 (1 - e^2 \sin.^2 L - 2e^4 \sin.^4 L)$$

et enfin, supprimant le terme en e^4, $R^2 = A^2 (1 - e^2 \sin.^2 L)$ ou approximativement $R = A\,(1 - e^2 \sin.^2)^{\frac{1}{2}}$. On arrive au même résultat, comme ce doit être, en employant les valeurs de x et y en fonction de n au lieu de N. Concluons de cette valeur du rayon et de celle de la grande normale que $NR = A^2$, c'est-à-dire que, dans le sphéroïde terrestre, et pour un point quelconque, le rayon de l'équateur est moyen proportionnel entre la normale et le rayon.

Pour $L = o$, on a

$$N = A, \quad n = A(1 - e^2), \quad Nn = A^2 (1 - e^2), \quad R = N = A$$

Pour $L = 100^g$

$$N = \frac{A}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad n = A(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}, \quad Nn = A^2, \quad n = R$$

Si l'on voulait avoir le rayon correspondant à la latitude moyenne 50^g, on remarquerait que, dans ce cas, sin. = cosin., $\sin.^2 = \text{cosin.}^2 = 1 - \sin.^2$, $\sin.^2 = \frac{1}{2}$. Désignant donc par R′ ce rayon, on aurait

$$R'^2 = A^2 \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)$$

429. *Rapport entre un rayon quelconque et celui de* 50^g. Au moyen des valeurs de R^2 et R'^2 que nous venons de trouver, il vient successivement

$$\frac{R^2}{R'^2} = \frac{1 - e^2 \sin.^2 L}{1 - \frac{e^2}{2}} = (1 - e^2 \sin.^2 L)\left(1 - \frac{e^2}{2}\right)^{-1} = (1 - e^2 \sin.^2 L)\left(1 + \frac{e^2}{2}\right)$$

$$\frac{R^2}{R'^2} = 1 - e^2 \sin.^2 L + \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{2} \sin.^2 L =$$

$$\frac{R^2}{R'^2} = 1 - e^2 \sin.^2 L + \frac{e^2}{2} = 1 + \frac{e^2}{2}(1 - 2 \sin^2 L)$$

et enfin
$$\frac{R^2}{R'^2} = \left(1 + \frac{e^2}{2} \cos. 2\,L\right)$$

Tel est le rapport des carrés des rayons : quant à celui des rayons eux-mêmes,

il sera
$$\frac{R}{R'} = \left(1 + \frac{e^2}{2} \cos. 2\,L\right)^{\frac{1}{2}}$$

Si nous voulons établir ici numériquement le coefficient de cos. 2L, en vertu de l'aplatissement qui a été trouvé $\frac{1}{309}$, nous écrirons $B = A\left(1 - \frac{1}{309}\right)$, d'où

$$B^2 = A^2 - \frac{2A^2}{309} + \frac{A^2}{(309)^2}, \quad \text{et} \quad \frac{A^2 - B^2}{A^2}$$

ou

$$e^2 = \frac{2}{309} - \frac{1}{(309)^2} = \frac{617}{95481} = 0,00646202$$

Nous aurons donc

$$\frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A} = \frac{C}{A} = e = 0,0804 \quad \text{et} \quad \frac{e^2}{2} = 0,00323101$$

correspondant à

$$\frac{A - B}{A} = \frac{1}{309} = 0,006236 \quad \text{et} \quad \frac{R}{R'} = (1 + 0,00323 \cos.2L)^{\frac{1}{2}}$$

Un méridien est donc une ellipse dans laquelle le petit axe diffère du grand de $\frac{1}{309}$ et dont l'excentricité est égale aux 0,08 du demi-grand axe.

On peut encore arriver à l'expression du rayon de la terre en fonction de la latitude par la méthode suivante;

On sait que $\tang. L = \frac{A^2 y}{B^2 x}$ ou $\tang.^2 L = \frac{A^4 y^2}{B^4 x^2}$, mais de $A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2$ on tire $y^2 = \frac{B^2 (A^2 - x^2)}{A^2}$; et en substituant dans la valeur de tang.²L, $\quad \tang.^2 L = \frac{A^2 (A^2 - x^2)}{B^2 x^2}$

ou

$$B^2 x^2 \tang.^2 L = A^4 - A^2 x^2$$

et

$$x^2 = \frac{A^4}{A^2 + B^2 \tang.^2 L} = \frac{A^4}{A^2 \left[1 + (1 - e^2) \tang.^2 L\right]} = \frac{A^2}{1 + (1 - e^2) \tang.^2 L}$$

De même, pour avoir la valeur de y^2, on substitue dans $\tang.^2 L = \frac{A^4 y^2}{B^4 x^2}$, celle de x^2 tirée de l'équation de l'ellipse.

Il en résulte

$$\tang.^2 L = \frac{A^2 y^2}{B^2 (B^2 - y^2)}, \quad B^4 \tang.^2 L - B^2 y^2 \tang.^2 L = A^2 y^2$$

$$y^2 = \frac{B^4 \tang.^2 L}{A^2 + B^2 \tang.^2 L} = \frac{A^4 (1 - e^2)^2 \tang.^2 L}{A^2 + A^2 (1 - e^2) \tang.^2 L} = \frac{A^2 (1 - e^2)^2 \tang.^2 L}{1 + (1 - e^2) \tang.^2 L}$$

d'où

$$R^2 = A^2 \left(\frac{1 + (1 - e^2)^2 \tang.^2 L}{1 + (1 - e^2) \tang.^2 L}\right)$$

Cette expression du rayon en fonction de la tangente de L peut être ramenée à celle trouvée § 428 en fonction du sinus. Pour cela, développons $(1-e^2)^2$ en négligeant le troisième terme qui serait du quatrième ordre par rapport à e,

$$R^2 = A^2\left(\frac{1+(1-2e^2)\ \text{tang.}^2L}{1+(1-e^2)\ \text{tang.}^2L}\right) = A^2\left(\frac{1+\text{tang.}^2L-2e^2\ \text{tang.}^2L}{1+\text{tang.}^2L-e^2\ \text{tang.}^2L}\right)$$

Et parce que $1+\text{tang.}^2 = \text{séc.}^2$,

$$R^2 = A^2\left(\frac{\text{séc.}^2L-2e^2\ \text{tang}^2L}{\text{séc.}^2L-e^2\ \text{tang.}^2L}\right)$$

$\text{séc.}^2 = \frac{1}{\cos.^2}$ et $\text{tang.}^2 = \frac{\sin.^2}{\cos.^2}$: nous pouvons donc, en multipliant haut et bas par $\cos.^2$, transformer la valeur de R^2 ainsi qu'il suit :

$$R^2 = A^2\left(\frac{1-2e^2\sin.^2L}{1-e^2\sin.^2L}\right)$$

430. *Expression des rayons vecteurs pour un point quelconque.* Nous avons vu n° 419 que l'expression des rayons vecteurs est

$$z^2 = y^2+(x\pm e)^2 = y^2+x^2\pm 2ex+e^2$$

Nous avons aussi trouvé, n° 425,

$$y = \frac{B^2}{A^2}N\sin.L, \qquad x = N\cos.L.$$

Ainsi,

$$z^2 = \frac{B^4}{A^4}N^2\sin.^2L+N^2\cos.^2L+A^2e^2\pm 2AeN\cos.L =$$

$$\frac{N^2}{A^4}(B^4\sin.^2L+A^4\cos.^2L)+A^2e^2\pm 2AeN\cos.L$$

ou $$z^2 = \frac{N^2}{A^4}[A^4-(A^4-B^4)\sin.^2L]+A^2e^2\pm 2AeN\cos.L$$

et parce que $$A^4-B^4 = A^4(2e^2-e^4)$$

$$z^2 = N^2[1-(2e^2-e^4)\sin.^2L]+A^2e^2\pm 2AeN\cos.L$$

introduisant la valeur de N,

$$z^2 = \frac{A^2[1-(2e^2-e^4)\sin.^2L]}{1-e^2\sin.^2L}+A^2e^2\pm 2A^2\frac{e\cos.L}{(1-e^2\sin.^2L)^{\frac{1}{2}}}$$

Réduisons les deux premiers termes au même dénominateur

$$z^2 = \frac{A^2(1-2e^2\sin.^2L + e^4\sin.^2L + e^2 - e^4\sin.^2L}{1-e^2\sin.L} \pm \frac{2A^4 e\cos L}{(1-e^2\sin.L)^{\frac{1}{2}}}$$

$$z^2 = \frac{A^2(1+e^2-2e^2\sin^2L)}{1-e^2\sin.^2L} \pm \frac{2A^2e\cos.L}{(1-e^2\sin.^2L)^{\frac{1}{2}}}$$

$$z^2 = A^2\left[(1+e^2)(1-2\sin.^2L)(1-e^2\sin.^2L)^{-1} \pm \frac{2e\cos.L}{(1-e^2\sin.^2L)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$z^2 = A^2\left[(1+e^2\cos 2L)(1-e^2\sin.^2L)^{-1} \pm \frac{2e\cos.L}{(1-e^2\sin.^2L)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

et enfin, en prenant les deux premiers termes du développement de la puissance -1, effectuant le produit et négligeant le terme en e^4.

$$z^2 = A^2[(1+e^2\cos.2L + e^2\sin.^2L \pm \text{etc.})] = A^2(1+e^2(\cos.2L + \sin.^2L) \pm \text{etc.}$$

et parce que

$$\cos.2L = \cos.^2L - \sin.^2L, \quad z^2 = A^2\left(1 + e^2\cos.^2L \pm \frac{2e\cos.L}{(1-e^2\sin.^2L)^{\frac{1}{2}}}\right) \quad (\mu)$$

Nous pouvons aisément vérifier cette double valeur de z, en supposant d'abord $L = o$, d'où $\sin. L = o$, $\cos. L = 1$, ce qui réduit la formule à

$$z^2 = A^2(1+e^2 \pm 2e) = A^2(1 \pm e)^2, \quad \text{et} \quad z = A(1 \pm e) = A \pm Ae = A \pm C.$$

C'est ce qui a lieu en effet dans l'ellipse, pour les extrémités du grand axe.

Si nous supposons $L = 100^g$, alors $\sin. L = 1$ et $\cos. L = o$.

Nous trouvons, comme cela doit être, $z = \pm A$.

Pour la latitude du parallèle moyen, on a $\sin.^2 50 = \cos.^2 50 = \frac{1}{2}$, et par conséquent

$$z^2 = A^2\left(1 + \frac{e^2}{2} \pm \frac{2e\sqrt{\frac{1}{2}}}{1-\frac{e^2}{2}}\right) = A^2\left(1 + \frac{e^2}{2} \pm \frac{2e\sqrt{2}}{2-e^2}\right)$$

On peut encore simplifier l'expression de z^2 fournie par (μ); en effet, en chassant le dénominateur du troisième terme dans la parenthèse, par le moyen employé déjà si souvent, ce terme devient $2e\cos. L(1 + \frac{1}{2}e^2\sin.^2 L)$, et peut se réduire à $2e\cos. L$, puisque le terme que l'on néglige $e^2\cos. L\sin.^2 L$ est du troisièm

ordre par rapport à e, et contient deux autres facteurs plus petits que l'unité. Nous sommes donc en droit d'écrire

$$z^2 = A^2 [(1 + e^2 \cos.^2 L) \pm 2e \cos L] = A^2 (1 \pm e \cos. L)^2 \quad \text{et} \quad z = A (1 \pm e \cos.^2 L)$$

On y trouve également

pour $L = 0$, et $\cos. L = 1$ que $z = A (1 \pm e)$

pour $L = 100$, $\cos. = 0$ que $z = A$

pour $L = 50$, $\cos. = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ $\left\{ \begin{array}{l} z = A (1 \pm e \sqrt{\tfrac{1}{2}}) \\ \text{et } z^2 = A^2 (1 + \tfrac{1}{2} e^2 \pm 2e \sqrt{\tfrac{1}{2}}) \end{array} \right.$

Autre méthode pour déterminer les rayons vecteurs. Nous pouvons encore déduire la valeur de z d'une autre considération puisée dans les relations qui existent entre les différentes lignes de la figure 325 : en effet, le triangle OMf dans lequel les côtés sont R, Z et C, et dont nous désignerons, pour abréger, l'angle en O par λ, f représentant le foyer, nous fournit l'équation $Z^2 = R^2 + C^2 - 2RC. \text{Cos.}\, \lambda$ ou plutôt $Z^2 = R^2 + C^2 \pm RC. 2\text{Cos.}\, \lambda$ (1), parce qu'en considérant le triangle OMF$'$ pour avoir le second rayon vecteur, il n'y aurait que le signe du cosinus à changer, en raison de ce que l'angle en C, dans cette seconde circonstance, serait le supplément de celui que nous avons considéré d'abord.

Le triangle OMP nous indique que R cos. $\lambda = x$, et nous trouvons encore dans MRS que N cos. $L = x$, d'où N cos. $L =$ R, cos. λ. Nous allons substituer cette valeur dans (1), tout en déduisant en passant, cette conséquence, que le rayon et la normale d'un point quelconque du globe sont réciproquement proportionnels à leurs inclinaisons sur l'équateur.

Revenons à Z^2 qui devient $Z^2 = R^2 + C^2 \pm 2NC \cos. L$.

Remplaçons R, C et N par leurs valeurs, et il viendra

$$z^2 = A^2 (1 - e^2 L) + A^2 e^2 \pm \frac{2A^2 e \cos. L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}} = A^2 \left(1 + e^2 \cos.^2 L \pm \frac{2e \cos. L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

431. *Rayon de courbure de l'ellipse.* Nous avons eu occasion, au § 406, de parler des cercles osculateurs aux différentes sections planes passant par un même point d'une surface, de l'ellipsoïde de révolution, par exemple. Sans revenir sur ce que nous avons dit à ce sujet, nous voulons ici chercher simplement le rayon du cercle osculateur de l'ellipse, la plus importante de

ces sections planes de l'ellipsoïde qu'on peut regarder comme représentant la surface terrestre.

Nous savons qu'une tangente est une ligne droite qui a, avec une courbe, deux points communs infiniment rapprochés; le cercle osculateur est celui qui a trois points communs avec la courbe.

Pour trouver la traduction analytique de cette définition, considérons, d'une manière générale, quoique très-succincte, la théorie des courbes osculatrices.

Nous savons, d'après le théorème de Taylor, dont nous avons donné l'énoncé au § 76, que si x et y sont les coordonnées particulières d'un point d'une courbe dont l'équation générale est représentée par la fonction

$$y = f(x).$$

on a généralement, en désignant par h un accroissement quelconque de x, par $f'(x)$, $f''(x)$..., les dérivées successives ou les coefficients différentiels de la fonction, et par y' la nouvelle valeur de l'ordonnée,

$$y' = f(x+h) = f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

Considérons une seconde courbe dont l'équation soit

$$y = \varphi(x).$$

Si elle rencontre la première au point particulier x, y, il faut que $f(x) = \varphi(x)$ pour la valeur particulière x.

En donnant à l'abscisse de la seconde courbe la même augmentation h que nous avons attribuée à la première, son abscisse deviendra

$$y'_1 = \varphi(x+h) = \varphi(x) + \varphi'(x)\frac{h}{1} + \varphi''(x)\frac{h^2}{1.2} + \dots$$

Les deux abscisses y' et y'_1 des deux courbes seront généralement différentes, et leur différence sera donnée par

$$y' - y'_1 = f(x+h) - \varphi(x+h) = f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + \dots$$

$$- \varphi'(x)\frac{h}{1} - \varphi''(x)\frac{h^2}{1.2} = \dots$$

puisque déjà $f(x) = \varphi(x)$ par suite de l'existence du premier point commun x, y.

Si l'on veut que les seconds points des courbes répondant à

la nouvelle même valeur $x' = x + h$ soient communs, il faudra que

$$f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots \quad = \varphi'(x)\frac{h}{1} + \varphi''(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots$$

ou supprimant le facteur commun h,

$$f'(x) + f''(x)\frac{h}{1.2} + \ldots \quad = \varphi'(x) + \varphi''(x)\frac{h}{1.2} + \ldots$$

tant que h sera fini, il n'y aura rien à conclure de cette équation renfermant h à toutes les puissances; mais si l'on pose cette condition que h soit infiniment petit, elle se réduira à

$$f'(x) = \varphi'(x);$$

les courbes dont les équations sont $y = f(x)$, $x = \varphi(x)$ seront alors tangentes lorsqu'elles auront même coeffi ient différentiel du premier ordre.

Si pour limiter la question nous supposons que la seconde courbe $y = \varphi(x)$ soit la ligne droite ou le cercle, nous verrons que dans le premier cas l'équation de la ligne droite qui passe par le point fixe x, y ne renferme qu'une seule variable a

$$Y - y = a(X - x)$$

et que, par suite, la condition $f'(x) = \varphi'(x)$ donnera naissance à une équation où cette variable unique, entrant seulement à la première puissance, sera déterminée. Il n'y a donc qu'une seule tangente en chaque point d'une courbe continue, et elle est précisée par l'équation $a = f'(x)$.

En examinant le cas du cercle dont les coordonnées générales seraient X et Y, et en désignant par α, β celles de son centre, nous verrons que son équation

$$(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 = R^2 \text{ différenciée donne } \frac{dY}{dX} = -\frac{\alpha - X}{\beta - Y} = \varphi'(X)$$

Si ce cercle passe le point particulier x, y, et s'il est tangent à la courbe dont l'équation est $f(x) = o$, il doit avoir même coefficient différentiel, pour le système particulier $X = x$, $Y = y$. Il en résulte donc

$$f'(x) = \varphi'(x) = \frac{\alpha - x}{y - \beta}$$

ce qui établit une relation entre les coordonnées α, β du centre du cercle tangent.

Cette équation unique, indépendante du rayon, fait déjà voir qu'en chaque point il y a une infinité de cercles tangents de rayons quelconques. Si, de plus, on la met sous la forme $B-y = -\frac{1}{f'(x)}(\alpha - x)$, on obtient une équation qui, en considérant α et β comme des coordonnées variables, appartient à une ligne droite passant par le point x, y, ligne qui est inclinée sur l'axe des x, d'un angle dont la tangente $= -\frac{1}{f'(x)}$. Tous les centres des cercles tangents sont donc situés sur la normale de la courbe, et tout point de cette normale peut être regardé comme le centre d'un cercle tangent.

Après avoir ainsi épuisé la question de la tangence, du moins pour la ligne droite et pour le cercle, revenons aux courbes osculatrices.

La condition $f'(x) = \varphi'(x)$ a été une conséquence de cette hypothèse que les deux courbes avaient deux points communs infiniment rapprochés. Désignons par x', y' les coordonnées du second point et établissons cette nouvelle condition qu'il y ait un troisième point commun infiniment rapproché. La communauté des deux seconds points a donné

$$f(x') = \varphi(x')$$

la condition relative au troisième fournirait par la même méthode employée en premier lieu

$$f'(x') = \varphi'(x')$$

ou

$$f'(x+dx) = \varphi'(x+dx)$$

ou encore

$$\frac{d.(y+dy)}{dx} = \frac{d(y_1+dy_1)}{dx}$$

en désignant pour un moment par y_1 l'ordonnée de la seconde courbe, que nous savons pourtant être la même que celle de la première. Donc enfin

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{d^2y_1}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y_1}{dx^2}, \; f''(x) = \varphi''(x)$$

puisque nous savons déjà que $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx}$ ou $f'(x) = \varphi'(x)$, et que le dx est le même.

Pour que deux courbes aient trois points communs infiniment

rapprochés, il faut donc et il suffit que leurs équations aient mêmes coefficients différentiels du premier et du second ordre. Ces courbes sont alors dites *osculatrices* l'une à l'autre.

Observons encore que si la seconde courbe est un cercle, son équation renfermant seulement les deux coordonnées du centre, puisque le rayon s'élimine de suite par la condition qu'il passe par le point donné de la courbe, les deux équations $f'(x)=\varphi'(x)$, $f''(x)=\varphi''(x)$ suffiront pour déterminer le cercle osculateur qui ne présentera plus l'indétermination que nous avons trouvée pour le cercle tangent.

Occupons-nous maintenant d'appliquer les principes précédents à la recherche du rayon du cercle osculateur de l'ellipse, en fonction de la latitude d'un point de celle-ci.

Soit $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2$, l'équation du cercle osculateur, dans laquelle α et β représentent l'abscisse et l'ordonnée du centre, et γ le rayon.

Différencions deux fois cette équation, et nous aurons

$$(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=o$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=o$$

représentant $\frac{dy}{dx}$ par p, $\frac{d^2y}{dx^2}$ par q, il vient

$$y-\beta=-\frac{1+p^2}{q},\quad x-\alpha=\frac{p(1+p^2)}{q}\quad \text{et}\quad \gamma=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

Pour exprimer que les deux courbes sont osculatrices, nous allons tirer aussi de l'équation de l'ellipse les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ et nous les égalerons à celles trouvées ci-dessus, ou, ce qui revient au même, nous les substituerons à p et q dans la valeur de γ.

L'équation de l'ellipse est $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$. En la différenciant, nous trouvons

$$a^2ydy+b^2xdx=o \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

$-\frac{b^2x}{a^2y}$ est la tangente trigonométrique de l'inclinaison de la tangente à l'ellipse sur l'axe des x ou la cotangente de la latitude correspondante.

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{dy}{dx} = p = \text{cotang } L$$

Prenons la différentielle seconde : il viendra

$$a^2 y\, d^2 y + a^2 dy^2 + b^2 dx^2 =$$

ou successivement en intervertissant l'ordre des termes,

$$1 + \frac{a^2}{b^2}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{a^2}{b^2}\frac{d^2 y}{dx^2} = o$$

$$1 + \frac{a^2}{b^2}\text{ cotang.}^2 L + \frac{a^2}{b^2}\, y\, q = o$$

mais $\frac{a^2}{b^2}\, y = N \sin. L$ (n° 425)

donc

$$1 + \frac{a^2}{b^2}\text{ cotang.}^2 L + N \sin. L\, q = o \qquad \text{ou} \qquad q = -\frac{1 + \frac{a^2}{b^2}\text{ cot.}^2 L}{N.\ \sin. L}$$

Il n'y a pas à tenir compte de ce signe *moins* ; c'est la valeur absolue que l'on introduit dans celle de γ. Le signe *moins* en avant de $\frac{d^2 y}{dx^2}$ indique que la courbe présente sa concavité à l'axe des x, tandis qu'affectée du signe *plus*, cette expression fait voir que la partie convexe est tournée vers l'axe des abscisses.

En introduisant p et q dans γ, nous trouvons

$$\gamma = \frac{(1 + \text{cotang.}^2 L)^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{a^2}{b^2}\text{ cotang.}^2 L} N \sin. L = \frac{\text{coséc.}^3 L}{\frac{b^2 \sin.^2 L + a^2 \cos.^2 L}{b^2 \sin.^2 L}} N \sin. L$$

$$\gamma = \frac{b^2 N}{b^2 \sin.^2 L + a^2 \cos.^2 L} = \frac{b^2 N}{a^2 (1 - \sin.^2 L) + b^2 \sin.^2 L}$$

$$\gamma = \frac{a^2 N (1 - e^2)}{a^2 (1 - e^2 \sin.^2 L)}$$

et enfin

$$\gamma = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}}$$

parce que

$$b^2 = a^2 (1 - e^2) \qquad \text{et} \qquad N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

432. Nous allons donner ici quelques applications numériques de la formule qui détermine le rayon de courbure.

Cherchons d'abord γ, en supposant $L = 0^g$.

Le dénominateur devient nul, et la formule se réduit à

$$\gamma = a\,(1-e^2)$$

Prenons $a = 6376606^m$, comme l'indique *Laplace*, quoi qu'il suppose l'aplatissement égal à $\frac{1}{310}$: nous savons que

$$e^2 = 0{,}006463 \quad \text{d'où} \quad 1-e^2 = 0{,}993538$$

$$\begin{array}{ll} \log. a & = 6.8045896 \\ \log. (1-e^2) & = 9.9971845 \\ \hline \log. a\,(1-e^2) & = 6.8017743 \end{array}$$

$$\text{donc } \gamma = 6335400^m.$$

Faisons $L = 30$, nous aurons, pour trouver la valeur correspondante de γ, les calculs suivants :

$$\begin{array}{ll} \log. e^2 & = 7.8103670 \\ 2 \log. \sin. 30^g & = 9.3140936 \\ \hline \log. e^2 \sin. 30^g & = 7.1244606 \\ e^2 \sin.^2 30^g & = 0.0013319 \\ 1 - e^2 \sin.^2 30^g & = 0.9986681 \\ \log. (1 - e^2 \sin.^2 30^g) & = \bar{1}.9994597 \\ \log. (1 - e^2 \sin.^2 30^g)^{\frac{3}{2}} & = -1.9991298 \end{array}$$

donc

$$\begin{array}{ll} \log a\,(1-e^2) & = 6.8017743 \\ \log. (1 - e^2 \sin.^2 30^g)^{\frac{3}{2}} & = \bar{1}.9991298 \\ \hline \log. \gamma & = 6.8026445 \\ \text{et } \gamma & = 6348109^m \end{array}$$

Pour $L = 50^g$, le $\sin.^2 L = \frac{1}{2}$ et la formule devient

$$\gamma = \frac{a\,(1-e^2)}{\left(1-\frac{e^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{or} \quad \frac{e^2}{2} = 0{,}003231.\ 1 - \frac{e^2}{2} = 0{,}996769$$

et $\log. \left(1-\frac{e^2}{2}\right) = \bar{1}.9985946$ donc $\log. \left(1-\frac{e^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \bar{1}.9978919$

et

$$\begin{array}{ll} \log. a\,(1-e^2) & = 6.8017743 \\ \log. \left(1-\frac{e^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}} & = \bar{1}.9978919 \\ \hline \log. \gamma & = 6.8038824 \\ \text{et } \gamma & = 6366227^m \end{array}$$

Pour la latitude $L = 70^g$.

$$
\begin{array}{lcl}
\log e^2 & = & 7.8403670 \\
2.\ \log.\ \sin.70^g & = & 9.8997618 \\
\hline
\log. e^2 \sin.^2 70^g & = & 7.7401288 \\
e^2 \sin.^2 70^g & = & 0.0051304 \\
1 - e^2 \sin.^2 70^g & = & 0.9948699 \\
\log.(1 - e^2 \sin.^2 70^g) & = & \bar{1}.9977664 \\
\log.(1 - e^2 \sin.^2 70^g)^{\frac{3}{2}} & = & \bar{1}.9966496 \\
\log. a(1 - e^2) & = & 6.8047743 \\
\hline
\log.\gamma & = & 6.8054247 \\
\gamma & = & 6384460^m
\end{array}
$$

Rien de plus facile actuellement que de calculer la longueur du grade aux latitudes 0^g, 30^g et 70^g, en partant de sa longueur 100000^m, sous la latitude 50^g.

Nous aurons, en effet ; $\gamma(50^g) : \gamma(30^g) :: 100000^m : x$.

$$
\begin{array}{rcl}
\log.100000 & = & 5.0000000 \\
\log.\gamma(50^g) & = & 6.8038824 \\
\hline
 & & \bar{2}.1961176 \\
\log.\gamma(30^g) & = & 6.8026443 \\
\hline
\log.\ (1^g \text{ à la latitude } 30^g) & = & 4.9987619 \\
1^g \text{ à la latitude } 30^g & = & 99733^m
\end{array}
$$

De même,

$$
\begin{array}{rcl}
 & & \bar{2}.1961476 \\
 & & 6.8054247 \\
\hline
 & & 5.0012423 \\
1^g \text{ à la latitude } 70^g & = & 100286^m \\
 & & \bar{2}.1964176 \\
\log.\gamma(0^g) & & 6.8017743 \\
\hline
 & & 4.9978919 \\
1^g \text{ vers l'équateur} & = & 99516^m
\end{array}
$$

Nous devons d'ailleurs dire ici que plusieurs ouvrages et, entre autres, l'excellent *Traité de topographie* de M. le colonel Puissant, et le *Mémoire sur la projection des cartes*, du colonel Henry, contiennent, le premier, sous le n° 3, l'amplitude des arcs de parallèles projetés correspondant à 1^g de longitude, pour les latitudes de 30^g à 70^g ; et le second, dans la Table XI, les longueurs en mètres de 1^g en longitude sur le sphéroïde terrestre, aussi de 30 à 70^g de latitude.

433. Les résultats précédents ont été obtenus, ainsi que les tables que nous venons de citer, en partant de cette hypothèse que les arcs de l'ellipse méridienne et ceux de son cercle osculateur peuvent être regardés comme se confondant pendant une étendue ne dépassant pas 1^g ou $1^g \frac{1}{2}$ de la latitude, hypothèse vérifiée par le calcul direct de l'arc d'ellipse. Si l'on avait à trouver la longueur d'un arc de méridien plus grand que 1^g, le procédé indiqué ne serait plus assez exact ; il faudrait alors se servir de la formule de rectification de l'ellipse ou opérer en ajoutant successivement les éléments $< 1^g$ obtenus par le secours des rayons de courbure. C'est ainsi qu'il faudrait agir dans la projection de Flamstead modifiée, si l'on n'avait pas les tables de Plessis à sa disposition.

On peut encore obtenir la longueur du grade du méridien sans passer par l'intermédiaire de celle du grade sous la latitude de 50^g. Il suffit d'écrire

$$\text{arc de } 1^g = \text{angle } 1^g \times \gamma$$

γ désignant toujours le rayon de courbure de l'ellipse sous la latitude considérée L, rayon que nous savons être égal à

$$\frac{a\,(1-e^2)}{(1-e^2 \sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}}\,;$$

π, rapport de la circonférence au diamètre, étant divisé par 200, donne le grade égal à 0,015707963, par suite

$$1^g \text{ latitude} = 0{,}015708.\ \frac{6376957^m\,(1-0{,}006462)}{(1-0{,}006462 \sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Appliquons cette formule au cas où l'on voudrait connaître la longueur de l'arc du méridien compris entre les latitudes 54^g et 55^g ; celle qu'il conviendra d'employer pour le cercle osculateur sera $54^g, 50'$. On formera d'abord le terme $1-e^2 \sin.^2 L$

$\log. e^2$	$= \bar{3},8103670$
$+\ 2 \log. \sin. 54^g,50'$	$= +\bar{1},7562180$
$\log. e^2 \sin.^2 54^g,50'$	$= \bar{3},5665850$
$e^2 \sin.^2 54^g,50'$	$= 0,0036862$
$1 - e^2 \sin.^2 54^g,50'$	$= 0,9963138$
$\log.(1-e^2 \sin.^2 54^g,50')$	$= \bar{1},9983958$
$\log.(1-e^2 \sin.^2 54^g,50')^{\frac{3}{2}}$	$= \bar{1},9975937$

puis substituant,

$$\begin{array}{lr} \log. \mathrm{A}.\ 1^g & = 3{,}0007334 \\ + \log. (1 - e^2) & + \bar{1}{,}9971845 \\ - \log. (1 - e^2 \sin.^2 54^g{,}50')^{\frac{3}{2}} & = - \bar{1}{,}9975937 \\ \hline \log.\ 1^g \text{ latitude} & = 3{,}0003242 \end{array}$$

$$\text{longueur } 1^g \text{ du méridien (de } 54^g \text{ à } 55^g) = 100075^m$$

Après avoir donné le moyen de trouver la longueur du grade en latitude, indiquons la marche à suivre pour obtenir celle du grade compté sur un parallèle de latitude L. On sait que le rayon de ce parallèle sera $r = \mathrm{N} \cos.\mathrm{L}$, N désignant la grande normale que nous savons (§ 425) être égale à

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{A}}{(1 - e^2 \sin.^2 \mathrm{L})^{\frac{1}{2}}}$$

On aura donc

$$\text{longueur de } 1^g \text{ en longitude} = 1^g \times = 0{,}015707963 \times \frac{6376957^m \cos.\mathrm{L}}{(1 - 0{,}006462 \sin.^2 \mathrm{L})^{\frac{1}{2}}}$$

Appliquons encore cette formule à l'arc du parallèle de 54^g, 50. Nous avons trouvé ci-dessus le logarithme de $1 - e^2 \sin.^2 54^g, 50'$: nous pourrons donc écrire immédiatement,

$$\begin{array}{lr} \log. \mathrm{A}.\ 1^g & = 3{,}0007334 \\ + \log. \cos. 54^g{,}50' & = + \bar{1}{,}8165066 \\ - \frac{1}{2} \log. (1 - e^2 \sin.^2 54^g{,}50') & = \bar{1}{,}9991979 \\ \hline \log.\ 1^g \text{ longitude} & = 2{,}8180421 \end{array}$$

$$\text{longueur } 1^g \text{ (parallèle de } 54^g{,}50') = 65772^m.$$

434. *Rectification d'un arc d'ellipse.* La formule qui donne l'arc du parallèle est exacte, quelle que soit l'amplitude de cet arc, mais il n'en est pas de même de celle qui fournit l'arc du méridien lorsque la différence des latitudes extrêmes dépasse 1^g ou $1^g \frac{1}{2}$. Dans la cas où cette limite est dépassée, il faut avoir recours à la rectification d'un arc d'ellipse.

Considérons deux points du méridien infiniment rapprochés répondant à une différence de latitude $d\mathrm{L}$; les deux rayons de courbure correspondants pourront être regardés comme égaux, et en désignant par ds la longueur de l'élément de l'ellipse, on aura

$$ds = \gamma\, d\mathrm{L} = \frac{\mathrm{A}(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin.^2 \mathrm{L})^{\frac{3}{2}}}\, d\mathrm{L}.$$

En négligeant la quatrième puissance de e, on peut écrire $(1 - e^2 \sin.^2 L)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin.^2 L$, ce qui donne

$$ds = A(1 - e^2)(1 + \tfrac{3}{2} e^2 \sin.^2 L)\, dL$$

ou

$$ds = A(1 - e^2)[1 + \tfrac{3}{4} e^2 (1 - \cos.2L)]\, dL$$

L'intégrale de cette expression est

$$s = A(1 - e^2)[(1 + \tfrac{3}{4} e^2)\, L - \tfrac{3}{8} e^2 \sin.\, 2L] + \text{Constante}.$$

S'il s'agit d'avoir l'arc compris entre deux latitudes L et L′, il faut prendre l'intégrale définie entre ces deux limites, et on a

$$s = A(1 - e^2)[(1 + \tfrac{3}{4} e^2)(L - L') - \tfrac{3}{8} e^2 (\sin.2L - \sin.2L')]$$

En tenant compte de la quatrième puissance de e on aurait trouvé

$$s = A(1 - e^2)\left\{(1 + \tfrac{3}{4} e^2 + \tfrac{45}{64} e^4)(L - L') - \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{4} e^2 + \tfrac{15}{16} e^4)(\sin.2L - \sin.2L') + \tfrac{1}{4}\tfrac{15}{64} e^4 (\sin.4L - \sin.4L')\right\}$$

435. RÉSUMÉ.

$$N = \frac{A}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}, \qquad n = \frac{A(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}},$$

$$sN = \frac{Ae^2 \sin L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}, \qquad sn = \frac{Ae^2 \cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$R = A(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}, \quad NR = A^2, \quad R(50^g) = A\left(1 = \frac{e^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$z = A(1 \pm e \cos.L). \qquad \frac{R^2}{R'^2} = (1 + 0{,}00323 \cos.2L)$$

rayon du parallèle $OF = \dfrac{A.\cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}$, $\qquad y$ ou $MF = \dfrac{A(1 - e^2)\sin.L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$

T (*fig.* 325) désignant le point d'intersection de la tangente au point M avec le plan de l'équateur, on a encore

$$MT = MQ.\, \text{tang}.L = \frac{A(1 - e^2)\,\text{tang}\, L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

$$FT = MT.\, \sin.L = \frac{A(1 - e^2)\sin.L.\,\text{tang}\, L}{(1 - e^2.\, \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

$$FQ = MF.\, \cot.L = \frac{A(1 - e^2)\cos.L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

$$QT = QF + FT \text{ ou } = MT.\, \text{coséc}.L = \frac{A(1 - e^2)\,\text{séc}.L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

$$OT = OQ + QT = A\,(1 - e^2 . \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}} \text{ séc.} L$$

$$\text{Rayon de courbure ou } \gamma = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Rectification de l'ellipse} = A\,(1 - e^2)\,[(1 + \tfrac{3}{4} e^2)\,(L - L') - \tfrac{3}{8} e^2\,(\sin.2L - \sin.2L')$$

CHAPITRE VIII.

FIGURE DE LA TERRE.

436. Avant de rechercher par des mesures géodésiques directes quelles sont la forme et les dimensions de la terre, nous passerons en revue, très-succinctement, les divers procédés employés à ce sujet, procédés dont les résultats, quoique différant un peu des résultats géodésiques, corroborent cependant ceux-ci.

Différentes observations, telles que la diminution de la pesanteur à l'équateur, les perturbations du mouvement de la lune, ont porté à croire que la terre n'était pas réellement une sphère. Des essais basés sur des principes divers ont, en conséquence, été tentés pour arriver à la connaissance de la forme réelle.

437. *Figure théorique.* L'origine ignée de la terre semble aujourd'hui hors de doute. La matière chaotique d'abord répandue dans l'univers à une température telle que tous les corps s'y trouvaient à l'état gazeux s'est condensée, par suite d'un refroidissement dont la cause est inconnue, de manière à former quelques masses liquides qui par leur attraction sur les matières encore gazeuses ont formé des atmosphères hétérogènes. La continuation du refroidissement condensant toujours certaines des parties de ces atmosphères, les masses liquides ont augmenté, et leur attraction suivant la même marche a groupé autour d'elles de nouvelles parties gazeuses qui à leur tour sont venues augmenter les masses liquides. Une nouvelle diminution de température sensible surtout à la surface rayonnante a pu amener à l'état solide les parties extérieures de la masse, et produire la couche qui entoure (à l'exception des comètes) tous les corps qui gravitent dans notre système solaire. L'intérieur mis à l'abri du rayonnement, en grande partie du moins, par la faible conductibilité des matières composant l'enveloppe solide, a pu rester à l'état liquide, et cela en masse d'autant plus grande proportionnellement que la masse totale du corps est plus grande elle-même. Le

noyau central a même pu conserver l'état gazeux, mais avec une condensation telle que l'attraction moléculaire détruit la force expansive.

Telle est l'origine tout au moins très-probable des planètes, et en particulier de notre terre.

Au moment où la terre était liquide, il a dû s'établir une forme dépendant des forces appliquées aux différentes parties composant cette planète, et cette forme a persisté lorsque l'enveloppe solide s'est constituée.

Les forces agissant sur chaque molécule étaient la pesanteur et la force centrifuge résultant du mouvement de rotation diurne. Si à cette époque la terre avait conservé la forme d'une sphère, chacun des points de sa surface aurait été soumis à la même force attractive, tandis que la force centrifuge aurait été variable. La composante verticale de cette force, variable elle-même et dirigée en sens inverse de la pesanteur, aurait diminué celle-ci d'une manière différente suivant la latitude. Pour que l'équilibre existe dans une sphère liquide, il est évident *à priori* qu'il doit y avoir identité entre les actions exercées sur tous les rayons. Il ne pouvait donc pas y avoir équilibre sur la sphère terrestre, par suite, cette forme n'a pas pu se maintenir, et elle a été remplacée par une autre satisfaisant aux conditions d'équilibre. Les plus éminents géomètres, Huyghens, Newton, Stirling, Clairaut, ont cherché à apprécier ces conditions d'équilibre; Euler, d'Alembert, Lagrange et Laplace ont perfectionné leurs travaux en employant des méthodes de calcul inconnues aux premiers. Ils sont tous arrivés à ce résultat : *la terre est un ellipsoïde de révolution décrit autour de la ligne des pôles qui sert de petit axe à l'ellipse génératrice.* Mais ils ont différé sur la forme de cette ellipse, en lui attribuant des aplatissements dont les valeurs extrêmes sont $\frac{1}{578}$ et $\frac{1}{230}$.

La variété des résultats ainsi obtenus provient du plus ou moins d'exactitude apportée dans l'estimation du mode d'action de la gravité, et dans l'hypothèse relative à la constitution, en densité, du noyau liquide. Les suppositions faites à cet égard ont toutes admis, soit l'homogénéité de la masse, soit tout au moins la similitude de distribution des densités sur tous les méridiens. Rien ne prouvant qu'il en soit ainsi, non-seulement l'aplatissement qui précise la forme de l'ellipse n'est pas exactement déterminé par cette méthode, mais encore la forme même d'une surface de révolution, conséquence de cette similitude de

distribution de densité, n'est pas suffisamment reconnue propre à représenter la surface terrestre.

438. *Observations du pendule.* Un pendule écarté de la verticale redescend vers celle-ci, sollicité à chaque instant par la pesanteur. Arrivé à la verticalité, il continue sa marche en s'en éloignant alors, par suite de la vitesse acquise, vitesse qui est un résultat des actions successives de la gravité exercées pendant la marche descendante. Le mouvement se continue ainsi alternativement jusqu'à ce qu'il soit détruit par les résistances étrangères.

La marche de ce pendule dépend donc de l'intensité de la pesanteur au lieu de l'observation. Celle-ci résultant de la longueur du rayon terrestre correspondant, et de la force centrifuge qu'on sait estimer au moyen de la vitesse de rotation et de la longueur approximative de ce rayon, la marche du pendule peut servir à déterminer d'abord l'intensité de la gravité, et conséquemment la longueur du rayon.

439. Le calcul prouve que les temps des oscillations entières très-petites d'un pendule simple sont donnés par l'équation

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

l étant la longueur du pendule et g l'action de la gravité au lieu de l'observation. Le pendule simple serait celui qui oscillerait dans le vide, au moyen d'un fil inextensible d'un poids nul, et qui serait composé d'un point infiniment dense.

De nombreuses expériences faites sur un pendule composé ou ordinaire, ramenées par le calcul aux résultats qui répondraient au pendule simple, ont donné pour celui-ci des systèmes de valeurs telles que l' et t', jointes par la relation

$$t' = \pi \sqrt{\frac{l'}{g}}$$

Si on désigne par λ la longueur que devrait avoir le pendule simple pour battre la seconde, au même lieu d'observation, c'est-à-dire avec une même valeur de g, on devra avoir

$$1'' = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}$$

D'où en divisant, on conclut

$$\lambda = \frac{l'}{t'^2}$$

On a pu ainsi conclure pour les différentes observations réellement faites les longueurs du pendule simple qui battrait la se-

conde de temps moyen. C'est ainsi qu'à Paris on a trouvé pour la longueur réduite au niveau de la mer

$$l = 0^{m},993855.$$

Remarquons, en passant, que cette connaissance conduit directement à celle de g, qui est, on le sait, le double de l'espace que parcourt un corps abandonné à l'action de la pesanteur, pendant la première seconde de chute ($e = \frac{1}{2} gt^2$). En effet, de l'équation $1'' = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$ on tire

$$g = \lambda . \pi^2,$$

ce qui donne pour Paris, au niveau de la mer

$$g = 0^{m},993855 \times \overline{3,1415...}^2 = 9^{m},80896.$$

Supposons maintenant les observations faites en un certain nombre de points différents pour lesquels g, g', g''... désignent les valeurs particulières de g, répondant aux longueurs λ, λ', λ''... du pendule simple battant la seconde. En vertu de l'équation $1'' = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$, on a évidemment

$$g : g' : g'' : \ldots :: \lambda : \lambda' : \lambda'' \ldots$$

La comparaison des longueurs du pendule répondant à des latitudes connues a fait voir, qu'abstraction faite des erreurs possibles d'observation, l'intensité de la pesanteur croît de l'équateur au pôle d'une quantité proportionnelle au carré du sinus de la latitude. Ce résultat est précisément celui auquel on arrive en supposant la terre un ellipsoïde de révolution, et sa densité croissant de la surface au centre.

On est donc fondé à admettre la forme elliptique pour le méridien terrestre. L'aplatissement de l'ellipse génératrice résultant de la force centrifuge à l'équateur dont l'expression est connue, ainsi que des intensités de la gravité au pôle et à l'équateur, a pu être déterminé. Sa valeur moyenne la plus probable est $\frac{1}{319}$.

440. *Perturbations lunaires.* Si la terre est renflée à l'équateur, son action sur la lune tendra à rapprocher le plan de l'orbite de cet astre du plan de l'équateur. C'est, en effet, ce qui a lieu. Ce phénomène dépendant de l'aplatissement peut servir à la déterminer.

Dans le cas où l'on supposerait la terre sphérique, on arriverait par le calcul, en partant de données observées à une épo-

que, à certaines valeurs des éléments lunaires pour une autre époque. Ces résultats différeraient de ceux que fournirait une nouvelle observation.

Par l'hypothèse de différents aplatissements, on trouvera des résultats variables dont un seul fournira des éléments lunaires conformes à ceux de l'observation. Cet aplatissement convenable a été trouvé égal à $\frac{1}{305}$.

On pourrait de même employer à cette recherche la précession et la nutation qui dépendent, toutes deux, de l'attraction du soleil et de la lune sur les ménisques terrestres.

Ces différents moyens conduisent au même résultat $\frac{1}{305}$; mais observons cependant qu'ils ne pourraient pas décider seuls la question relative à la figure de la terre; ils prouvent seulement que, si cette figure est celle d'un ellipsoïde de révolution, l'ellipse qui l'engendre a un aplatissement égal à $\frac{1}{305}$. Mais cette forme ellipsoïdale étant constatée, approximativement, par d'autres procédés, la valeur numérique fournie par les observations astronomiques en devient très-probable.

Nous verrons plus loin que la figure de la terre n'est pas assez régulière pour pouvoir être assimilée partout à la même surface de révolution, en sorte qu'un aplatissement convenable pour la représentation de la surface terrestre en un certain lieu ne convient plus également bien pour un autre. Le résultat des observations astronomiques $\frac{1}{305}$ est en quelque sorte la moyenne de toutes ces valeurs, et il doit être choisi pour tout point de la terre dont l'aplatissement local n'a pas été déterminé par des observations directes.

441. *Figure de la terre déduite d'opérations géodésiques.* Le méridien céleste d'un point de la surface terrestre est le plan qui, passant par ce point, contient la ligne des pôles.

Si la terre est un solide de révolution, toutes ses verticales rencontrent cette ligne, et, par conséquent, un méridien céleste coupe sa surface suivant une ligne plane dont il renferme toutes les verticales; cette ligne, qui est la génératrice du solide, est ce qu'on désigne sous le nom de méridien terrestre.

Mais il n'en sera plus de même, si la forme de la terre est irrégulière. Dans ce cas, le méridien terrestre sera le lieu de tous les points de la surface dont les verticales seront parallèles à un même méridien céleste, et la ligne ainsi déterminée sera à double courbure.

C'est en réalité ce qui a lieu ; mais, en admettant la première hypothèse, on ne s'écarte pas beaucoup de la réalité, et on a l'avantage de pouvoir appliquer le calcul aux lignes tracées sur la surface terrestre, ce qu'on ne pourrait pas faire, si on la supposait irrégulière.

On se convaincra que la terre n'est pas un solide de révolution, quand, ayant admis cette hypothèse et cherchant à conclure la forme de la courbe génératrice, on ne pourra pas arriver à une figure unique résultant d'observations multipliées faites avec soin, et en faisant la part des erreurs inévitables. Ce résultat sera du reste d'accord avec ceux obtenus par la comparaison des longueurs du pendule battant la seconde.

Mais cependant on reconnaîtra que toutes les lignes (ellipses plus ou moins allongées) que l'on obtiendra par l'étude des diverses observations géodésiques s'écartent assez peu les unes des autres pour qu'on puisse en conclure une forme moyenne. Cette forme, probablement inexacte pour représenter chacune des sections de la terre dont les verticales sont parallèles à un méridien céleste, se rapprochera pourtant de chacune d'elles assez pour qu'on puisse l'adopter *à priori*, pour un lieu quelconque.

Nous partirons donc de cette hypothèse, *la terre est un solide de révolution*, pour rechercher, au moyen d'observations et de calculs géodésiques, la forme et les dimensions de la courbe génératrice.

442. *Mesure d'un arc de méridien*. La première idée qui se présente à l'esprit est de tracer une base dans la direction du méridien, de la mesurer et de lui faire subir les corrections habituelles. Mais pour être employés à la recherche de la figure de la terre, les arcs de méridien doivent avoir une étendue beaucoup plus considérable que celle des bases ordinaires. Leur mesure directe devient longue et pénible, lors même qu'elle est possible : il est, en effet, très-rare de trouver des plaines assez grandes pour permettre cette opération directe.

443. On évite cette difficulté de la manière suivante. On établit dans la direction méridienne un réseau de triangles dont on calcule tous les éléments, et l'on en déduit la portion du méridien AMp qui passe par l'un de ses sommets (*planche* XXIII, *fig.* 57 *bis*).

Le côté AB est connu en longueur, soit par une mesure directe, soit par sa jonction à une première base. L'azimut, de ce

côté, observé astronomiquement, fait connaître l'angle BAM du triangle ABM.

La méthode que l'on suit consiste à rechercher, après avoir calculé tous les côtés des triangles du réseau, les valeurs des éléments AM, MN, NK, interceptés sur le méridien, par les côtés de ces triangles, prolongés, s'il y a lieu de le faire.

Cela nécessite la résolution des triangles ABM, CMN, DNK qui peuvent être regardés comme appartenant à des sphères de rayons variables. Nous savons que la méthode de Legendre permet le calcul des côtés de ces triangles sans exiger la connaissance des rayons des sphères, rayons qui sont inconnus, puisque le problème qu'on se propose de résoudre a précisément pour but de déterminer la figure terrestre, et, par conséquent, les valeurs des rayons des différentes sphères osculatrices.

Dans le triangle ABM, on connaît le côté AB et les angles A et B. On pourra donc en calculer l'excès sphérique e, et résoudre le triangle plan dont les éléments seraient

$$AB,\ A' = A - \tfrac{1}{3}e,\quad B' = B - \tfrac{1}{3}e \qquad M' = 200 - A - B + \tfrac{2}{3}e$$

ce qui donnera la longueur du premier élément AM du méridien, ainsi que le côté MB.

Dans le triangle suivant CMN, on connaîtra l'angle C observé, le côté CMMB ca = CB — lculés précédemment, et l'angle M égal à AMB du premier triangle, lequel est égal à M′ du triangle rectiligne A′M′B′ + ⅓ e.

Il sera donc possible de trouver l'excès sphérique e' de CMN, et, par suite, de lui substituer un triangle rectiligne C′M″N′ dont on connaîtra

$$C' = C - \tfrac{1}{3}e',\quad M'' = M' + \tfrac{1}{3}e - \tfrac{1}{3}e' = 200 - A - B + e - \tfrac{1}{3}e'$$
$$CM = CB - BM,\quad N' = 200 - C - M' - \tfrac{1}{3}e + \tfrac{2}{3}e'$$

On arrivera ainsi à calculer le second élément MN du méridien, et le côté CN qui, retranché de CD, fournira DN nécessaire pour la résolution du triangle suivant NDK.

Dans celui-ci, on connaîtra, outre ce côté DN, les deux angles en D et N, le premier, par la combinaison des angles CDB, BDE du réseau, le second, comme égal à N du triangle CMN, c'est-à-dire à $N' + \tfrac{1}{3}e'$.

Opérant ainsi de proche en proche, on arrivera à un dernier sommet P qu'on choisira rapproché du méridien, et qui aura fourni par l'intersection du dernier côté la longueur totale d'un arc AS.

444. Nous verrons plus loin que, pour arriver à la détermination de la figure de la terre, il faut, outre la longueur de l'arc du méridien, connaître la différence de latitude de ses deux extrémités. Après avoir observé celle-ci astronomiquement au point A de départ, il faudrait pouvoir stationner en S pour y faire une opération analogue.

Mais ce point n'est déterminé que par le calcul, et rien ne le précise dans la nature. On prend alors la latitude du dernier sommet P, et on projette ce point en p, sur le méridien, par un arc de parallèle.

Pour répondre à la différence de latitude de A et P, il faudra prendre le développement linéaire $Ap = AS + Sp$. Nous indiquerons au chapitre IX le moyen de trouver la latitude d'un point S séparé d'un premier point P connu par un côté PS donné de longueur, quand on a également l'azimut de ce côté. La formule qui conduit à ce résultat permettra donc de trouver la différence de latitude de P et de S du cas actuel, car les éléments nécessaires pour son calcul, PS et PSp, auront été fournis par la résolution du dernier petit triangle analogue à ceux dont nous avons parlé précédemment.

445. Il est bien vrai que la formule des latitudes repose sur la connaissance de la forme du méridien que nous recherchons actuellement. Mais remarquons qu'il n'y a lieu de l'appliquer ici que pour trouver la correction très-petite pS; que la faible erreur à laquelle son emploi donnera lieu se trouvera répartie sur l'arc total Ap, et que par suite, elle n'entachera celui-ci que d'une erreur négligeable. Il sera donc permis, dans l'emploi de cette formule, d'attribuer au méridien une forme approchée, la forme circulaire, par exemple.

La différence de latitude ainsi obtenue, multipliée par le rayon approximatif adopté, donnera enfin, d'une manière suffisamment exacte, pour la même raison, le petit arc pS qui, ajouté à AS, fera connaître la longueur du méridien répondant aux latitudes extrêmes de A et P.

446. Au lieu d'opérer comme nous venons de l'indiquer, on peut projeter les sommets des triangles sur le méridien par des arcs de grands cercles perpendiculaires à celui-ci, et faire la somme des éléments ainsi obtenus. Ce procédé ayant été exposé au § 412, à propos de la projection de Cassini, nous nous bornerons à dire que le calcul de la portion supplémentaire se fe-

rait comme nous l'avons indiqué plus haut, avec cette seule différence que l'azimut employé serait égal à 100^g ou à 300^g, suivant la position de P par rapport au méridien.

447. Nous devons maintenant utiliser ce qui précède pour trouver la forme de la méridienne. Si λ et λ' désignent les latitudes extrêmes, l'arc correspondant pourra être regardé comme appartenant au cercle osculateur répondant à la latitude moyenne $L=\frac{\lambda+\lambda'}{2}$; en désignant par ρ ce rayon, et par μ la longueur obtenue, on pourra écrire

$$\rho(\lambda-\lambda')=\mu$$

d'où l'on pourra conclure, par une simple proportion, la longueur M de l'arc de 1^g du méridien

$$M=\rho\times\frac{\pi}{200}=\rho.1^g$$

pour la latitude L.

Une nouvelle opération, faite sous une autre latitude moyenne L', du même méridien ou de tout autre, en vertu de la supposition que nous avons faite, que la terre est une surface de révolution, donnera

$$M'=\rho'\frac{\pi}{200}$$

Un grand nombre d'observations ainsi faites a fourni une série de valeurs M, M', M''......, pour lesquelles on a reconnu la loi suivante : *le degré du méridien croît, par rapport à celui relatif à l'équateur, d'une quantité qui est proportionnelle au carré du sinus de la latitude.* Cette loi serait précisément celle que présenterait un méridien elliptique. On est donc fondé à admettre d'abord que la courbe génératrice est une ellipse. Il reste à déterminer les éléments de celle-ci.

Rappelons-nous (§ 431) que l'expression du rayon de courbure de l'ellipse est

$$\rho=\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin.^2L)^{\frac{3}{2}}}$$

Nous aurons donc, pour les deux longueurs connues M et M' d'un grade du méridien, sous les latitudes moyennes L et L'

$$M=\frac{\pi}{200}\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin.^2L)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\pi}{200}a(1-e^2)(1+\tfrac{3}{2}e^2\sin.^2L)$$

$$M'=\frac{\pi}{200}a(1-e^2)(1+\tfrac{3}{2}e^2\sin.^2L')$$

en négligeant la quatrième puissance de e, dont la valeur très-petite, indiquée d'abord par le peu de variation du degré du méridien, sera reconnue telle par le résultat même du calcul.

Divisant M par M′, on a

$$\frac{M}{M'}=\frac{1+\frac{3}{2}e^2\sin^2 L}{1+\frac{3}{2}e^2\sin.^2 L'}=1+\frac{3}{2}e^2(\sin.^2 L-\sin.^2 L')$$

en négligeant toujours la quatrième puissance de l'excentricité. Cette équation permettra de trouver e, dont la valeur substituée dans l'une des équations primitives donnera celle du rayon de l'équateur a.

448. La marche que nous venons d'indiquer suppose implicitement que l'arc mesuré μ est assez petit pour pouvoir être confondu avec un arc de cercle ; il en est très-approximativement ainsi lorsqu'il répond à une différence de latitude ne dépassant pas 1^g ou $1^g\frac{1}{2}$. Si cette différence est plus grande, ou bien si l'on désire avoir plus d'exactitude, on peut avoir recours à la formule de rectification de l'ellipse donnée au § 434. Dans ce cas on aura

$$\mu=a(1-e^2)[(1+\tfrac{3}{4}e^2)(L-L')-\tfrac{3}{8}e^2(\sin.2L-\sin.2L')]$$

Une deuxième mesure fournira une équation de même forme qui, combinée avec la première, conduira à la connaissance de a et e, qui seront très-sensiblement les mêmes que ceux obtenus par l'emploi des rayons des cercles osculateurs, si l'on a fait usage des mêmes données.

449. En combinant ainsi deux à deux les diverses mesures d'arcs de méridiens, on devrait, en tenant compte des erreurs inévitables d'observation, arriver toujours aux mêmes valeurs du demi-grand axe de l'ellipse et de son excentricité, si la terre est une surface de révolution. Il n'en est malheureusement pas ainsi : d'où l'on doit conclure l'irrégularité de la figure de la terre. Nous avons pourtant reconnu que les observations astronomiques des perturbations lunaires, de la précession et de la nutation, étaient d'accord pour indiquer une forme ellipsoïdale répondant à un aplatissement de $\frac{1}{305}$; nous avons alors observé que ce résultat se rapportait à la forme moyenne, inexacte probablement pour chaque lieu pris isolément. Les mesures géodésiques confirment cette seconde conséquence. Pour avoir connaissance, au moyen des mêmes opérations, de la forme moyenne de l'ellipse qui donnerait naissance à un ellipsoïde de

révolution s'écartant le moins possible, généralement, de la surface terrestre, il ne faut plus combiner deux à deux les mesures d'arcs de méridien ; il devient nécessaire de tenir compte de toutes les observations effectuées. On fait alors usage de la méthode des moindres carrés, qui, appliquée aux dix mesures principales exécutées jusqu'à ce jour en Europe, dans l'Inde, au Pérou et au cap de Bonne-Espérance, a conduit aux résultats suivants

$$a = 3272077 \text{ toises.} \quad e^2 = 0,0066744, \quad \alpha = \frac{1}{299,15}$$

Tels sont, jusqu'à ce jour du moins, en raison des mesures géodésiques, les éléments de l'ellipsoïde moyen qui représente le mieux la surface terrestre.

450. Lorsqu'il s'agit d'exécuter un canevas géodésique, cette forme moyenne ne doit pas être préférée ; il vaut mieux lui substituer celle qui s'assimile le mieux possible avec la portion de la surface à représenter. On trouve cette forme par la combinaison des mesures exécutées sur cette surface même. Malheureusement, les grandes irrégularités qu'on trouve dans les résultats d'un même pays, de la France particulièrement, conduisent à une figure moyenne locale s'écartant trop sensiblement de la figure vraie, en certaines parties du moins. Ainsi, en France, la combinaison d'arcs de méridien de peu d'étendue a donné, pour les parties Ouest, des aplatissements tantôt positifs, tantôt négatifs, c'est-à-dire, dans ce dernier cas, répondant à des ellipses aplaties vers l'équateur, tels que la sphère semble être la figure moyenne la plus convenable. Les mêmes opérations exécutées dans la partie Est ont donné un aplatissement moyen de $\frac{1}{134}$, plus fort, par conséquent, que la moyenne générale relative au globe entier. Observons pourtant que ces résultats ne sont peut-être pas tout à fait concluants, car, reposant sur des mesures d'arcs petits, les erreurs commises dans la détermination astronomique des latitudes peuvent avoir une influence notable.

Pour l'exécution de la carte de France du dépôt de la guerre, on n'a pas pu tenir compte de ces variations de l'aplatissement, et on a employé uniformément la valeur $\frac{1}{309}$, le rayon polaire égal à 6356364^{m} et le rayon de l'équateur égal à 6376957^{m}, nombres considérés, lors du commencement de cette carte, comme se rapportant à la forme moyenne générale du globe entier.

451. Il résulte de ce qui précède que, pour la France en par-

ticulier, les canevas géodésiques, calculés avec une forme unique du méridien, doivent être en défaut. Il en est certainement ainsi; la double courbure réelle des méridiens assimilés tous à la même ellipse donne naissance à des différences sensibles entre les coordonnées géographiques calculées en raison de cette hypothèse, et celles qui existent réellement. Mais il ne faut pas s'exagérer l'importance des erreurs ainsi commises; les triangles qui composent le canevas restent exacts en forme et en surface, par suite de leur petitesse même; ils sont seulement disposés, par le calcul, sur une surface régulière au lieu d'être placés sur la surface vraie; leurs relations sont bonnes, mais ils sont quelque peu désorientés.

Les déplacements des sommets, résultant ainsi de l'irrégularité de la figure de la terre, irrégularité provenant de celle du fil à plomb engendrée par des attractions locales dues à des variations notables de densité des couches terrestres, vont en France jusqu'à 50 et 60 mètres. Une expérience récente faite au moyen du télégraphe électrique, qui permet une détermination très-exacte des longitudes, a même donné pour Bourges, comparé à l'observatoire de Paris, un déplacement de 185^m dans le sens du parallèle.

452. *Quart du méridien. — Longueur du mètre.* Nous avons donné précédemment le moyen d'avoir a et e par la combinaison des principales mesures exécutées jusqu'à ce jour. Nous avons dit, d'après Bessel, que les éléments terrestres les plus probables, s'appliquant à la forme générale, sont

$$a = 3272077 \text{ toises}, \quad e = 0066744, \quad \alpha = \frac{1}{299{,}15}$$

Pour avoir, en raison de ces données, la longueur du quart du méridien, il suffit d'introduire la double hypothèse $L = 100^g$, $L' = o$, dans la formule de rectification de l'ellipse (§ 434); il est ici nécessaire de conserver la quatrième puissance de l'excentricité, puisqu'il s'agit de la mesure d'un arc très-grand. On a ainsi

$$Q = a(1 - e^2)\left(1 + \tfrac{3}{4}e^2 + \tfrac{45}{64}e^4\right)\frac{\pi}{2} = 5131180 \text{ toises.}$$

La commission des poids et mesures, qui a déterminé la valeur du mètre légal, a déduit cette valeur de deux mesures méridiennes exécutées en France et au Pérou; l'aplatissement $\frac{1}{334}$ qu'elle a employé est trop faible pour représenter celui de l'ellipsoïde moyen; la longueur du mètre qui en est résul-

tée est donc entachée d'erreur; mais heureusement cette erreur est très-faible par suite de la circonstance qui a fait que l'une des mesures, celle de France, se rapporte à peu près à la latitude de 50^g. Soit, en effet, ρ la valeur du rayon de courbure déduit de l'observation d'un arc de méridien mesuré sous cette latitude. Si λ, λ', désignent toujours les latitudes extrêmes, telles que $\frac{\lambda+\lambda'}{2}=50^g$, et si μ est la longueur correspondante, on a

$$\mu=(\lambda-\lambda').\,\rho$$

ρ est donc déterminé. Mais on a pour ce cas particulier

$$\rho=\frac{a\,(1-e^2)}{(1-\frac{1}{2}e^2)^{\frac{3}{2}}},a\quad(1-e^2)=\rho\,(1-\tfrac{1}{2}e^2)^{\frac{3}{2}}$$

En substituant à la place de $a\,(1-e^2)$ sa valeur dans l'expression du quart du méridien, il vient

$$Q=\frac{\pi}{2}\rho\,(1-\tfrac{1}{2}e^2)^{\frac{3}{2}}(1+\tfrac{3}{4}e^2+\tfrac{45}{64}e^4)=\frac{\pi}{2}\rho\,(1+\tfrac{15}{64}e^4)$$

Ce résultat ne renfermant l'excentricité qu'à la quatrième puissance, ou l'aplatissement qu'à la seconde, l'erreur commise en prenant $\frac{1}{334}$ au lieu de $\frac{1}{299{,}15}$ valeur plus probable de l'aplatissement de l'ellipsoïde moyen, sera excessivement petite.

On trouve en effet ainsi

Q = 5130740 toises, au lieu de 5131480,

avec une différence qui n'est que de 440 toises.

Le mètre légal, égal à la dix millionième partie du quart du méridien, fixé par cette opération à

$$3^p\,11^l{,}296$$

est donc trop faible d'une fraction égale à

$$3^p\,11^l{,}296\times\frac{440}{5130740}$$

quantité plus petite que $\frac{1}{10000}$ de sa longueur.

La correction qu'il faudrait lui faire subir est donc excessivement petite, et il n'y a pas lieu de s'en préoccuper, surtout si l'on observe que la mesure qui a servi à la contrôler n'a elle-même rien de définitif, et qu'elle peut ne pas représenter exactement les éléments rigoureux de l'ellipsoïde moyen.

453. *Mesure d'un arc de parallèle.* La mesure d'un arc de parallèle peut, comme celle du méridien, conduire à la connaissance de la forme terrestre.

Le long du parallèle à mesurer on établit un réseau de triangles dont on mesure un côté, un azimut et tous les angles. Soient A et B deux sommets consécutifs, dont la distance AB est calculée par la résolution des triangles, et dont l'azimut au méridien de A est obtenu ainsi qu'il sera indiqué au chapitre IX. Supposons qu'on mène les deux méridiens PmA, PmP (*Planche* XXIII, *fig.* 57 *ter*). Nous apprendrons un peu plus loin à trouver la différence de longitude des points A et B par la formule

$$M - M' = \frac{k \sin.Z}{N' \cos.L'}$$

en posant AB $=$ K, Z $= 200^g + m$AB, et en désignant par L' et N' la latitude précédemment calculée, et la grande normale du point B.

L'arc de parallèle compris entre les deux méridiens PA, PB, sera

$$mm' = r.(M - M') = N \cos.L\,(M - M') = N \cos.L \frac{k \sin.Z}{N' \cos.L'}$$

si L est la latitude de ce parallèle et N sa grande normale. En introduisant la valeur des normales en fonction de l'excentricité supposée connue pour un instant, on aura

$$mm' = k \sin.Z \frac{\cos.L}{\cos.L'} \left(\frac{1 - e^2 \sin.^2L'}{1 - e^2 \sin.^2L}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Le rayon équatorial ne paraît pas dans ce résultat, et l'influence de l'excentricité y est elle-même très-faible ; on peut même voir qu'en la mettant sous la forme

$$mm' = k \sin.Z \frac{\cos.L}{\cos.L'} \frac{1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2L'}{1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2L} =$$

$$= k \sin.Z \frac{\cos.L}{\cos.L'} (1 - \tfrac{1}{2} e^2 \sin.^2L' + \tfrac{1}{2} e^2 \sin.^2L)$$

qui résulte de l'omission des termes en e^4 très-petits, on sera presque en droit de supprimer les termes en e^2, si L et L' diffèrent très-peu l'un de l'autre, c'est-à-dire si le réseau géodésique s'écarte peu de la direction du parallèle. On pourra se contenter du moins, avec une approximation suffisante, de mettre dans cette expression, au lieu de la valeur exacte de e, qu'on a précisément en vue de déterminer, une valeur approchée quelconque.

Une série d'opérations semblables donnera par de simples additions la longueur totale d'un arc de parallèle, comprise entre les méridiens des stations extrêmes.

454. Si, de plus, on a observé astronomiquement les longitudes du premier et du dernier point, on en connaîtra la différence $M_1 - M_2$, qui sera liée à la longueur trouvée μ de l'arc du parallèle, par la relation

$$\mu = r(M_1 - M_2) = N \cos.L\,(M_1 - M_2)$$

$$\mu = \frac{a \cos L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}(M_1 - M_2)$$

$M_1 - M_2$ est un angle qui doit être exprimé en rapport; s'il est donné en prenant la seconde pour unité, l'expression précédente se transforme en la suivante

$$\mu_{\text{mètres}} = \frac{a^{\text{mt}} \cos.L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}(M_1 - M_2) \sin.1''.$$

Les seules inconnues de cette équation sont la longueur a du rayon équatorial, et l'excentricité e de l'ellipse méridienne. Une seconde opération faite sous une autre latitude donnera une deuxième équation qui, combinée avec la première, permettra de trouver a et e.

Les résultats obtenus par cette méthode ne conduisent, pas plus que ceux qui proviennent des mesures de méridiens, à un système unique de valeurs de a et de e, et ils confirment ainsi ce que nous savions déjà, l'irrégularité de la surface terrestre.

455. *Ellipsoïde osculateur*. La combinaison des deux mesures, d'un arc de méridien et d'un arc de parallèle, peut conduire également à la connaissance de la forme du sphéroïde terrestre. En effet, la première donne la longueur M^m du grade compté sur le méridien, et la seconde, P^m du grade du parallèle : on a donc (§ 433)

$$M^m = \frac{\pi}{200}\,\frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}}, \qquad P^m = \frac{\pi}{200}\,\frac{a \cos.L}{(1 - e^2 \sin^2 L')^{\frac{1}{2}}}$$

équations qui, divisées terme à terme, donneront une relation entre e et des quantités connues, ce qui permettra de déterminer l'excentricité par approximations successives, puis a, par une substitution.

Cette marche serait surtout convenable à suivre en faisant $L = L'$, c'est-à-dire en exécutant les deux mesures au centre d'une surface dont on obtiendrait ainsi l'ellipsoïde osculateur, le plus convenable pour représenter cette surface.

La comparaison des différents ellipsoïdes locaux ainsi obtenus avec l'ellipsoïde moyen serait propre à faire apprécier les irrégularités de la surface terrestre.

CHAPITRE IX.

FORMULES DE LATITUDE, LONGITUDE ET AZIMUT.

456. *Latitude.* L'emploi de la projection de Flamstead modifiée exige la connaissance des latitude et longitude de chaque point à représenter. Cherchons donc ces éléments en fonction de ceux qui sont fournis par le canevas géodésique. Il suffira, pour arriver à ce résultat, de connaître, en outre, la latitude et la longitude d'un premier point, ainsi que l'azimut à son méridien, d'un premier côté, ce qu'on obtiendra par des observations astronomiques. On pourrait résoudre un triangle dans lequel deux côtés et l'angle compris seraient connus, par la méthode indiquée au § 70. Mais, pour obtenir une plus grande approximation (§ 377), on préfère procéder de la manière suivante :

Soient P le pôle, PA et PB (*fig.* 326) deux méridiens, AN et BO les normales aux points A et B : on suppose connu l'angle ANH, qui est la latitude L de A, et l'on demande L′, celle de B situé à l'extrémité de l'arc AB ou K, obtenu par la résolution des triangles. Pour trouver L — L′ ou la différence d'inclinaison sur l'équateur des normales AN, BO, qui ne sont pas situées dans un même plan, unissons B et N par une droite qui formera avec l'équateur un angle que nous désignerons par λ; puis cherchons L — λ, λ — L′, et éliminons λ.

Si du point N, comme centre, et d'un rayon égal à l'unité, nous décrivons une sphère, elle sera coupée suivant les trois arcs de cercle *pa*, *pb*, *ab*, par les deux plans méridiens et par celui dans lequel sont situés AN et AB.

pa sera le complément de L, *pb* celui de λ, et *ab*, que nous représenterons par φ, sera le rapport de K à la normale du point A : car l'arc AB est assez petit, eu égard aux dimensions du globe, pour pouvoir dire qu'il se confond sensiblement dans toutes ses parties avec son cercle osculateur qui aurait son centre très-près de N et AN pour rayon. Cette portion du cercle osculateur et *ab* sont deux arcs concentriques proportionnels à leurs rayons : ainsi il est donc vrai de dire que $\varphi = \frac{K}{N}$ (N désignant la normale de A).

Désignons L — λ par *x*, et nous aurons

$$x = 100 - pa - (100 - pb) = pb - pa \quad \text{ou} \quad pb = pa + x \quad . \; . \; . \; (1)$$

32.

Le triangle sphérique pab fournit la relation

$$\cos.pb = \cos.pa \cos.ab + \sin.pa \sin.ab \cos.a.$$

Il est donc naturel de chercher une autre valeur de $\cos.pb$, en la déduisant de (1) : car en les égalant pour faire disparaître $\cos.pb$, il restera une relation entre x et des quantités connues.

De (1) nous tirons

$$\cos.pb = \cos.pa \cos.x - \sin.pa \sin x$$

et alors

$$\cos.pa \cos.x - \sin.pa \sin.x = \cos.pa \cos.ab + \sin.pa \sin ab \cos.a$$

Mais

$$pa = 100 - L,\ a = 200 - z \quad \text{et} \quad ab = \varphi$$

nous pouvons donc écrire

$$\sin.L \cos.x - \cos.L \sin.x = \sin.L \cos.\varphi - \cos.L \sin.\varphi \cos.z$$

x et φ étant des quantités très-petites, nous pourrons employer avec avantage les développements en séries, pour faire disparaître leurs lignes trigonométriques, et négliger dans ces développements tous les termes de puissances supérieures à la seconde : il vient alors

$$\sin.L - \frac{x^2}{2} \sin.L - x \cos.L = \sin L - \frac{\varphi^2}{2} \sin.L - \varphi \cos.L \cos.z. \ . \ . \ (2)$$

ou, en supprimant sin.L commun aux deux membres et changeant tous les signes

$$\frac{x^2}{2} \sin.L + x \cos.L = \frac{\varphi^2}{2} \sin.L + \varphi \cos.L \cos.z$$

Au lieu de résoudre cette équation suivant la méthode générale usitée par le deuxième degré, et pour ne pas arriver à une valeur irrationnelle de x, nous allons, parce que x et φ sont très-petits, supprimer les termes qui contiennent leurs secondes puissances, afin d'arriver à une première valeur approximative

$$x = \varphi.\cos.Z.$$

Celle-ci substituée à x^2 ramène l'équation à n'être que du premier degré et de la forme

$$\frac{\varphi^2}{2} \cos.^2 z \sin.L + x \cos.L = \frac{\varphi^2}{2} \sin.L + \varphi \cos.L \cos z$$

ou

$$x = \varphi \cos.z + \frac{\varphi^2}{2} \operatorname{tang}.L (1 - \cos.^2 z) = \varphi \cos.z + \frac{\varphi^2}{2} \operatorname{tang}.L \sin.^2 z$$

Telle est la valeur de x ou L—λ. Remarquons que la valeur de λ

fournie par cette équation serait la latitude cherchée dans le cas de la terre *sphérique*.

Cherchons actuellement celle de $\lambda - L'$. BO étant la normale du point B, l'angle OBN est précisément la différence de λ à L'. Par le point N, élevons NM perpendiculaire à BO jusqu'à son prolongement en M, et remarquons d'abord que, dans le triangle BMN rectangle en M, on a $\sin.MBN = \frac{MN}{BN}$ ou, comme l'angle est très-petit, en prenant la valeur du sinus pour celle de l'angle,

$$B = \lambda - L' = \frac{MN}{BN}$$

Mais $MN = NO. \cos.MNO$ et $MNO = L'$, puisque les côtés qui embrassent ces angles sont respectivement perpendiculaires : donc

$$\lambda - L' = \frac{NO}{BN} \cos. L'$$

D'ailleurs, $NO = MC - OC$ ou la différence des sous-normales de A et B; quant à BN, sensiblement égal à AN, nous le remplacerons par la valeur de cette dernière ligne, et nous aurons

$$\lambda - L' = \frac{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}{A} \left(\frac{Ae^2 \sin.L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}} - \frac{Ae^2 \sin.L'}{(1 - e^2 \sin.^2 L')^{\frac{1}{2}}} \right) \cos.L'. \quad (3)$$

Nous pouvons beaucoup simplifier cette expression, en remarquant que les dénominateurs sont sensiblement les mêmes : en effet, ils contiennent les carrés des deux sinus peu différents l'un de l'autre et multipliés tous deux par c^2 que nous avons vu (n° 429) être égal à 0,00646.

On peut alors simplifier en écrivant

$$\lambda - L' = e^2 (\sin.L - \sin.L') \cos.L'$$

Remplaçons la différence des deux sinus, comme l'indique la formule 15 de trigonométrie rectiligne

$$\lambda - L' = 2e^2 \cos.\tfrac{1}{2} (L + L') \sin.\tfrac{1}{2} (L - L') \cos L'$$

On sait que le double du sinus de la moitié d'un arc est égal à la corde qui sous-tend cet arc, et lorsque ce dernier est aussi petit que $L - L'$, il se confond avec sa corde : nous pourrons donc dire que $2 \sin.\frac{1}{2} (L - L') = L - L'$, et écrire

$$\lambda - L' = e^2 (L - L') \cos.\tfrac{1}{2} (L + L') \cos.L'$$

Ici encore, il se présente des réductions qui ne sont pas rigou-

reusement exactes, mais que justifie la nature des quantités qui entrent dans l'expression : ainsi le premier facteur e^2 est une très-petite fraction ; le second est aussi très-petit, puisque, relativement aux dimensions du globe, la distance est bien peu considérable entre A et B, qui doivent être visibles l'un de l'autre. Par la même raison, $\cos.\frac{1}{2}(L + L')$ doit peu différer de $\cos.L$ et de $\cos.L'$. De tout cela, il résulte que

$$\lambda - L' = e^2 (L - L') \cos.^2L$$

Ajoutant membre à membre cette équation et celle qui fournit $L - \lambda$, il vient

$$L - L' = e^2 (L - L') \cos.^2L + \varphi \cos.z + \frac{\varphi^2}{2} \operatorname{tang}.L \sin.^2z$$

ou momentanément, pour abréger,

$$L - L' = (L - L') e^2 \cos.^2L + X$$

d'où

$$(L - L') (1 - e^2 \cos.^2L) = X$$

$$L - L' = \frac{X}{(1 - e^2 \cos.^2L)} = X (1 - e^2 \cos.^2L)^{-1} = X (1 + e^2 \cos.^2L)$$

$$L - L' = \varphi (1 + e^2 \cos.^2L) \cos.z + \frac{\varphi^2}{2} (1 + e^2 \cos.^2L) \operatorname{tang}.L \sin.^2z$$

formule qui donnerait l'expression de $L—L'$ en rapport. Pour avoir la valeur correspondante en secondes, il faut diviser la première par $\sin.1''$, ou en conservant le signe $L—L'$ pour désigner le nombre de secondes de la différence de latitude, il suffit de diviser chaque terme du deuxième membre par $\sin.1''$.

Mais

$$\varphi = \frac{AB}{AN} = K \frac{(1 - e^2 \sin.^2L)^{\frac{1}{2}}}{A}$$

donc

$$L - L' = K \frac{(1 - e^2 \sin.^2L)^{\frac{1}{2}}}{A \sin.1''} (1 + e^2 \cos.^2L) \quad s\,z +$$

$$K^2 \frac{(1 - e^2 \sin.^2L)}{2A^2 \sin.1''} (1 + e^2 \cos.^2L) \operatorname{tang} L \sin.^2z.$$

On a fait pour abréger

$$\frac{(1 - e^2 \sin.^2L)^{\frac{1}{2}}}{A \sin.1''} (1 + e^2 \cos.^2L) = P, \quad \frac{(1 - e^2 \sin.^2L)}{2A^2 \sin.1''} (1 + e^2 \cos.^2L) \operatorname{tang} L = Q.$$

La formule s'écrit alors

$$L' = L - P.K \cos.z - Q.K^2 \sin.^2z.$$

On a calculé et mis en table les différentes valeurs de P et Q en fonction de L.

Cette formule est celle qui a été employée pour les opérations les plus délicates relatives à l'exécution de la carte de France. Il résulte cependant d'une note insérée par M. Hossard, dans le troisième volume de la *Description géométrique de la France*, qu'elle est insuffisante lorsque les côtés employés deviennent très-grands. Ainsi, en partant d'un point connu, si l'on calcule la latitude d'un second point situé au sud, à 100000^m sur le méridien, et si l'on fait ensuite l'opération inverse, en partant du second point, on retrouve la latitude du premier avec une erreur en plus d'environ 1^m,5, ce qui correspond à 15^m. Un calcul semblable effectué sur un côté de 40000^m donne lieu à un déplacement d'environ 2^m,5. Cette erreur doit être corrigée lorsqu'il s'agit de côtés très-grands et d'opérations importantes. Elle provient de deux causes : 1° en posant l'équation (2) qui conduirait à la connaissance de la seconde latitude, si la terre était sphérique, nous nous sommes bornés à prendre, dans les développements en séries, les deux premières puissances de l'angle φ sous-tendu par le côté géodésique sur un cercle dont le centre serait au pied de la grande normale du point connu ; lorsque cet angle devient grand, relativement, il faut introduire dans les développements sa troisième puissance ainsi que celle de x qui, dans les cas d'azimuts rapprochés de o ou de 200$'$, est de même ordre de grandeur que φ. La résolution de la formule, qui résulterait de cette introduction, se ferait par la même méthode et sans plus de difficulté que celle de l'équation (2) ; 2° en établissant l'équation (3), nous avons remplacé BN par la normale AN, et en simplifiant cette équation, nous avons assimilé L à L$'$ dans les dénominateurs : nous avons donc, pour ces deux causes, commis une erreur d'autant plus grande que les points considérés sont près du même méridien. Nous avons indiqué le moyen de corriger la première cause d'erreur, disons ce qu'il y aurait à faire pour obvier à la seconde. Supposons le deuxième sommet B projeté en B$'$ sur le premier méridien par un arc de parallèle. L'arc AB$'$ sous-tendra sur la terre ellipsoïdale la différence des latitudes L et L$'$ et, sur la terre sphérique, il sous-tendrait la différence des latitudes L et λ. Dans le premier cas, il appartiendrait au cercle osculateur au méridien sous la latitude L, ou plus exactement sous la latitude $\frac{L+L'}{2}$. Soit ρ le rayon de ce cercle ; dans le second, cet arc appartiendrait à la sphère se confondant le mieux avec la terre, c'est-à-dire, celle dont le rayon serait celui du cer-

cle osculateur à la section faite dans le sens du parallèle, rayon qui est égal à la grande normale N. On sera donc en droit d'écrire $\rho.\,(L - L') = N\,(L - \lambda)$, équation qu'on devrait substituer à l'équation (3).

Le troisième volume de la *Description géométrique de la France* (Mémorial du dépôt de la guerre) contient les détails du calcul résultant des rectifications que nous venons d'indiquer. La formule définitive qui en résulte est

$$L' - L = \left(- \frac{K \cos.z}{N \sin 1''} - \frac{K^2 \sin.^2 z. \operatorname{tang}.L}{2 N^2 \sin.1''} + \frac{K^3 \sin.^2 z. \cos.z}{6 N^3 \sin.1''} (1 + \operatorname{tang}.^2 L) \right) \times$$
$$\times (1 + e^2 \cos.^2 L + e^4 \cos.^2 L + \frac{3 e^2 K}{2N} \cos.z. \sin.L. \cos.L)$$

formule qui rentre dans celle que nous avons donnée, lorsqu'on néglige les troisièmes puissances de $\frac{K}{N}$ et de l'excentricité. Des tables insérées dans le volume précité et calculées par M. Hossard permettent de corriger les latitudes obtenues par les formules usitées, au moyen des termes supplémentaires de la formule transcrite ci-dessus.

457. *Longitude.* Soit ABC (*fig.* 327) le triangle sphérique obtenu, en décrivant une sphère de N, extrémité de la normale du point qui, sur la terre, correspond à B, et d'un rayon égal à l'unité. La différence en longitude des points correspondants à A et B est mesurée par l'angle C. Le triangle ABC donne

$$\sin.C = \frac{\sin.A}{\sin.a} \sin.c$$

c est ce que nous avons désigné par φ. Cette quantité étant très-petite ainsi que C, nous pouvons les substituer à leurs sinus, et écrire

$$C = \frac{\sin.A}{\sin a} \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

A est le supplément de l'azimut Z et $a = 100 - \lambda$, d'où $\sin.A = \sin.Z$ et $\sin.a = \cos.\lambda$.

Si nous désignons par M et M′ les longitudes, nous aurons

$$M' - M = \frac{\sin.z}{\cos.\lambda} \varphi$$

C étant égal à M′ — M par suite de l'usage de compter les longitudes positives à l'ouest.



Ici, on remplace cos.λ par cos.L', et voici comment on justifie cette opération.

Nous avons trouvé que

$$\lambda = L' + e^2 \cos.^2 L \,(L - L')$$

L — L' est, comme nous savons, très-petit ; e^2 l'est également ; enfin, un cosinus étant moindre que l'unité, son carré est plus petit encore, et le produit de ces trois facteurs donne pour la différence de λ à L' une fraction peu appréciable. Ce sont d'ailleurs les cosinus que nous substituons l'un à l'autre, et l'on sait qu'ils diffèrent entre eux moins que les angles eux-mêmes.

Nous écrirons donc, en remplaçant φ par sa valeur, et en réduisant en secondes,

$$M' - M = K \frac{(1 - e^2 \sin{}^2 L')^{\frac{1}{2}}}{A \sin.1''} \text{ sécante } L' \sin.z.$$

Ajoutons, pour justifier davantage l'artifice de calcul que nous avons employé, que cela a lieu au dénominateur de la très-petite fraction qui représente M' — M. Connaissant donc la longitude d'un point, on trouvera celle d'un autre point, au moyen de la formule ci-dessus, et ainsi de suite, de proche en proche. On a calculé et mis en table $\frac{(1 - e^2 \sin.^2 L')^{\frac{1}{2}}}{A \sin.1''}$ que l'on représente par R. La formule s'écrit ainsi qu'il suit :

$$M' = M + RK \text{ séc.} L' \sin.z.$$

Pour les grands côtés géodésiques, cette formule est affectée d'une erreur de sphéricité analogue à celle relative aux latitudes ; elle provient de ce que pour obtenir l'équation (4), nous avons développé en séries les sinus des petits angles C et φ en négligeant les troisièmes puissances de ces angles. Leur rétablissement et la résolution de l'équation qui en résulte, par la méthode indiquée pour l'équation (2), conduit à la formule

$$M' - M = \frac{K \sin.z}{N' \sin.1'' \cos.L'} + \frac{K^3}{6\, N'^3 \sin.1''} \left(\frac{\sin.^3 z}{\cos.^3 L'} - \frac{\sin.z}{\cos L'}\right);$$

le terme de la correction, applicable seulement aux très-grands côtés géodésiques, c'est-à-dire aux très-grandes valeurs de $\frac{K}{N}$, a d'autant plus d'influence que l'azimut est proche de 100^g, et que les observations se font à des latitudes élevées.

Il n'y a pas pour les longitudes d'erreur provenant de l'ellip-

ticité, les méridiens circulaires formant les mêmes angles que les méridiens elliptiques.

458. *Azimut.* Il s'agit actuellement de passer de l'azimut Z du côté AB, observé en A, à son azimut Z' compté sur le méridien de B (*fig.* 327). On se sert pour cela de l'analogie de Neper

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B) = \text{cotang.}\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos.\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}$$

En raison de la petitesse du côté c, le supplément de B ne diffère de A que d'une très-petite quantité que nous désignerons par y : nous pourrons donc poser

$$B = 200-(A+y),\quad \tfrac{1}{2}(A+B) = 100-\tfrac{1}{2}y,\quad \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B) = \text{cotang.}\tfrac{1}{2}\,y,$$

d'où il résulte

$$\text{cotang.}\tfrac{1}{2}\,y = \text{cotang.}\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos.\frac{1}{2}(a+b)}$$

Les angles $\frac{1}{2}\,y$ et $\frac{1}{2}\,c$ étant très-petits, leurs cotangentes sont très-grandes; mais leurs tangentes, dans ce cas, se confondant pour ainsi dire avec les angles, on peut renverser la formule ci-dessus, et elle devient alors

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}y = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos.\frac{1}{2}(a+b)}{\cos.\frac{1}{2}(a-b)} \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)} \qquad (5)$$

Substituons actuellement à a, b et C, leurs notations géodésiques, pour mettre en évidence les données du problème.

$$\left.\begin{aligned} a &= 100-L' \\ b &= 100-L \\ C &= M'-M \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(a+b) = 100-\tfrac{1}{2}(L+L'), \quad \cos.\tfrac{1}{2}(a+b) = \sin.\tfrac{1}{2}(L+L') \\ &\tfrac{1}{2}(a-b) = \tfrac{1}{2}(L-L'), \quad \cos.\tfrac{1}{2}(a-b) = \cos.\tfrac{1}{2}(L-L') \end{aligned}$$

Nous aurons donc

$$\tfrac{1}{2}\,y = \tfrac{1}{2}(M'-M)\,\frac{\sin.\frac{1}{2}(L+L')}{\frac{1}{2}\cos.(L-L')} \qquad (6)$$

Nous avons posé

$$y = 200-(A+B) = 200-(200-z)-(z'-200) = 200+z-z'.$$

Substituant cette valeur de y, multipliant par 2, et remarquant que l'on peut négliger le dénominateur cos. $\frac{1}{2}$ (L — L') sensiblement égal à l'unité, nous aurons en définitive

$$z' = 200+z-(M'-M)\sin.\tfrac{1}{2}(L+L').$$

Cette formule dans laquelle on conserve quelquefois le dénominateur cos. $\frac{1}{2}$ (L — L') est suffisamment exacte pour les opérations



les plus délicates de la géodésie. Comme elle a été établie dans l'hypothèse de la terre sphérique, sa forme ellipsoïdale devrait bien à la rigueur donner lieu à une correction, mais elle est insignifiante. L'azimut vrai serait celui formé par le côté K avec la tangente à l'ellipse méridienne passant par le point B, tandis que l'azimut obtenu est l'angle formé par ce même côté avec la tangente à l'arc de cercle appartenant à la sphère de la figure 327. Ces angles seront égaux, si nous supposons que le rayon de cette sphère soit celui de la grande normale au point B; l'arc BC mesurera toujours le complément de la latitude L', mais il n'en sera plus rigoureusement de même de l'arc AC qui différera de 100—L; cette différence sera du genre de celle que nous avons désignée par $\lambda - L'$ dans le calcul de la latitude, et que nous avons vue être du troisième ordre de petitesse. En prenant donc CA comme le complément de L, on commettra dans l'équation (5) des erreurs du troisième ordre qui, multipliées elles-mêmes par $\frac{1}{2}C$ toujours très-petit, en engendreront d'autres du quatrième ordre toujours négligeables. La résolution du triangle sphérique ABC considéré comme appartenant à la sphère osculatrice en B, dans le sens du parallèle, a donc conduit à des conséquences exactes, même pour les cas les plus délicats. Mais l'équation (5) a été déduite de cette résolution par des développements en séries des tangentes de $\frac{1}{2}y$ et de $\frac{1}{2}C$, développements dans lesquels on a supprimé les troisièmes puissances. Il semblerait donc y avoir matière à introduire une correction analogue à celle de la formule des longitudes; cette correction est toujours négligeable par suite des considérations suivantes. L'introduction des troisièmes puissances aurait donné au lieu de l'équation (5) la formule

$$\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}y)^3 = [\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}C)^3]\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos.\frac{1}{2}(a-b)} \qquad (7)$$

Le dernier facteur, qui revient à $\frac{\sin.\frac{1}{2}(L+L')}{\cos.\frac{1}{2}(L-L')}$, est, sous nos latitudes, toujours proche de l'unité, en sorte que l'introduction des troisièmes puissances a produit dans l'équation (5) à très-peu près le même effet que si on avait ajouté $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}y)^3$ dans le premier membre, et $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}C)^3$ dans le second; mais l'équation (6), ne fût-elle même qu'une première approximation, indique que $y = 200 + z - z'$ et $C = (M' - M)$ diffèrent toujours très-peu l'un de l'autre; par suite, les deux termes supplémentaires $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}y)^3$ et $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}C)^3$ se détruisant dans l'équation (7), celle-ci rentre dans l'équa-

tion (5) qui, suffisamment exacte, a résolu convenablement le triangle sphérique ABC. On a ainsi obtenu l'inclinaison du côté K sur l'arc CB ; mais celui-ci appartenant à un cercle tangent au méridien vrai, leurs tangentes se confondent et l'on connaît en résumé l'angle formé par le côté avec ce dernier, c'est-à-dire l'azimut exact.

Les latitudes et les longitudes se calculent jusqu'aux centièmes de secondes qui pour la première répondent moyennement aux décimètres.

Comme il est nécessaire de vérifier toujours des calculs longs et délicats, on cherche les coordonnées géographiques de chaque point par une opération double. Ainsi, on détermine la latitude du point C (*fig.* 328) d'abord au moyen du point A, puis au moyen du point B. Les doubles résultats doivent être à très-peu près identiques. Lorsque cette identité existe, il n'en faut pas conclure que la position du point C est rigoureusement déterminée ; cela dit seulement que le calcul a été bien fait, que le triangle ABC a été résolu, indirectement, d'une manière exacte, et la position obtenue n'est bonne qu'autant que le triangle fait lui-même partie d'un réseau de triangles exacts.

Pour exécuter ce double calcul, il est nécessaire de connaître les deux azimuts des côtés K et K′ par rapport aux méridiens des points connus A et B ; l'inspection de la figure 328 fait voir que le premier est égal à z augmenté de l'angle A du triangle ABC, et que le second est égal à z' diminué de l'angle B du même triangle. Pour ne pas être obligé de faire une figure dans chaque circonstance, l'habitude est d'exécuter le calcul double en commençant par le point de droite, et de former l'azimut correspondant en retranchant l'angle dont le sommet est au point de droite de l'azimut du côté connu par rapport au méridien de ce point ; la seconde opération relative au point de gauche forme l'azimut nécessaire à son calcul, en ajoutant l'angle du triangle dont le sommet est à ce point à l'azimut du côté connu, par rapport à son méridien.

La droite et la gauche sont comptées pour un observateur qui serait au point à déterminer. Il est presque superflu d'ajouter que les trois points A,B,C, ne sont pas pris arbitrairement ; ils doivent appartenir à un triangle observé.

C'est dans le but d'arriver à la formation de ces azimuts nécessaires aux opérations subséquentes qu'on a dû calculer l'azimut du côté AB par rapport au méridien de B, après avoir obtenu

les latitude et longitude de celui-ci. Les points du troisième ordre ne pouvant pas, à leur tour, être employés à en déterminer d'autres, il n'y a pas lieu, pour eux, d'effectuer ce calcul.

La vérification des azimuts calculés est indiquée par la figure 328, qui fait voir que pour un même point C la différence de ces angles relatifs aux deux côtés AC, CB, est égale au troisième angle du triangle employé.

Quand l'azimut de droite est plus petit que celui de gauche, il faut, pour rendre la sonstraction possible, lui ajouter 400^g, et la différence est toujours, comme l'indique la figure 331, l'angle C du triangle. La même observation s'applique à la formation des azimuts pour laquelle il est quelquefois nécessaire d'ajouter ou de retrancher 400^g à l'un des angles, pour rendre l'opération possible.

CHAPITRE X.

NIVELLEMENT GÉODÉSIQUE ET BAROMÉTRIQUE.

459. Nous avons passé en revue tout ce qui est nécessaire an calcnl de la projection des points du canevas: il nous reste à trouver les ordonnées verticales de ces points : c'est ce qui constitue le nivellement géodésique.

Il est évident que la différence de niveau BB' de deux points A et B (*fig.* 332) est fonction des distances zénithales ZAB, Z'BA, et du côté AB ; mais ces distances observées sont affectées d'erreurs qu'il faut d'abord détruire.

460. *Réduction des distances zénithales aux sommets des signaux.* Généralement, l'instrument n'est pas placé précisément au point de mire, c'est-à-dire au point visé des autres stations. Il s'ensuit que la distance zénithale doit être corrigée d'une première erreur qui est la conséquence de cette disposition.

Supposons que A et B (*fig.* 333) soient les deux points de mire : les deux distances zénithales réciproques sont ZAB, Z'BA que nous désignerons par δ et δ'. Si l'on a été obligé de se placer en a au-dessous de A, l'angle observé ZaB, que nous pouvons représenter par Δ, est plus petit que δ, de la quantité angulaire ABa ou α : en effet, en considérant δ comme extérieur au trian-

gle ABa, on trouve $\delta = \Delta + \alpha$. Le même triangle fournit la proportion

$$\sin.\alpha : \sin.\Delta :: Aa : AB \qquad \text{d'où} \qquad \sin.\alpha = Aa\,\frac{\sin.\Delta}{AB}$$

AB est le côté connu : c'est ce que déjà nous avons représenté par K. Désignons Aa par dH, c'est la distance de l'instrument à la mire du signal ; et parce que l'angle α est très-petit, prenons l'expression de son sinus pour l'angle, et nous écrirons

$$\alpha = \frac{dH \sin.\Delta}{K}.$$

Telle est la formule au moyen de laquelle on détermine la correction, après, toutefois, l'avoir rendue plus usuelle. α doit être exprimé en secondes, et puisque le second membre de l'équation représente un rapport, il faut, comme nous l'avons fait déjà en maintes circonstances semblables, le diviser par sin. 1", ce qui donne

$$\alpha = \frac{dH \sin.\Delta}{K \sin.1''}.$$

Enfin, nous dirons que, dans la pratique, on néglige sin. Δ comme différant très-peu de l'unité : on calcule donc la correction au moyen de

$$\alpha = \frac{dH}{K \sin.1''}.$$

Pour justifier cette simplification, il suffit de remarquer que Δ diffère toujours trop peu de 100^g, pour qu'on ne puisse pas prendre son sinus pour le rayon ou l'unité, surtout quand il est le coefficient d'une fraction aussi petite que $\frac{dH}{K}$.

Dans le cas le plus général, celui où l'instrument est au-dessous du point de mire, la correction est additive, comme l'indique la figure : elle se retranche dans le cas contraire, et est presque toujours bien moindre dans cette dernière circonstance : en effet, dans le premier cas, elle dépend de la distance plus ou moins grande à laquelle la disposition de l'édifice ou du signal permet de placer l'instrument par rapport au point de mire. Le second cas ne se présente que pour des monuments terminés par une plate-forme ou une balustrade, ou par des signaux construits en pierre et dont la forme est celle d'un cône tronqué. En visant des autres stations, on a fait coïncider le fil horizontal de la lunette avec la ligne horizontale suivant laquelle on aperçoit la plate-forme, la balustrade ou la base supérieure du cône tron-

qué. Quand ensuite on s'y transporte, pour faire les observations, l'instrument est placé sur la visée, et le dH n'est autre chose que la hauteur de l'instrument.

461. Il n'est pas toujours facile de mesurer immédiatement dH; alors, on peut prendre une base CB (*fig.* 334) partant du pied de l'édifice : du point B observer les distances zénithales de A et a, se servir de leurs compléments pour résoudre les deux triangles rectangles CBA, CBa, dont les deux côtés verticaux sont les hauteurs du point de mire A et de l'instrument a au-dessus du sol. Leur différence donne dH.

Nous avons supposé horizontal le terrain sur lequel repose le signal : s'il est incliné, il faudra d'abord réduire la base à l'horizon.

Si l'on ne pouvait aborder C, projection du point de mire, on prendrait, sur un terrain favorable et à une distance arbitraire, une base B'B (*fig.* 335), que l'on mesurerait avec soin. Des extrémités on observerait les distances zénithales de A, qui seraient les compléments des angles ABC, AB'C, puis les angles ABB', AB'B. Au moyen de ces deux derniers et de la base, on obtiendrait les longueurs de AB et de AB', par la résolution du triangle ABB' : puis ensuite, pour trouver AC et si l'on veut BC et B'C, on calculerait les deux triangles rectangles ABC, AB'C, dans lesquels on connaîtrait l'hypothénuse et l'un des angles aigus. La hauteur AC serait d'autant mieux déterminée, qu'elle serait donnée par deux calculs. On agirait de même à l'égard du point a.

Voici encore une méthode que l'on peut employer, lorsque l'on est dans une flèche peu aiguë. On mesure deux rayons AO, DE, (*fig.* 335) à une distance OE ou H, que l'on mesure aussi; les triangles semblables ABO, DBE, donnent

$$\mathrm{AO} : \mathrm{DE} :: x+\mathrm{H} : x \text{ ou } \mathrm{AO}-\mathrm{DE} : \mathrm{DE} :: h : x, \text{ d'où enfin } x=\frac{\mathrm{H.DE}}{\mathrm{AO}-\mathrm{DE}}.$$

462. *Erreur de réfraction.* La seconde cause d'erreur est due à la réfraction. On sait qu'un rayon lumineux, en passant successivement dans des milieux qui augmentent de densité, s'infléchit, parce que l'angle que fait sa direction avec la normale diminue sans cesse (Livre IV, n° 287). C'est effectivement ce qui a lieu dans l'atmosphère en raison de l'accroissement progressif de densité. Si l'on est placé plus près du sol que le point visé, le rayon lumineux qui en a produit la sensation se rapproche constamment de la normale, en raison de ce que la densité de l'air augmente.

Le contraire a lieu, c'est-à-dire que l'angle que fait ce rayon lumineux avec la normale s'ouvre de plus en plus, quand le point visé est moins élevé que la personne qui le contemple. Dans l'un et l'autre cas, la courbe que fait le rayon lumineux présente sa concavité à la terre. Ainsi, pour l'observateur qui, placé en A, voit le point B (*fig.* 337), ce n'est pas le rayon lumineux partant de B et dirigé d'abord suivant BA qui a produit la sensation : car il s'est courbé et a rencontré la terre en deçà de A : c'est donc un rayon représenté par une courbe dont AB est la corde, et l'observateur juge le point B en B′ suivant la tangente au premier élément de la courbe. L'angle ZAB′ qu'il observe n'est par conséquent pas la vraie distance zénithale. Réciproquement, le point A vu du point B apparaît suivant la tangente au dernier élément lumineux de la même trajectoire. **En sorte que** les deux distances zénithales observées sont trop faibles d'angles égaux à ceux formés par la corde AB avec les deux tangentes à la même courbe, si les observations ont été faites simultanément, c'est-à-dire avec le même état atmosphérique.

Dans les opérations géodésiques, les points observés sont toujours peu éloignés et peu élevés les uns au-dessus des autres; ils sont situés dans des couches d'air de densité peu différentes; les trajectoires lumineuses ont par conséquent une petite courbure et une petite étendue. Dans ces circonstances, on peut donc les considérer comme se confondant avec leurs cercles osculateurs pendant tout leur parcours. On sera alors en droit de prendre $r = r'$, en désignant par r et r' les angles d'erreur commis sur les distances zénithales, et chacun d'eux aura pour mesure $\frac{A}{2R'}$, A étant la longueur de la courbe, R′ son rayon de courbure. Nous savons, d'un autre côté, que l'angle au centre O sous-tendu sur la terre de rayon R, par le côté géodésique K, a pour expression $O = \frac{K}{R}$: il en résultera donc assez approximativement

$$r = \frac{A}{K}\frac{R}{2R'} \cdot O$$

Dans le cas de la terre plane et d'une atmosphère de densité uniforme, K et A seraient rigoureusement égaux, si les points considérés étaient à égale hauteur.

En réalité, ces trois circonstances n'existent pas, mais, par suite des conditions particulières aux observations géodésiques, elles ne sont pas loin d'exister : on pourra donc approxi-

mativement écrire $K = A$, et la mesure de l'erreur de réfraction sera

$$r = \frac{R}{2R'} \cdot O$$

Le même raisonnement ne peut pas être appliqué à R et R', qui deviendraient également égaux, dans les mêmes hypothèses, parce qu'alors ils seraient l'un et l'autre infinis. On peut, en effet, regarder comme égales deux quantités qui tendent vers une limite très-rapprochée de leurs valeurs réelles, comme cela a lieu pour K et A, mais il n'est plus permis d'agir ainsi quand cette limite se trouve très-différente des valeurs qu'on veut assimiler, comme cela a lieu pour R et R' qui, finis, sont très-loin de la limite ∞.

Pour un même angle au centre O, r ne variera donc qu'en raison de R', rayon de courbure de la trajectoire : on sera donc en droit d'écrire $$r = n.O$$

n étant un coefficient constant pour le même état atmosphérique, mais variable avec celui-ci, heureusement dans des limites assez rapprochées.

On est naturellement porté à se demander comment il se fait que deux points situés sur la même verticale, à des hauteurs différentes, donnent lieu à la même erreur de réfraction, quand on remarque que le plus élevé, situé dans une courbe atmosphérique moins dense, envoie des rayons qui éprouveront un plus grand nombre de réfractions avant d'arriver à l'observateur. Pour lever cette objection, il suffit d'observer que le rayon parti du point le moins élevé rencontrera, il est vrai, un plus petit nombre de couches atmosphériques, mais qu'il les rencontrera sous des angles d'incidence plus grands, en sorte que, si $\frac{\sin. i}{\sin. r} = C$ représente l'indice de réfraction relatif à deux couches successives communes aux deux trajectoires, on aura

$$\frac{\sin. i}{\sin. r} = \frac{\sin. i'}{\sin. r'} = C$$

d'où

$$\frac{\sin. i - \sin. r}{\sin. i} = \frac{\sin. i' - \sin. r'}{\sin. i'}$$

$$\frac{\sin. i' - \sin. r'}{\sin. i - \sin. r} = \frac{\sin. i'}{\sin. i}$$

Si $i' > i$, il s'ensuit $\sin. i' - \sin. r' > \sin. i - \sin. r$, et quoique dans un rapport différent

$$i' - r' > i - r.$$

Les déviations produites par les couches communes aux deux trajectoires seront donc plus grandes pour le rayon lumineux parti du point le moins élevé, et elles pourront par leur intensité compenser la multiplicité de celles éprouvées par l'autre rayon.

On sera donc toujours en droit d'écrire

$$r = n.O.$$

La recherche directe du coefficient n de la réfraction est très-délicate et de peu d'importance pratique pour les opérations géodésiques. Aussi dirons-nous seulement en quelques mots qu'elle consiste à prendre la valeur théorique de l'indice de réfraction qui est égal au rapport inverse des vitesses de la lumière dans les deux milieux

$$\frac{\sin. i}{\sin. r} = \frac{\sqrt{1 + P\rho'}}{\sqrt{1 + P\rho}} \qquad (1)$$

P étant le pouvoir réfringent de l'air, sensiblement le même, que l'atmosphère soit sèche ou humide, ρ et ρ' les densités des deux milieux. On suppose alors que les couches sont infiniment rapprochées, et on exprime les densités ρ et ρ' en fonction des pressions marquées par le baromètre et des températures indiquées par le thermomètre aux stations extrêmes de la trajectoire. On est obligé pour cela d'admettre une constitution atmosphérique particulière, dans laquelle la température suit, en raison de l'élévation des couches, une loi toujours entachée d'arbitraire. La loi des variations de ρ transportée alors dans l'équation (1), traitée comme une différentielle, donne l'accroissement infiniment petit de l'inclinaison sur la normale, et, par une intégration, donne la déviation totale du rayon lumineux entre les limites de l'observation.

Le procédé suivant, beaucoup plus simple, suffit dans tous les cas.

463. En déduisant la valeur de n, coefficient de la réfraction, des observations faites avec une valeur particulière de K, elle sera la même pour les corrections à faire à toutes les distances zénithales observées dans un état analogue de l'atmosphère.

Pour atteindre ce but, remarquons, que eu égard au triangle ABO, nous avons (*fig.* 338)

$$\Delta + r = B + O. \quad \Delta' + r' = A + O$$

d'où

$$\Delta + \Delta' + r' = A + B + O + O = 200^g + O$$

Pour ne conserver que les inconnues r et r' dans un membre de l'équation, et en supposant les distances zénithales observées simultanément, auquel cas $r = r'$, nous écrirons en divisant le tout par 2

$$r = 100^{g} + \frac{0}{2} - \frac{\Delta + \Delta'}{2}$$

Telle est l'erreur causée par la réfraction dans ce cas particulier; mais, au moyen de ce que $n = \frac{r}{0}$, nous trouvons

$$n = \frac{100^{g} + \frac{0}{2} - \frac{\Delta + \Delta'}{2}}{0}$$

Si les observations ne sont pas faites au même instant, la valeur trouvée pour l'erreur de réfraction est une moyenne entre r et r' ; mais on peut s'en contenter, parce que ces quantités diffèrent peu l'une de l'autre.

Il est à remarquer que 0 doit être exprimé en secondes pour que l'expression de n soit homogène, 100^{g} et $\Delta + \Delta'$ étant eux-mêmes représentés avec la même unité : elle sera alors un nombre abstrait, puisque le numérateur et le dénominateur exprimeront des quantités de même nature. La valeur de 0 que nous devrons substituer sera donc $\frac{K}{R\,\sin.1''}$, et la formule deviendra

$$n = \frac{100^{g} - \frac{\Delta + \Delta'}{2} + \frac{K}{2R.\sin.1''}}{\frac{K}{R.\sin.1''}}.$$

ou en réduisant

$$n = \frac{\left(100^{g} - \frac{\Delta + \Delta'}{2}\right) R.\sin.1''}{K} + \frac{1}{2}$$

Appliquons la formule ci-dessus à un exemple, et supposons

$K = 28504^{m},75$ $\delta = 100^{g},2728''$ $\delta' = 99^{g},9596''$ alors $100 - \frac{\Delta + \Delta'}{2} = -1162''$

log. (—1162″) =	3.0762763—
log. R. =	6 8045305
log. sin.1″ =	4.1961199
C^{t}. log. K =	5.5450828
	9.6220095—

Ce logarithme appartient au nombre 0,4188 qui, retranché de $\frac{1}{2}$ ou 0,50, donne $n = 0,0812$ ou 0,08, et enfin $r = 0,08 \times 0$.

Telle est la valeur moyenne du coefficient de la réfraction : rarement il descend à 0,07 ou monte à 0,10.

Nous n'avons opéré ainsi que pour appliquer la formule dans toute sa généralité : car on procède d'une manière beaucoup plus simple, en se rappelant qu'une seconde centésimale sur le globe vaut 10^m, et qu'ainsi il suffit de retrancher un chiffre vers la droite dans le nombre qui représente K, pour le transformer en secondes, et par conséquent avoir O.

Ainsi, en reprenant les données précédentes, nous aurions trouvé que le numérateur de l'expression n est égal à 233″, et le dénominateur à 2850″, 47.

log. 233	= 2.3673557
Ct. log. 2850,47	= 6.5454765
	8.9125324

Ce logarithme correspond à 0,0817 ou 0,08, que nous avons également trouvé pour n par la méthode précédente.

Nous pouvons, connaissant le coefficient de la réfraction, trouver facilement l'amplitude de la trajectoire : car, ayant posé $r = \frac{1}{2}$ trajectoire, et sachant que $r = 0.08 + O$, il s'ensuit que l'amplitude de la trajectoire est égale aux 0,16 de l'angle au centre.

Si, par exemple, $O = 50'$, on aura la trajectoire égale à 8′. Tout à l'heure, nous avons supposé $K = 2850''$: dans ce cas, l'amplitude de la trajectoire est 456″.

Puis, ensuite, si l'on veut connaître le rayon de courbure de la trajectoire, on remarque qu'elle est sensiblement de même longueur que l'arc correspondant K, et qu'ainsi les rayons sont en raison inverse de l'amplitude des arcs : d'où le rayon de la trajectoire est égal à 39788785 mètres.

Puisque l'erreur causée par la réfraction est fonction de l'angle au centre ou, en d'autres termes, de K, on ne doit en tenir compte qu'autant qu'elle n'est pas très-petite par rapport à l'approximation que donne l'instrument dont on se sert. L'arc d'une seconde sur la terre ayant 10 mètres de longueur, il s'ensuit que si

$K = 100^m$,	$r = 0,08 \times 10''$	$= 0'',08$
$K = 1000$,	$r = 0,08 \times 100$	$= 0_8,0008''$
$K = 10000$,	$r = 0,08 \times 1000$	$= 0\ ,0080''$
$K = 50000$,	$r = 0,08 \times 5000$	$= 0\ ,04'$

On voit par là que cette opération est presque toujours su-

perflue dans les opérations topographiques, à moins que la distance entre les points ne soit de 10000^m environ, et que l'on n'emploie un éclymètre donnant la minute.

464. *Calcul de la différence de niveau entre deux points au moyen des distances zénithales réciproques.* Nous avons actuellement toutes les données nécessaires au calcul des différences de niveau, soit que l'on emploie deux distances zénithales, soit que l'on ne puisse faire usage que d'une seule : dans ce dernier cas, en effet, on doit tenir compte de l'erreur de réfraction. Dans le premier, il suffit de rendre réciproques les distances zénithales, en les réduisant aux sommets des signaux, et d'employer Δ et Δ', angles observés : car c'est leur différence qui, comme nous le verrons bientôt, entre dans la formule. Or, nous avons vu que $\Delta = \delta - r$ et $\Delta' = \delta' - r$, d'où il résulte $\Delta - \Delta' = \delta - \delta'$.

Soient A et B les deux points dont on veut connaître la différence de niveau BC (*fig.* 339) ou dN. Considérons le triangle ABC dans lequel AC est la corde qui sous-tend l'arc de cercle compris entre les verticales des points A et B : il fournit la proportion

$$\sin B : \sin A :: AC : BC \quad \text{de laquelle on tire} \quad dN = K\frac{\sin A}{\sin B} \quad (1)$$

Nous connaîtrons dN lorsque nous aurons déterminé A et B. D'abord, en appelant A' l'angle BAO, pour ne pas le confondre avec BAC que nous avons désigné par A, nous avons $A = A' - A''$, en représentant aussi par une lettre unique A'' l'angle CAO qui a de même son sommet en A

A' est le supplément de δ : A'' appartient au triangle isocèle CAO et est par conséquent égal à $100 - \frac{O}{2}$: nous pouvons donc écrire

$$A = 200 - \delta - \left(100 - \frac{O}{2}\right) = 100 + \frac{O}{2} - \delta.$$

Si, ensuite, nous nous reportons au triangle ABO dans lequel $A' = 200 - \delta$, $B = 200 - \delta'$, nous voyons que $A' + B + O = 200$ ou $200 - \delta + 200 - \delta + O = 200$.

En réduisant $200 + O = \delta + \delta'$ et $100 + \frac{O}{2} = \frac{\delta + \delta'}{2}$; substituons dans la valeur de A, et nous aurons pour résultat

$$A = \frac{\delta' - \delta}{2}$$

Pour trouver B remarquons, à l'aide du triangle ABO, que

$$B = 200^g - A' - O; \quad \text{mais} \quad A' = A + A'' = \frac{\delta' - \delta}{2} + 100 - \frac{O}{2}$$

donc

$$B = 200 - \frac{\delta' - \delta}{2} - 100 + \frac{O}{2} - O$$

et en réduisant

$$B = 100 - \frac{O}{2} - \frac{\delta' - \delta}{2}$$

Substituons ces valeurs de A et B dans l'équation (1), elle deviendra

$$dN = K \frac{\sin.\frac{\delta' - \delta}{2}}{\sin.\left[100 - \left(\frac{O}{2} + \frac{\delta' - \delta}{2}\right)\right]} = K \frac{\sin.\frac{\delta' - \delta}{2}}{\cos.\left(\frac{O}{2} + \frac{\delta' - \delta}{2}\right)} =$$

$$= K \frac{\sin.\frac{\delta' - \delta}{2}}{\cos.\frac{O}{2}\cos.\frac{\delta' - \delta}{2} - \sin.\frac{O}{2}\sin.\frac{\delta' - \delta}{2}}$$

ou en mettant $\cos.\frac{O}{2}\cos.\frac{\delta' - \delta}{2}$ en facteur commun

$$dN = K \frac{\sin.\left(\frac{\delta' - \delta}{2}\right)}{\cos.\frac{O}{2}\cos.\frac{\delta' - \delta}{2}\left(1 - \text{tang}.\frac{O}{2}\,\text{tang}.\frac{\delta' - \delta}{2}\right)}$$

On se débarrasse autant qu'on le peut des dénominateurs dans les formules destinées à être mises en pratique, afin d'éviter d'avoir à prendre des compléments de logarithmes. Pour faire disparaître les trois facteurs de celui de dN, nous effectuons l'opération indiquée par la division du sinus par le cosinus, ce qui donne la tangente, c'est-à-dire que nous écrivons $\text{tang}.\frac{\delta' - \delta}{2}$, nous remarquons que $\frac{1}{\cos.\frac{O}{2}} = \text{sécante}\ \frac{O}{2}$ et enfin, que nous pouvons supprimer le terme $\text{tang}.\frac{O}{2}\,\text{tang}.\frac{\delta' - \delta}{2}$ au dénominateur, comme petit du second ordre, par rapport à l'unité, ce qui donne

$$dN = K\ \text{tang}.\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)\ \text{séc}.\frac{O}{2} \ldots\ldots\ (2)$$

qu'on se contente souvent de prendre sous la forme

$$dN = K \text{ tang.} \tfrac{1}{2} (\delta' - \delta)$$

la secante de $\frac{O}{2}$ étant toujours très-proche de l'unité.

Nous avons, dans la recherche précédente, assimilé le côté géodésique K à la corde AC. En réalité, cette corde diffère de l'arc de cercle correspondant, et celui-ci diffère de K qui n'est que sa projection sur la surface des eaux de la mer : mais les erreurs qui résultent de cette assimilation sont négligeables dans tous les cas, et la formule (2) est suffisamment exacte.

465. Cette formule peut encore s'obtenir de la manière suivante : dans le triangle ABO, on a

$$\sin.A : \sin.B :: R + dN : R.$$

Les sinus de A et δ sont égaux, puisque ces angles sont suppléments l'un de l'autre : il en est de même de ceux de B et δ', par conséquent

$$\sin.\delta : \sin.\delta' :: R + dN : R$$

et

$$dN = R. \frac{\sin.\delta - \sin.\delta'}{\sin.\delta'}$$

ou encore

$$dN = R \frac{2 \sin\frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos.\frac{1}{2}(\delta + \delta')}{\sin.\delta'}$$

Nous avons trouvé

$$\frac{\delta + \delta'}{2} = 100 + \frac{O}{2} \quad \text{donc} \quad \cos. \frac{\delta + \delta'}{2} = \cos. \left(100 + \frac{O}{2}\right) = - \sin. \frac{O}{2}$$

La valeur de dN se transforme en

$$dN = \frac{-2R \sin.\frac{1}{2}(\delta - \delta') \sin. \frac{O}{2}}{\sin.\delta}$$

ou parce que $\sin.x = - \sin. (-x)$.

$$dN = 2R \frac{\sin.\frac{1}{2}(\delta' - \delta) \sin. \frac{O}{2}}{\sin \delta'}$$

et parce que $2R \sin. \frac{O}{2} = K$,

$$dN = K \frac{\sin.\frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\sin.\delta'}$$

On pourrait conserver la valeur de dN sous cette forme très-simple, et en faire usage, en négligeant même le dénominateur que l'on considérerait comme égal à l'unité : mais nous pouvons la ramener à être identiquement celle trouvée par la première

méthode. Pour cela, nous emploierons la valeur de B indiquée plus haut, $B = 100 - \left(\frac{0}{2} + \frac{\delta' - \delta}{2}\right)$ que nous déduirons également de cette considération.

$$B = \delta - 0 \qquad \text{et} \qquad B = 200 - \delta'$$

d'où, en les ajoutant

$$2B = 200 - (\delta' + \delta) - 0 \qquad \text{et} \qquad B = 100 - \left(\frac{0}{2} + \frac{\delta' - \delta}{2}\right)$$

et puisque $\sin.B = \sin.\delta'$, nous pouvons modifier le dénominateur de la valeur de dN, et écrire

$$dN = K \frac{\sin.\left(\frac{\delta' - \delta}{2}\right)}{\sin.\left[100 - \left(\frac{0}{2} + \frac{\delta' - \delta}{2}\right)\right]} =$$

$$= K \frac{\sin.\left(\frac{\delta' - \delta}{2}\right)}{\cos.\frac{0}{2}\cos.\frac{\delta' - \delta}{2}\left(1 - \text{tang.}\frac{0}{2}\,\text{tang.}\frac{\delta' - \delta}{2}\right)} = \text{etc.}$$

466. *Calcul de la différence de niveau au moyen d'une seule distance zénithale.*

Soient toujours A et B les deux points (*fig.* 339), AC la corde que nous regarderons comme égale au côté K de la projection, et δ la seule distance zénithale vraie du point B observé de A. Nous aurons comme précédemment

$$dN = K \frac{\sin.A}{\sin.B}, \qquad A = 100 + \tfrac{1}{2}0 - \delta$$

et de plus $B = \delta - 0$; par suite

$$dN = K \frac{\cos.(\delta' - \frac{1}{2}0)}{\sin.(\delta - 0)}$$

Cette formule très-simple peut encore être simplifiée, si l'on observe que $\delta - 0$ étant toujours très-près de 100^g, le sinus de $\delta - 0$ différera très-peu de celui de $\delta - \frac{1}{2}0$, ce qui permettra d'écrire

$$dN = K\cot.(\delta - \tfrac{1}{2}0) \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Le même raisonnement ne pouvait pas se faire pour transformer le numérateur, car on aurait fait subir à l'angle la même variation $\frac{1}{2}0$, il est vrai, mais cet angle entre dans la formule par son cosinus qui varie rapidement près de 100^g.

Si l'on met dans cette formule la distance zénithale observée,

il est nécessaire de la corriger de l'erreur de réfraction, en sorte que si nous continuons à nous servir du même signe δ pour la désigner, nous devrons prendre

$$dN = K \cot.(\delta + nO - \tfrac{1}{2}O) = K \cot.(\delta - 0{,}42.O)$$

en attribuant au coefficient de réfraction la valeur moyenne 0,08.

On préfère habituellement employer la première des formules que nous avons trouvées, et l'on réserve la seconde pour les points du troisième ordre auxquels la première n'est pas applicable. On la ramène alors, en sacrifiant un peu de sa rigueur, à celle qui a été trouvée au § 184, et qui est employée pour le nivellement topographique. Si on applique la formule qui donne la cotangente de la somme de deux angles au cas actuel, on aura

$$\cot.(\delta - 0{,}42.O) = \frac{\cot.\delta + \text{tang}.(0{,}42\,O)}{1 - \cot\delta\ \text{tang}\,(0{,}42.O)}$$

Le produit des deux facteurs très-petits du dénominateur est négligeable par rapport à l'unité, la tangente de l'angle 0,42. O toujours très-petit, surtout pour les points conclus, est sensiblement égale à cet angle, en sorte qu'on peut écrire

$$dN = K(\cot.\delta + 0{,}42.O) = K \cot.\delta + 0{,}42.K.O$$

et enfin

$$dN = K \,\text{cotang}.\Delta + 0{,}42.\frac{K^2}{R} \qquad (4)$$

Le rayon moyen de la terre, exprimé en mètres, a pour logarithme. 6,80556

Celui de 0,42 = $\bar{1}$,62325

Donc log. $\left(\frac{0.42}{R}\right) + 10 =$ 2,81869

Tel est le logarithme constant indiqué en tête des tableaux employés pour le calcul des cotes des points conclus de la carte de France.

467. Les distances zénithales employées à la résolution de l'équation $dN = K \cot.\frac{1}{2}(\delta' - \delta)$ doivent être réduites au sommet des signaux. L'usage des formules (3) ou (4) n'exige pas cette correction ; il suffit de retrancher, avec son signe, le dh du § 460, c'est-à-dire qu'il faut ajouter cette quantité à la cote obtenue, dans le cas où l'on observe au-dessus du point, et la retrancher dans le cas contraire.

L'avantage de la formule $dN = K \cot.\frac{1}{2}(\delta' - \delta)$ sur celle qui

est obtenue par le secours d'une seule distance zénithale est d'être indépendante du coefficient de la réfraction, dont la valeur moyenne 0,08 peut ne pas convenir au moment de l'observation. Cet avantage est néanmoins plus apparent que réel, si l'on n'a pas soin de prendre les deux distances zénithales *simultanément*, ce qui n'a presque jamais lieu : car alors ces angles ne se rapportant plus au même état atmosphérique, ne sont pas affectés d'une erreur de réfraction égale dans les deux cas. Dans les opérations très-importantes, on peut obvier en partie à cette cause d'inexactitude, en répétant les séries à différentes heures de la journée et prenant des moyennes répondant en quelque sorte à un état moyen de l'atmosphère.

Les bons nivellements géodésiques doivent être faits en employant des petits côtés. Soit, en effet, une longue base $K = K' + K'' + K'''$....... Si, stationnant seulement à une extrémité de cette base, on a obtenu une distance zénithale Δ, la différence de niveau sera $dN = K \cot.\Delta + Q K^2$, Q étant le coefficient de la correction relative à la différence du niveau vrai au niveau apparent, et à la réfraction. Si, au contraire, on a opéré sur les petites bases successives K', K'', K'''....., on a obtenu, pour la différence de niveau totale,

$$K' \cot.\Delta' + K'' \cot.\Delta'' + \ldots\ldots + Q K'^2 + Q K''^2 + \ldots\ldots$$

Mais les distances zénithales seront entachées d'erreurs telles que $\Delta = \delta + e$, $\Delta' = \delta' + e'$, $\Delta'' = \delta'' + e''$....., $\delta, \delta', \delta''$.... étant les valeurs vraies de ces angles : le résultat de l'opération exécutée sur la grande base sera, en admettant de plus une erreur q sur le coefficient Q.....,

$$K \cot.\delta - Ke + (Q + q) K^2 . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

L'opération exécutée sur les bases partielles conduirait à

$$K' \cot.\delta' + K'' \cot.\delta'' + \ldots - K'e' - K''e'' \ldots\ldots + (Q + q)(K'^2 + K''^2 + \ldots\ldots \quad (2)$$

La vraie valeur de la différence de niveau est

$$K \cot.\delta + QK^2 \quad \text{ou} \quad K' \cot.\delta + K'' \cot.\delta'' + \ldots\ldots + Q(K'^2 + K''^2 \ldots) \quad (3)$$

L'erreur commise dans le premier cas sera donc

$$(1) - (3) = Ke - qK^2 = (K' + K'' + \ldots.)\, e - (K' + K'' \ldots)^2 . q$$

Dans le second, elle sera

$$(2) - (3) = K'e' + K''e'' + \ldots\ldots - q\,(K'^2 + K''^2 + \ldots)$$

Il n'y a aucune raison pour supposer que e', e''.... soient tou-

jours de même signe : par conséquent il y aura compensation entre certains des termes $K'e'$, $K''e''$...; le cas le plus défavorable serait celui où des erreurs seraient de même signe et égales à l'erreur maximum possible ; soit e ce maximum. Dans ce cas, on n'aurait jamais que

$$(K'+K''+...)e=Ke$$

Dans tout autre cas $K'e' + K''e'' + ... < Ke$.

Il est de même évident que $(K'^2 + K''^2 + ...)q < K' + K''...)^2 q$ ou qK^2.

Comme il n'y a pas lieu de s'occuper des signes relatifs des deux termes qui composent l'erreur totale, ces signes pouvant être quelconques, il résulte de ce qui précède cette conséquence qu'il y a avantage à exécuter un nivellement géodésique en opérant sur des petits côtés successifs.

468. *Détermination du point de départ des cotes.* On peut commencer le calcul des différences de niveau en un point quelconque du réseau et le conduire jusqu'au bord de la mer, après s'être donné une cote arbitraire pour le point de départ. Si cette cote avait été bonne, on aurait trouvé o pour celle répondant au niveau des eaux moyennes. La différence devra être ajoutée ou retranchée de toutes celles qui auront été calculées précédemment.

Ou bien on peut, conduisant le réseau trigonométrique jusqu'au bord de la mer, réserver le calcul des altitudes pour le faire partir, en sens inverse, de ce dernier point.

469. *Calcul de la cote d'un point duquel on aperçoit l'horizon de la mer.* Soit A ce point (*fig.* 341) et DAZ $=\delta$ la distance zénithale : le triangle ADO fournira la proportion sin.A : sin.D :: DO : AO ; mais l'angle en D est droit, parce que le rayon visuel AD a été dirigé tangentiellement à la surface de la mer. Si donc, nous désignons AB par h, nous aurons, en remarquant que $\sin.A = \sin.\delta$, puisque $A = 200 - \delta$, $\sin.\delta : 1 :: R : R + h$,

d'où
$$h = \frac{R(1 - \sin.\delta)}{\sin.\delta}$$

Mais si $\sin.\delta = \cos.O$, on peut donc écrire

$$h = \frac{R(1 - \cos.O)}{\cos.O} = \frac{2R \sin^2 \frac{1}{2} O}{\cos.O}$$

et parce que $\sin.O = 2 \sin.\frac{1}{2}O \cos.\frac{1}{2}O$ ou $2 \sin.\frac{1}{2} O = \frac{\sin.O}{\cos.\frac{1}{2}O}$,

$$h = R \tang.\tfrac{1}{2}O \tang.O.$$

L'angle au centre O étant très-petit, on peut admettre que $\tang.\frac{1}{2}\,O = \frac{1}{2}\tang.\,O$,
d'où

$$h = \tfrac{1}{2} R \tang.^2 O$$

La distance zénithale vraie δ est égale à $\Delta + r$;
d'autre part, nous savons que $r = nO$ et que $O = \delta - 100^g$,
par suite

$$O = \Delta + r - 100 = \Delta + nO - 100^g$$

$$O(1-n) = \Delta - 100 \; ; \qquad O = \frac{\Delta - 100^g}{1-n}$$

et enfin

$$h = \tfrac{1}{2} R.\ \tang.^2\left(\frac{\Delta - 100}{1-n}\right)$$

Les résultats obtenus par ce procédé sont généralement peu exacts par suite de l'incertitude du pointé et de l'importance de la réfraction.

470. *Nivellement barométrique.* On sait qu'en plongeant dans un bain de mercure un tube fermé dans sa partie supérieure et dans lequel on a fait préalablement le vide, le métal s'y élève jusqu'à ce que son poids fasse équilibre à la pression qu'exerce l'atmosphère sur la portion de mercure qui reste dans la cuvette.

On a tiré parti de cette propriété pour trouver la hauteur au-dessus du niveau de la mer d'un point quelconque du globe.

Avant de nous occuper de la formule que l'on emploie à cet usage, nous allons dire quelques mots des baromètres les plus remarquables, ceux de Fortin et de Gay-Lussac, qui jouissent de deux propriétés essentielles : ils sont assez portatifs et très-exacts.

Le premier se compose d'un tube de verre cylindrique, bien calibré, fermé par l'une de ses extrémités, et d'une cuvette contenant du mercure. On remplit le tube de la même matière, et on le retourne de manière à ce que son ouverture plonge dans la cuvette. Le mercure, en s'abaissant dans le tube, jusqu'à ce que son poids fasse équilibre à celui de la colonne d'air qui pèse sur la cuvette, laisse vide la partie supérieure du tube. Si donc, par une cause quelconque, la pression de l'air vient à augmenter, la hauteur correspondante de la colonne de mercure ne sera altérée par aucune résistance. Il n'en serait pas ainsi, s'il s'y était introduit quelque peu d'air.

Le tube de verre est renfermé presque entièrement dans une enveloppe de cuivre qui sert à le protéger. Le long de ce tube est appliquée une échelle graduée de bas en haut, et portant à sa

partie inférieure une petite pointe d'ivoire I (*fig.* 342), dont l'extrémité indique le zéro, et à l'affleurement de laquelle on amène la surface OO′ du mercure, au moyen d'une vis V qui pousse le fond de la cuvette. On est assuré que la pointe touche cette surface en examinant sa réflexion dans le mercure. Un anneau de cuivre MM′ nommé *curseur* embrasse le baromètre : au bas est adapté un vernier devant donner au moins le dixième de la plus petite division de l'échelle, qui est ordinairement un millimètre. Enfin, un thermomètre très-sensible BB est appliqué immédiatement au tube de verre.

Tout l'appareil est suspendu par un crochet à une tête P supportée par trois pieds PC, PC′, PC′, qui sont construits de manière à ne former, étant rapprochés, qu'une très-forte canne, dans laquelle est enfermé le baromètre.

Celui de Gay-Lussac, du genre des baromètres à syphons, est formé de deux tubes de verre de même calibre, disposés dans le même axe, l'un au-dessus de l'autre, et réunis par un tube capillaire dont les deux extrémités sont recourbées de manière à présenter la forme indiquée par la figure 343, et dont le but est d'empêcher l'introduction, pendant le transport, de bulles d'air qui iraient se loger dans la partie supérieure du baromètre.

Les deux extrémités sont fermées, mais on pratique un petit trou T à $0^m,02$ ou $0^m,03$, du haut du tube inférieur. La hauteur OO de la colonne barométrique est appréciée au moyen d'une échelle mobile ou fixe. Si elle est mobile, on amène son zéro sur l'horizontale O*m* et l'on a la hauteur comptée à partir de ce point au moyen d'un vernier curseur attaché à l'échelle. Si elle est immobile, on se sert de deux verniers, d'ont l'un indique le niveau inférieur, et l'autre le niveau supérieur. La différence des deux nombres qu'ils donnent fournit la hauteur de la colonne, dans le cas où le zéro de l'échelle est au-dessous du niveau inférieur : c'est la somme dans le cas contraire.

L'appareil est encore enfermé dans une canne, pour le rendre portatif, lorsqu'on le change de station. On a soin alors de le renverser bout pour bout, avec beaucoup de précaution, afin que le choc du mercure ne brise pas le tube. Dans cette position, le mercure remplit le grand tube et le tube capillaire, et il en tombe un peu dans le fond du troisième (*fig.* 344).

Dans quelques baromètres, l'extrémité A (*fig.* 345) est ouverte, mais on peut la fermer au moyen d'un bouchon C attaché à un fil de fer, et qui, par sa pression, force le mercure à remplir l'extré-

mité vide du tube vers B. En ce point, on a pratiqué un étranglement dont le but est d'amortir la violence du choc du mercure.

Les lectures faites sur le baromètre de Fortin doivent être augmentées d'une correction due à l'effet de la capillarité, correction qui dépend du diamètre intérieur du tube. Le baromètre de Gay-Lussac n'exige pas le calcul de cette petite quantité lorsque les deux branches ont le même diamètre.

Ces instruments bien conçus, la manière de les employer est très-simple. Nous avons dit que la pression atmosphérique fait monter le mercure dans le tube : cette pression variant nécessairement avec l'élévation du point de station, la hauteur de la colonne variera également. Plus on s'élève, plus le poids de l'air diminue et plus aussi le mercure s'abaisse. C'est de la recherche de la formule qui exprime ce rapport que nous allons nous occuper.

471. Si, en deux points de la surface de la terre, assez rapprochés l'un de l'autre, deux personnes observent simultanément le thermomètre et le baromètre, il faut, de ces observations, conclure la différence de niveau entre deux points. Tel est l'énoncé du problème à résoudre.

Supposons l'atmosphère divisée en couches horizontales d'une épaisseur égale et assez petite pour que l'on puisse considérer la densité comme uniforme dans chacune d'elles. Soient C, C′, C″, C‴, etc. (*fig.* 346), des points appartenant aux surfaces de contact des couches, nous aurons $OC' = 2.OC$, $OC'' = OC' + OC = 3.OC$; $OC''' = OC'' + OC = 4.OC$, etc., et en désignant par m, m', $m_{,}$, etc., les mètres ou parties de mètres qui mesurent l'élévation de C, C′, C″, etc., au-dessus de zéro, on aura la progression arithmétique

$$\div\ o.m.m'.m''.m'''.\ \text{etc.}$$

Désignons par p le poids de l'atmosphère pour une base d'une surface quelconque ; par p' celui de l'atmosphère moins la couche inférieure ; par p'' le poids de l'atmosphère diminué des deux premières couches, etc., $p-p'$, $p-p''$, etc., représenteront évidemment les poids de la première, de la seconde, etc., couches. Appelons d, d', d'', d''', etc., les densités de ces mêmes couches. Dans un corps, le poids est égal au volume multiplié par la densité, ce que l'on exprime par $P = VD$.

Pour un autre corps, on aurait $P' = V'D'$.

Les couches atmosphériques ayant, d'après notre hypothèse, même volume, si nous leur appliquons les deux égalités ci-dessus énoncées,

Nous aurons
$$V = \frac{P}{D} = \frac{P'}{D'} = \frac{P''}{D''} = \text{etc.}$$

c'est-à-dire que les poids seront proportionnels aux densités : ainsi nous pourrons écrire
$$p - p' : p' - p'' :: d : d'.$$

Mais la loi de Mariotte dit, qu'entre des limites assez étendues du moins, les volumes des gaz, à la même température, sont en raison inverse des pressions qu'ils supportent ; les densités étant elles-mêmes inversement proportionnelles aux volumes, il s'ensuit un rapport direct entre celles-ci et les poids comprimants.

Les densités des deux premières sont d, d' ; les poids comprimants sont p' p'', donc
$$d : d' :: p' : p''$$
et à cause du rapport commun entre cette proportion et la précédente
$$p - p' : p' - p'' :: p' : p''$$
d'où $p : p' :: p' : p''$ on aurait de même $p' : p'' :: p'' : p'''$
donc $\div p : p' : p'' : p''' : p'''' : \text{etc.}$

Nous déduisons de là que, pour des élévations diverses qui croissent en progression arithmétique, les poids de l'atmosphère décroissent en progression géométrique. Ces poids sont les mêmes que ceux des colonnes de mercure correspondantes : ceux-ci sont proportionnels aux volumes des colonnes, la densité du mercure étant regardée d'abord comme constante ; mais le volume est égal au produit de la base par la hauteur : la base est toujours la même : donc, enfin, les hauteurs du mercure dans le baromètre suivent une progression géométrique décroissante.

En supposant la densité du mercure la même pour toutes les hauteurs, nous avons admis une température et une force de pesanteur constantes : cela n'est pas exact ; mais plus tard, nous apporterons les modifications nécessaires. Désignons par H, h, h', h'', etc., les hauteurs barométriques, et écrivons en regard les deux progressions
$$\div\ o.\ m.\ m'.\ m''.\ m'''.\ \text{etc.}$$
$$\div\!\div\ H : h : h' : h'' : h''' : \text{etc.}$$

Il existe entre elles une relation analogue à celle qui lie les

nombres à leurs logarithmes. Nous devons nous rappeler qu'en effet les logarithmes sont les exposants indiquant les puissances auxquelles il faut élever la base, pour obtenir la suite des nombres. Les logarithmes forment une progression par différence dont le premier terme est zéro, tandis que les nombres en forment une par quotient, ayant l'unité pour premier terme.

Transformons la seconde de nos progressions pour rendre l'analogie plus complète, et commençons par la rendre croissante, ce qui revient à diviser l'unité par tous les termes. Elle se trouve changée en celle-ci

$$\div \frac{1}{H} : \frac{1}{h} : \frac{1}{h'} : \frac{1}{h''} : \text{etc.}$$

Pour que le premier terme soit l'unité, multiplions tous ceux de la progression par H, et nous aurons

$$\div 1 : \frac{H}{h} : \frac{H}{h'} : \frac{H}{h'} : \frac{H}{h''} : \text{etc.}$$

Nous pouvons dire maintenant que

$$m = \log.\frac{H}{h} = \log.H - \log.h\,; \qquad m' = \log.\frac{H}{h'} = \log.H - \log.h';$$

$$m'' = \log.\frac{H}{h''} = \log.H - \log.h''$$

Ou, pour avoir la différence de niveau entre deux points C_n et C',

$$C^n - C' = m_n - m' = \log H - \log.h_n - \log.H + \log.h' = \log h' - \log.h^n.$$

Il est à remarquer que nous ignorons à quel système de logarithmes appartiennent ceux-ci, mais que, pour passer d'un système à un autre, il suffit de multiplier par une constante les logarithmes du premier pour avoir ceux du second.

472. Cherchons la constante par laquelle il faut multiplier les logarithmes des tables, pour qu'ils puissent être introduits dans la formule.

Généralement, on aura $x = C\,(\log.H - \log.h)$, en désignant par x la différence de niveau des deux stations, par C la constante, et par H et h les colonnes de mercure aux stations inférieure et supérieure. En appliquant cette formule à un certain cas particulier, nous allons la ramener à ne contenir d'inconnu que C qui se trouvera ainsi déterminé.

On a reconnu que le thermomètre étant à zéro, le baromètre marquant $0^m,76$, sous la latitude de 50^g, et l'air parfaitement



sec, le mercure était 10467 fois plus dense que l'air. Supposons que l'épaisseur des couches atmosphériques soit 10467 centimillimètres, et que le baromètre soit situé à la partie supérieure de celle pour laquelle il indique $0^m,76$; supposons qu'ensuite on le descende à la surface inférieure de la même couche, la différence de niveau pour ces deux stations voisines ou x sera $0^m,10467$: la colonne barométrique aura dû s'allonguer de 0,0001, et voici comment : l'augmentation de poids est la même pour l'air et le mercure, c'est-à-dire que $P_a = V_a \times D^a = P^m = V^m \times D^m$, en désignant par l'indice a ce qui se rapporte à l'air, et par m ce qui est relatif au mercure.

De là, $V^a \times D^a = V^m \times D^m$. mais $D^m = 10467\ D_a$, donc $V^a \times D^a = 10467\ V^m \times D^a$ ou $V^a = 10467\ V^m$.

Les bases des colonnes d'air et de mercure sont égales, leurs volumes sont donc proportionnels à leurs hauteurs. Ainsi, $H^a = 10467.H^m$;

et puisque $H^a = 0^m,40467$, $\quad H^m = \frac{0^m 10467}{10467} = 0,00001.$

A la station supérieure, le baromètre marquait $0^m,76$, il indiquera donc $0^m,76001$ à la station inférieure. La formule deviendra alors

$$0^m,10467 = C\ (\log 0^m,76001 - \log. 0^m,76)$$

d'où
$$C = \frac{0^m,10467}{\log. 0,76001 - \log. 0^m,76}$$

$$\begin{aligned} \log.\ 0,76001 &= 9,88081930292 \\ \log.\ 0,76000 &= 9,88081359228 \\ \text{Différence} &\quad 0,00000571064 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.\ 0,40467 &= 9,0194071 \\ \log.\ \text{de la différence} &= 4,7566817 \\ \log\ C &= 4,2627254 \qquad C = 18312 \end{aligned}$$

Le coefficient 18312 a été trouvé dans l'hypothèse d'une atmosphère parfaitement sèche. Toutes les autres circonstances restant les mêmes, si l'air devenait saturé d'humidité, sa densité relative à la même force élastique serait plus faible, ou ce qui revient au même, la densité du mercure rapportée à celle de cet air humide serait > 10467. Dans cette hypothèse de saturation à 0° de température, la valeur du coefficient serait 18360, au lieu de 18312. On prend alors la valeur moyenne 18336 répondant à un état humide moyen.

Cette même valeur du coefficient 18336 a été également trou-

vée par Ramond, comme résultat moyen d'un grand nombre d'opérations directes effectuées sur des points dont les différences de niveau avaient été déterminées par des observations géodésiques.

La formule est donc ramenée à $x = 18336$ (log.H — log.h).

Mais elle ne convient qu'à la circonstance particulière, qui nous a fait connaître la valeur du coefficient C. Il faut la généraliser maintenant, pour que l'on puisse en faire usage sous une latitude quelconque, à des températures et sous des pressions aussi quelconques.

473. *Correction relative à la température de l'air et aux vapeurs qu'il contient.*

Comme tous les fluides élastiques, l'air se dilate de $\frac{1}{266,66}$ ou 0,00375 de son volume pour chaque grade de température. Nous avons trouvé la formule dans l'hypothèse de 0^g; le volume de l'air ou sa hauteur x cherchée devra donc, pour une température n, être augmenté de 0,00375 répété autant de fois qu'il y a de grades contenus dans n, c'est-à-dire de 0,00375. n. Ainsi, la hauteur qui correspond à la différence de longueur du baromètre H — h n'est plus x, mais x (1 + 0,00375. n.). n est la température moyenne de la portion de l'atmosphère qui contient les deux stations : il est probable que la température croît ou décroît à peu près uniformément d'une station à l'autre, de sorte que $n = \frac{t+t'}{2}$; t et t' étant les températures de l'air aux deux stations, la formule devient

$$x = 18336\left(1 + 0,00375\,\frac{t+t'}{2}\right)(\log.H - \log.h).$$

Quand la température augmente, la quantité de vapeur nécessaire pour atteindre le point de la saturation va en augmentant; il en sera de même pour le degré intermédiaire que nous avons admis, degré qui a fourni le coefficient 18336 à 0°. Si la température devient $\frac{t+t'}{2}$, la densité de l'air à moitié saturé sera plus faible que celle que nous venons d'employer, puisque la proportion de vapeur, la même, par rapport à celle nécessaire pour la saturation, sera plus forte d'une manière absolue. Il y aurait donc lieu d'augmenter le coefficient 18336. *Laplace* a pensé que ce serait en tenir compte convenablement, que de changer le

chiffre 0,00375 en 0,00400, ce qui rend le facteur dans lequel il entre $1 + 0,004 \frac{t+t'}{2}$ ou $1 + 0,002\,(t+t')$ et par suite $x = 18336\,[1 + 0,002\,(t+t')]\,(\log.H - \log.h)$.

474. *Correction relative à la différence de température des deux baromètres.*

Pour pouvoir comparer les colonnes de mercure aux deux stations, nous avons dû supposer qu'elles avaient même densité ; mais il est deux causes qui tendent sans cesse à la faire varier : la différence de température du mercure aux deux stations, et la différence d'action qu'exerce sur lui la pesanteur, en raison du plus ou moins grand éloignement du centre de la terre.

Occupons-nous d'abord de la première. Pour pouvoir comparer H et h, il faut les ramener à la même température. On sait que pour 1°, le mercure se dilate de $\frac{1}{5550}$ ou, 0,0001802 de son volume. Si T et T′ représentent les températures du mercure des deux baromètres aux stations inférieure et supérieure, la différence de température sera T — T′, et pour comparer h à H, il faudra lui ajouter $0,00018\,(T - T')\,h$, en supposant, comme il arrive ordinairement, que T — T′ soit positif, c'est-à-dire qu'il fait moins chaud à la station supérieure qu'à l'inférieure : h était trop petit, $\frac{H}{h}$ était donc trop grand, ainsi que log.H — log.h et par suite x. On pourrait tout aussi bien réduire H à la température de H′ en le remplaçant par $H\,(1 - 0,00018\,(T - T'))$.

Ce serait atteindre le même but que de retrancher de H et h, 0,00018 T et 0,00018 T′, puisqu'en ramenant ainsi à zéro les volumes et les densités du mercure aux deux stations, on les aurait encore rendus comparables. En vertu de la modification que nous venons d'apporter à h, la formule est

$$x = 18336\,[1 + 0,002\,(t+t')]\,[\log.H - \log.h\,(1 + 0,00018\,(T - T'))]$$

475. *Correction relative à la différence d'action de la pesanteur sur les baromètres.*

Passons à la correction motivée par la seconde cause signalée au paragraphe précédent. On sait que l'action de la pesanteur s'exerce en raison inverse du carré des distances, c'est-à-dire par exemple, qu'à une distance double du centre de la terre, elle agit quatre fois moins. Le mercure sera donc spécifiquement plus léger dans cette proportion à la station supérieure.

Soient R le rayon de la mer (*fig.* 347), I la station inférieure.

S la station supérieure, a la hauteur IM de I au-dessus de la mer, et x la différence de niveau entre les points S et I. Les distances au centre seront $R+a$ en I et $R+a+x$ en S. On aura donc, en désignant par g et g', les actions de la pesanteur en I et S

$$g : g' :: (R+a+x)^2 : (R+a)^2 \qquad \text{d'où} \qquad g'=g\left(\frac{R+a}{R+a+x}\right)^2$$

Les volumes relatifs au même poids sont en raison inverse de g et g', car $vg=v'g'$, puisque la densité est la même ; les hauteurs du mercure sont, par suite, proportionnelles à son volume : donc l'expression primitive H doit être multipliée par

$$\left(\frac{R+a+x}{R+a}\right)^2 \quad \text{ou } h \text{ par} \quad \left(\frac{R+a}{R+a+x}\right)^2$$

La correction très-faible qu'apporte ce facteur dans la différence des colonnes de mercure a une influence assez sensible sur la valeur de x, en raison de la grande différence de densité de l'air et du mercure. On a trouvé qu'il est inutile d'effectuer le calcul chaque fois, et que la correction moyenne à introduire est $\frac{1}{381,5}$ ou plus simplement $\frac{1}{381}$ environ, c'est-à-dire qu'il suffit d'augmenter les coefficient 18336 de 48 : il devient alors 18384.

476. *Correction analogue relative à l'effet que produit la pesanteur sur l'air.*

Ce décroissement dans l'action de la pesanteur fait encore que le poids de l'air est moindre dans la région où l'on opère qu'au niveau de la mer : c'est là que le baromètre marque 0^m,76 comme nous l'avons supposé d'abord ; et c'est pour ce point aussi que la distance au centre est égale à R. La distance au centre, de la moyenne entre les deux stations, sera $R+a+\frac{x}{2}$: il faudra donc augmenter x dans le rapport des carrés des deux distances, ce qui reviendrait à le multiplier par $\left(\frac{R+a+\frac{x}{2}}{R}\right)^2$ ou

$$\frac{R^2+a^2+\frac{x^2}{4}\,2Ra+Rx+ax}{R^2}=1+\frac{2a+x}{R}+\left(\frac{a+\frac{x}{2}}{R}\right)^2$$

et plus simplement en négligeant le dernier terme qui est extrêmement petit, comme ayant R^2 pour dénominateur $1+\frac{2a+x}{R}$. Cette correction est fonction de x qui cependant est l'inconnue.

On emploie néanmoins ce facteur en donnant à x une valeur approchée. On a reconnu, au surplus, qu'il suffirait, pour tenir compte de cette correction, d'ajouter encore 9 au facteur numérique qui devient 18393.

477. *Correction relative à la variation de pesanteur en latitude.*

Nous avons dit plus haut que l'action qu'exerce la gravité sur les corps est inversement proportionnelle aux carrés de leurs distances au centre de la terre, et que par suite, leurs poids, étant fonction de la gravité, doivent être soumis à la même loi.

En appliquant ce principe à une certaine portion de l'atmosphère, il est évident que, pour qu'elle fasse équilibre à une même quantité de mercure, il faudra que son volume augmente ou diminue, et par conséquent sa hauteur, puisque la base est constante, suivant que l'observation sera faite plus près de l'équateur ou du pôle. En désignant par g' la gravité correspondant à R', rayon de la latitude moyenne 50^g, et par x' la différence de niveau que la formule ne nous donne encore que pour l'hypothèse $L = 50^g$: par g. R et x, les quantités analogues et relatives à un point quelconque du globe, le rapport de g et g' sera le carré de celui trouvé entre R et R', n° 429.

Nous aurons donc

$$\frac{g'}{g} = \frac{R^2}{R'^2} = 1 + 0{,}00323 \cos. 2L.$$

mais

$$\frac{g'}{g} = \frac{V}{V'} = \frac{x}{x'} \qquad \text{donc} \qquad x = x'(1 + 0{,}00323. \cos. 2L)$$

Le signe du second terme du nouveau facteur à introduire dans l'expression de x variera avec celui de cos. 2 L. Lorsque $L > 50$, alors $2L > 100$ et cos. 2L étant négatif, le second terme le devient aussi.

Si, au contraire, $L < 50$, on a $2L < 100$ et cosinus 2L positif; d'où il suit que le signe ne change pas.

Nous devons dire ici, qu'on néglige ce facteur, quand on opère sous des latitudes qui ne diffèrent que de quelques grades de la latitude moyenne 50.

Quoi qu'il en soit, la formule, dans toute sa généralité, est

$$x = 18336\,[1 + 0{,}002\,(t + t')]\left[1 + \frac{x}{r}\right][1 + 0{,}00323. \cos. 2L]$$
$$\times \left\{ \log. H - \log. h\,[1 + 0{,}00018\,(T - T')] + 2 \log. \left(1 + \frac{x}{R}\right) \right\}$$

L'emploi de cette formule exigerait le calcul de la valeur approchée de x au moyen d'un artifice qui consisterait à le négliger dans le second membre, où nous savons du reste qu'il a peu d'influence. Cette valeur substituée ensuite dans les termes précédemment négligés conduirait à un second résultat plus exact. Mais en vertu des approximations suffisantes que nous avons indiquées aux § 475 et 476, on se contente généralement de la formule suivante

$$x = 18393 \,[1 + 0{,}002\,(t+t')]\,[1 + 0{,}00323.\cos.2L)$$
$$\{\log.H - \log.h\,[1 + 0{,}00018\,(T - T')]\}$$

478. Cette formule peut se calculer par logarithmes; mais il existe des tables insérées dans l'*Annuaire du bureau des longitudes* et qui abrègent le calcul. Elles sont au nombre de quatre. La table première, dans laquelle on entre avec l'argument H en millimètres, donne un nombre de mètres que nous désignerons par a : on y cherche également le nombre b correspondant à h.

Avec $T - T'$ comme argument, on trouve c dans la table deuxième.

$a - b - c$ sera la hauteur approchée, si $T - T' > 0$. Ce sera $a - b + c$ quand $T - T'$ sera négatif.

Pour avoir la correction dépendant de la différence de température des couches de l'atmosphère, il faudra multiplier la millième partie de la hauteur approchée par $2\,(t + t')$. La correction sera du même signe que $t + t'$, qui est la somme des indications fournies par les thermomètres libres.

La correction due à la latitude et à la diminution de pesanteur dans le sens de la verticale, sera fournie par la table 3, à double entrée.

Le nombre qui correspond verticalement à la latitude et horizontalement à la hauteur approchée est cette correction toujours additive.

Enfin, la table 4 donne la correction qu'il faudrait faire, si la station inférieure était très-élevée au-dessus du niveau de la mer. Cette correction, qui est toujours additive, s'obtient avec l'argument H.

Pour éviter l'emploi des logarithmes ou celui des tables, on peut transformer la formule barométrique assez simplement. Pour abréger les écritures supposons que H et h représentent



les hauteurs de mercure ramenées à la même température. La formule abrégée sera

$$x = 18393\,(1 + 0{,}002\,(t + t'))\,\log.\frac{H}{h}$$

Rappelons-nous que le développement en série d'un logarithme népérien est (Livre Ier, § 76)

$$\text{Log.}\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots$$

Celui du logarithme tabulaire du même nombre sera

$$\text{Log.}\,(1+x) = M\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\right)$$

M étant le module $= \dfrac{1}{\text{Log. népérien de } 10} = 0{,}4342945\ldots\ldots$

Mettons $\dfrac{H}{h}$ **sous la forme** $1 + \dfrac{H-h}{h}$**, et nous aurons**

$$\text{Log.}\,\frac{H}{h} = \log.\left(1 + \frac{H-h}{h}\right) = M\left[\left(\frac{H-h}{h}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{H}{h} - 1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{H}{h} - 1\right)^3 - \ldots\right]$$

H et *h* diffèrent toujours assez peu l'un de l'autre ; conservons seulement les secondes puissances de $\dfrac{H}{h} - 1$ **, et nous pourrons écrire**

$$\text{Log.}\,\frac{H}{h} = M\left(\frac{H}{h} - 1\right)\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{H}{h} - 1\right)\right] = M\,\frac{\frac{H}{h} - 1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{H}{h} - 1\right)}$$

$$= 2M\,\frac{\frac{H}{h} - 1}{\frac{H}{h} + 1} = 2M\,\frac{H-h}{H+h}$$

Substituant cette expression dans la formule barométrique

$$x = 18393.\ 2M\,\frac{H-h}{H+h}\,(1 + 0{,}002\,(t + t'))$$

$$= 18393 \times 2 \times 0{,}4342945 \times \frac{H-h}{H+h}\,(1 + 0{,}002\,(t + t'))$$

$$= 15976\,\frac{H-h}{H+h}\,(1 + 0{,}002\,(t + t'))$$

ou en nombre rond

$$x = 16000\,\frac{H-h}{H+h}\,(1 + 0{,}002\,(t + t'))$$

Cette formule approximative due à M. Babinet est suffisamment exacte pour le calcul des hauteurs moindres que 1000^m, et elle peut servir à trouver des hauteurs plus grandes, d'une manière approchée.

Ainsi, des observations faites, par M. de Humbolt, au Pérou et sur le bord de l'Océan, ont fourni

$$H = 763^m,=15, \quad H = 600,93 \quad T = t = 25°,3, \quad T' = t' = 21°,3$$

La hauteur conclue de la formule complète est 2084^m,5.

Celle fournie par la formule approximative est 2079^m; il en résulte donc une erreur de 5^m,5, sur une différence de niveau de plus de 2000^m, erreur qui diminuerait rapidement pour des hauteurs moins grandes, mais qui par contre augmenterait beaucoup avec celles-ci. Ainsi une hauteur du Cbimborazo calculée des deux manières a donné les deux résultats 5868 et 5700, avec une erreur de 168^m.

479. Disons actuellement comment on opère sur le terrain et les précautions que l'on doit prendre. Les observations sont recueillies par deux observateurs placés chacun à l'une des stations. Ils ont des montres bien d'accord, et des baromètres et thermomètres qui sont comparés à l'avance et bien réglés. Ils font des opérations simultanées qu'ils répètent de quart d'heure en quart d'heure, et dont le nombre dépend de la régularité de leur marche. On note la hauteur du baromètre, sa température et celle de l'air fournies par les instruments que l'on a soin de consulter aux heures convenues.

Après dix ou douze observations, on se réunit, on s'assure que les instruments sont encore bien réglés; puis chacun prend une moyenne entre tous ses résultats. Quand un observateur doit opérer seul, il faut qu'il obtienne, par un très-grand nombre d'observations, la hauteur moyenne du baromètre et la température moyenne pour chacune de ses deux stations : après quoi, il calcule avec ces données, comme si elles résultaient d'observations simultanées.

On a trouvé que la hauteur du baromètre est 0^m,7629 au niveau de l'Océan, sous la latitude de 55^{g}555, et à la température moyenne de 12^g,8. On sait également qu'au niveau des eaux moyennes de la Seine sous le Pont-National, la hauteur moyenne du baromètre est de 0^m,76 à la température de 12^g. On peut, à l'aide de ces données, conclure la hauteur verticale au-dessus de

la mer ou de la Seine, de tel point que l'on voudra, en y faisant un grand nombre d'observations.

L'heure de midi, par un temps calme, est la plus favorable aux observations.

480. *Calcul approximatif des côtés d'un réseau de triangles au moyen du baromètre.*

L'emploi combiné d'un baromètre et d'un instrument propre à mesurer les distances zénithales fournit le moyen de calculer, d'une manière approchée, la distance entre deux stations : en effet, la formule des différences de niveau étant

$$h = \text{K. tang.} \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) \quad \text{on en tire} \quad \text{K} = h \text{ cotang.} \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)$$

On calcule h au moyen des observations barométriques, on connaît δ et δ', et l'on en conclut le côté K.

Application à la topographie. — Baromètres anéroïdes. On a songé à utiliser le baromètre pour le nivellement topographique, en adjoignant son emploi à celui de l'éclimètre, pour déterminer les côtés de stations desquelles on n'aperçoit pas de points donnés, comme cela se rencontre trop souvent, surtout dans les thalwegs un peu encaissés. La manière d'opérer est la suivante. En un lieu où l'usage de l'éclimètre est possible, on consulte également le baromètre. On le consulte encore en un second point où l'éclimètre ne peut servir ; regardant l'état atmosphérique comme resté constant entre les observations, on connaît les hauteurs barométriques nécessaires pour le calcul de la différence de niveau comprise entre les deux stations.

La longueur du baromètre à mercure et sa fragilité ont dû proscrire ce mode d'opération ; mais, depuis quelques années, on construit des baromètres dits anéroïdes, d'un transport très-facile et d'un volume égal seulement à celui d'une très-forte tabatière, qui pourront être employés avantageusement au nivellement topographique.

Baromètre Vidi. On fait le vide dans un récipient cylindrique R dont la base supérieure faite d'un métal fin et ridé est flexible (*fig.* 340). Cette base supporte une tige M qui fait corps avec un levier CL pivotant autour d'un point C fixé à l'enveloppe de l'instrument ; ce levier est également attaché à un ressort à boudin r dont la seconde extrémité est supportée par le fond de la boîte.

La pression atmosphérique exercée sur la face AB, agissant sur le bras du levier CM fera toujours équilibre à la force du ressort

agissant sur le bras Cr; la première venant à varier, il faudra que la force du ressort varie aussi, c'est-à-dire qu'il sera plus ou moins tendu, plus ou moins allongé. L'inclinaison de la ligne Cr sera donc variable, et son extrémité pourra parcourir les graduations d'un cadre L ayant son centre en C.

Baromètre Bourdon. Cet instrument n'est autre que le manomètre actuellement adapté aux machines à vapeur, modifié en vue du but qu'il doit atteindre. On fait le vide dans un conduit PFQ (*fig.* 340) à section elliptique aplatie, fixé à la boîte de l'instrument en F, et mobile à ses deux extrémités. On a remarqué que si le conduit était formé de lames métalliques très-minces, il se courbait d'autant plus que la pression atmosphérique extérieure était plus forte. (Le contraire a lieu pour les manomètres des chaudières, parce qu'alors la pression dominante agissant en présence de l'action moléculaire, a lieu à l'intérieur.) Les extrémités libres P et Q font mouvoir deux tiges p et q qui impriment à une petite roue dentée r dont le centre est fixe, un mouvement de rotation auquel participe un indicateur i qui parcourt les graduations marquées sur un cercle dont le centre est le même que celui de la roue dentée.

Il est évident, *a priori*, que ces instruments n'ont pu être gradués que par une comparaison faite avec le baromètre à mercure.

L'expérience a prouvé que, pendant un certain temps du moins, l'accord continuait à exister entre les indications des anéroïdes et celles du baromètre type. Il ne faudrait pourtant pas leur demander des mesures très-exactes; d'abord, il n'est pas certain qu'au bout d'un temps prolongé l'action des ressorts restera la même; en second lieu, les mécanismes employés exigent un certain jeu, ils font naître des frottements qui entachent d'erreur les résultats obtenus; enfin, l'effet de la température dont il est nécessaire de tenir compte pour connaître la pression atmosphérique n'a pas la régularité des dilatations du mercure.

Pour le nivellement topographique, les anéroïdes pourraient être employés avec avantage, après, toutefois, qu'on aurait étudié exactement leur marche comparée à celle du baromètre à mercure. Ainsi, pour préciser, prenons l'exemple du baromètre Vidi que possède l'École d'état-major. On a reconnu, après des essais prolongés, que si h exprime l'indication de l'instrument, représentant des hauteurs exprimées en millimètres de mercure, et t la température en degrés du thermomètre centigrade, on a approximativement

$$3\,dh = dt$$

Les nombres obtenus par le secours de l'anéroïde corrigés ainsi qu'il vient d'être dit, se sont trouvés plus faibles que ceux du baromètre à mercure d'environ $5^{mm},5$, après réduction des seconds à zéro.

Une lecture L faite à la température T répondra donc à une hauteur barométrique exprimée en millimètres et réduite à zéro du thermomètre,

$$H = L - \frac{T}{3} + 5,5$$

Revenons à l'application du nivellement barométrique approximatif à la topographie. Soient L et l les deux lectures faites aux deux stations, à des températures T et t; le facteur logarithmique qui entre dans la formule générale sera

$$\frac{H}{h} = \frac{L - \frac{T}{3} + 5,5}{l - \frac{t}{3} + 5,5}$$

ou, en rapportant les observations à la même température t au lieu de zéro,

$$\frac{H}{h} = \frac{L - \frac{T - t}{3} + 5,5}{l + 5,5}$$

Si on emploie la formule approximative de M. Babinet, le facteur correspondant sera

$$\frac{H - h}{H + h} = \frac{L - l - \frac{T - t}{3}}{L + l + 11 - \frac{T + t}{3}}$$

Cette application au nivellement topographique est maintenant essayée dans les opérations de la Carte de France. Ces essais n'ont pas encore été assez nombreux pour permettre d'apprécier, au point de vue pratique, l'importance de ce nouveau procédé.

CHAPITRE XI.

PROJECTIONS.

481. La surface sphérique de la terre n'est pas développable, et l'on ne peut reproduire exactement sur un plan les détails qui s'y rencontrent, dès qu'on s'occupe, du moins, d'une portion



un peu étendue du globe. (*Voir* livre III, chap. 1, n° 351.) Il a fallu substituer des équivalents, créer certains systèmes parmi lesquels les meilleurs sont ceux qui altèrent le moins les formes et les dimensions des objets que l'on veut représenter.

Il existe néanmoins des motifs, comme on le verra plus tard, pour les cartes marines, qui font préférer des modes de projection qui devraient être rejetés, si l'on n'avait pas d'autre but que la reproduction fidèle des lignes tracées sur le sphéroïde terrestre.

Les projections sont perspectives ou par développement. Les premières, qui ne sont guère usitées que pour les mappemondes, que pour la représentation d'un hémisphère, se subdivisent en *projections stéréographiques* et en *projections orthogonales* ou *orthographiques*. Ces dernières sont quelquefois employées pour les cartes géographiques, de grandes contrées, de vastes États.

Les projections par développement sont *coniques* ou *cylindriques:* elles servent de préférence à la construction des cartes chorographiques et topographiques.

482. Dans les *projections stéréographiques* ou *perspectives*, l'œil est supposé à une distance finie, et tous les rayons visuels dirigés sur les points du globe percent le plan du tableau en des points qui, liés entre eux, produisent la perspective de la terre.

Le point de vue peut être placé sur le globe même, en dehors ou en dedans : le plan du tableau passe par le centre de la sphère, et est perpendiculaire au rayon sur lequel se trouve le point de vue. On ne peut reproduire que la moitié de la sphère qui est située en arrière du plan du tableau, excepté cependant dans la circonstance où le point de vue serait en dehors ; auquel cas il serait possible, si on le voulait, de projeter l'hémisphère antérieur en prolongeant les rayons visuels, jusqu'au plan de projection ; mais ce dernier mode serait très-défectueux, en raison de la grande divergence des rayons visuels.

On ne projette pas par cette méthode tous les points de l'hémisphère, mais seulement les méridiens et les parallèles, de sorte que les quadrilatères sphériques qu'ils forment sur la terre sont représentés par des quadrilatères curvilignes ou mixtilignes : puis ensuite, pour tracer les contours des continents et tous autres détails, on les rapporte par coordonnées aux côtés des quadrilatères qui les renferment.

S'il s'agissait de présenter une très-petite partie de la sphère,

on pourrait employer la projection centrale, c'est-à-dire supposer le point de vue au centre et projeter sur le plan tangent au point milieu du terrain à représenter; tous les grands cercles seraient projetés suivant des droites, et les petits cercles par des portions d'ellipses, puis pour éviter le tracé de ces dernières, on pourrait supposer la sphère divisée par des méridiens et des grands cercles qui leur seraient perpendiculaires, au lieu de prendre comme habituellement des méridiens et des plans parallèles à l'équateur. Dans un seul cas, les parallèles se projetaient suivant des cercles : c'est celui où le plan de projection serait tangent au pôle.

Parmi les positions diverses que l'on peut attribuer au point de vue, on est dans l'usage de le placer sur la sphère, soit à l'un des pôles, et le plan projetant est l'équateur, soit sur l'équateur, et l'on projette sur un méridien, soit enfin en un point quelconque, et dans ce cas, la projection se fait sur l'horizon rationnel.

On dit que la projection stéréographique est *équatoriale*, *méridienne* ou *horizontale*, suivant que l'on emploie la première, la seconde ou la dernière de ces méthodes.

483. *La projection orthographique* ou *orthogonale* ne diffère de la précédente qu'en ce que le point de vue est supposé à une distance infinie de la sphère, toujours sur le prolongement du rayon normal au plan du grand cercle sur lequel a lieu la projection. Ici, c'est l'hémisphère antérieur que l'on projette, et il en résulte que la figure projetée est droite par rapport à la nature et non symétrique comme dans la projection stéréographique.

Comme pour celle-ci, on projette sur l'équateur, sur un méridien, ou sur l'horizon du lieu que l'on veut placer au centre de la carte.

484. *Projection stéréographique sur l'équateur.* Elle est la plus simple de toutes à construire, puisque les méridiens sont projetés suivant des droites, et les parallèles par des cercles (*fig.* 348). L'œil est situé au pôle P, l'équateur est figuré par EQ, et les parallèles par AB, DF, GH, etc. Pour avoir les rayons des projections de ces derniers, on mène les rayons visuels PA, PD, etc., qui percent l'équateur en a, d, etc. : Ca, Cd, etc., sont les rayons qui servent à tracer les projections des parallèles correspondants.

Cette projection a l'inconvénient d'altérer inégalement les formes et conséquemment les surfaces des objets qui y sont retracés, et d'autant plus que l'on approche davantage du centre de la carte : c'est ce dont on peut facilement se rendre compte à la simple inspection de la figure.

Ici, comme dans les figures suivantes, nous séparons les projections horizontales et verticales, ainsi que les rabattements lorsqu'il y a lieu d'en faire : notre but est de mieux faire voir les opérations diverses ; mais avec un peu d'habitude, le tout s'exécute sur le même cercle, parce que les projections et rabattements des grands cercles de la sphère donnent toujours la même figure.

485. Si l'on avait à tracer la projection d'un grand cercle incliné d'une manière quelconque sur le tableau, tel qu'un horizon ou l'écliptique, la projection serait toujours un cercle (n° 486), ayant deux points communs à l'équateur et, de plus, son rayon serait égal à la sécante de l'inclinaison sur l'équateur. Pour le démontrer, imaginons la sphère coupée par un plan PEP'Q (*fig.* 348 *bis*) perpendiculaire à l'intersection projetée en C, de l'équateur et du cercle à projeter HO. Le diamètre de sa projection est $ho = hC + Co$.

Si de P comme centre, et avec PC pour rayon, nous décrivons les deux arcs consécutifs C*h* et C*k*, nous voyons que les lignes C*h* et C*o*, sont les tangentes des angles HPP', P PO, qui ont pour mesure d'ailleurs $\frac{1}{2}$ HP' et $\frac{1}{2}$ P'O.

Donc,

$$ho = hC + Co = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\,HP' + \text{tang.}\tfrac{1}{2}\,P'O :$$

mais

$$P'O = 200^g - PO = 200^g - HP' \quad \text{et} \quad \text{tang.}\tfrac{1}{2}\,P'O = \text{cotang.}\tfrac{1}{2}\,HP'$$

d'où

$$ho = \text{tang.}\frac{HP'}{2} + \text{cotang.}\frac{HP'}{2}$$

or, on sait, § 22, que

$$\text{tang.}x + \text{cotang}\,x = \frac{\sin x}{\text{cosin.}x} + \frac{\text{cosin.}x}{\text{sin.}x} = \frac{\overline{\text{sin.}x}^2 + \overline{\text{cosin.}x}^2}{\sin x\ \text{cosin.}x} = \frac{2}{\text{sin.}2x} = 2\ \text{coséc.}\,2x$$

Nous pouvons donc écrire $ho = 2\ \text{coséc.}\ HP'$.

et parce que HP' est le complément de HE ou l'inclinaison du plan sur l'équateur, $ho = 2$ *Séc. de l'inclinaison*, et enfin, *le rayon* $= \frac{ho}{2} =$ *Séc. de l'inclinaison.*

C'est par cette méthode que nous avons tracé sur la figure 348 (projection horizontale) l'horizon de Paris. On pouvait, au surplus, le déterminer sans cela, puisqu'on en connaissait trois points, savoir : les extrémités x et y du diamètre commun à l'équateur, et le point z dont la latitude est le complément de celle de Paris.

486. *Projection stéréographique sur un méridien.* L'avantage que l'on trouve dans cette projection à mettre le point de vue précisément sur l'équateur tient à cette propriété remarquable que tous les méridiens et les parallèles se projettent suivant des cercles toujours plus faciles à construire que les projections elliptiques que fournirait la position de l'œil en dehors ou au dedans de la sphère.

Il faut, avant de passer outre, démontrer la propriété que nous venons de mentionner.

Les méridiens et les parallèles sont les bases circulaires de cônes obliques, coupés par le méridien principal, et dont le point de vue est le sommet commun. Soit SAB (*fig.* 350) une section faite dans un cône oblique, suivant les deux génératrices qui sont le plus et le moins inclinées sur la base, ou, en d'autres termes, par un plan passant par l'axe et perpendiculaire à la base : prenons sur SB prolongé un point A', tel que SA' = SA : puis par A', faisons passer un plan incliné sur la génératrice SB, de la même manière que la base AB l'est sur SA ; nous déterminerons ainsi une section dite *anti-parallèle*, qui coupera le cône suivant un cercle égal à celui qui est projeté dans la figure sur AB : et, en effet, la section A'B' opérée par un plan qui rencontre toutes les génératrices ne peut être généralement qu'une ellipse dont le cercle est une circonstance particulière. Le grand axe de cette ellipse est la droite A'B elle-même. Si l'on fait tourner son plan autour de la corde commune, projetée en D, jusqu'à ce qu'il s'applique sur la base du cône, le grand axe A B' coïncidera avec le diamètre AB du cercle. Les deux courbes ont d'ailleurs une corde commune ; donc la section figurée par A'B' n'est autre chose qu'un cercle égal à la base. Ajoutons à cela que les sections par des plans parallèles étant des courbes semblables, tout plan MN parallèle à A'B', c'est-à-dire anti-parallèle à la base, donnera une figure semblable à celle qu'a produite le plan A'B', et par conséquent un cercle.

Cela posé, rien de plus simple que de faire voir que dans la

projection méridienne, les méridiens se projettent suivant des cercles. Soit VMAN (*fig.* 351) le plan de l'équateur, V le point de vue, MN la trace du plan du tableau, et RS celle d'un autre méridien dont la moitié RC seulement doit figurer sur la projection. Imaginons le cône dont ce dernier cercle est la base et qui a son sommet en V : ce cône RVS est coupé par le plan de projection suivant FQ ; mais il est facile de voir que le plan FQ est anti-parallèle à la base RS : l'un et l'autre sont perpendiculaires au plan de l'équateur; puis on voit que l'angle MQV a pour mesure $\frac{MV-NS}{2}$, tandis que $VRS=\frac{VS}{2}$: or $MV-NS=VS$, puisque si, au moyen de la parallèle ST, on supprime de MV, l'arc MT qui est égal à NS, il reste $VT=VS$.

Tous les cercles qui projettent les méridiens ont deux points communs situés dans le plan de projection; ce sont les deux pôles de la terre : ils seront donc complétement déterminés, si l'on peut obtenir leurs centres. Ceux-ci doivent être sur l'intersection du plan de projection et de l'équateur, puisque ce dernier coupe symétriquement tous les cônes comme contenant tous leurs axes. De même qu'au § 485, nous allons chercher la longueur du rayon en fonction de l'inclinaison sur le plan du tableau, c'est-à-dire en fonction de la longitude.

Soient ADBV la projection de l'équateur (*fig.* 352 *bis*) et V celle du point de vue : AB la trace du méridien principal, sur lequel se fait la projection et MN celle d'un autre méridien quelconque. Le diamètre de la projection de ce dernier est mn ; mais

$$mn=mC+Cn=\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,MD+\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,DN=\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,MD+\text{cot.}\tfrac{1}{2}\,MD$$

et, en vertu du § 22, $mn=2\ \text{coséc. } MD.$

Or $MD=100^{g}-AM=100-\text{longitude},$

donc $mn=2\ \text{séc. longitude}$ et $\text{le rayon}=\text{séc. longitude.}$

Si donc K (*fig.* 352) est le centre de la projection du méridien le plus voisin du principal, PK sera, d'après ce que nous venons de voir, le rayon égal à la sécante de l'inclinaison des deux plans méridiens; mais CK est aussi la sécante de l'angle CPK : donc cet angle est égal à la longitude. Concluons de ce fait, que, pour avoir graphiquement les centres des méridiens projetés, il faut prendre les points d'intersection de la trace de l'équateur avec des droites passant toutes par P et faisant entre elles et avec CP,

rayon du méridien principal, des angles égaux à la différence en longitude adoptée. On déduit encore de là que les tangentes pour le point commun P sont respectivement perpendiculaires aux rayons, et, par suite, que les arcs de cercles correspondants sont inclinés entre eux comme les méridiens de la sphère.

Quelques-uns des cercles ne peuvent être tracés par cette méthode parce que les centres s'éloignent trop rapidement de la figure que l'on veut construire : mais alors le point F (*fig.* 350), appartenant à la projection du méridien RS et situé sur l'équateur, se joint aux pôles par deux lignes qui font entre elles précisément l'angle dont est capable le segment que l'on veut tracer : on ouvre sous cet angle une fausse équerre dont, en appuyant les deux côtés sur les deux pôles, le sommet appartient toujours à l'arc de cercle qu'il s'agit de décrire et le détermine ainsi complétement.

Les projections des parallèles sont aussi des cercles que l'on construit d'une manière analogue aux méridiens.

Soit V (*fig.* 353) le point de vue, VQ l'équateur, et VPQP' le méridien qui passe par le point de vue : PCP' est la trace du plan de projection et DE celle d'un parallèle quelconque. Le cône projetant ce parallèle rencontre le plan du tableau suivant une courbe limitée entre elle L et B; de plus, cette courbe est un cercle, si le plan projetant est anti-parallèle à la base DE ; mais cette circonstance a lieu en effet, puisque $PBE = \frac{PE + P'V}{2}$, $DVQ = \frac{PD + PQ}{2}$, $PE = PD$, $P'V = PQ$ et $LDE = LVQ$ comme correspondants. Les deux génératrices VL, VE du cône percent le plan du tableau en deux points B, L (*fig.* 353), ou B', L' (*fig.* 354) : de plus les points A' et A'' de cette figure, projetés en A dans la figure précédente, appartiennent également au cercle; donc avec ces quatre points, on peut le construire, soit en prenant le milieu O de B'L', si cette distance n'est pas trop considérable, soit en élevant des perpendiculaires sur le milieu des cordes A'B, A''B', soit encore, comme plus haut, en formant avec les deux branches d'une fausse équerre un angle égal à A'B'A''.

Si l'on veut, comme pour les méridiens, trouver l'expression des rayons des parallèles projetés, il faut chercher la valeur de *sr* (*fig.* 353 *bis*). En décrivant, avec VC pour rayon, un arc CK, on voit que

$$sr = Cr - Cs = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\,DR - \text{tang.}\tfrac{1}{2}\,DS = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\,DR - \text{tang.}\tfrac{1}{2}\,VR :$$

mais $\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,DR = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\,(200 - VR) = \text{cot.}\tfrac{1}{2}\,VR$;

donc le rayon cherché ou

$$\tfrac{1}{2}\,sr = \tfrac{1}{2}\,(\text{cot.}\tfrac{1}{2}\,VR - \text{tang.}\tfrac{1}{2}\,VR) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\text{cos.}}{\text{sin.}} - \frac{\text{sin.}}{\text{cos.}}\right) =$$

$$\left(\frac{\text{cos.}^2\tfrac{1}{2}\,VR - \text{sin.}^2\tfrac{1}{2}\,VR}{2.\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,VR\ \text{cos.}\tfrac{1}{2}\,VR}\right) = \frac{\text{cos.}VR}{\text{sin.}VR} = \text{cotang.}VR,$$

ou cot. latitude du parallèle.

Dans cette projection, il y a encore disproportion entre la forme et la surface des différentes parties de la figure, comme dans celle sur l'équateur; c'est vers le centre que se trouve ici la plus grande altération, tandis qu'elle est d'autant moindre qu'on approche davantage de la circonférence. Elle a encore un inconvénient de plus: c'est que les lieux situés sous la même latitude et compris dans la même zône ne sont pas comparables puisque les projections des parallèles ne sont pas concentriques.

La figure 355 représente une projection méridienne complète.

487. *Projections stéréographiques méridienne et équatoriale modifiées.*

Pour éviter le premier des deux inconvénients que l'on vient de signaler, on peut diviser en parties égales la trace de l'équateur, faire passer des arcs de cercle par ces points de division et les pôles, et l'on obtient, par ce moyen, beaucoup moins de dissemblance entre les subdivisions centrales et extrêmes (*fig.* 356).

On pourrait, par le même motif, modifier d'une manière analogue la projection équatoriale, en substituant aux traces des cônes qui projettent les parallèles, des cercles équidistants, qui rendraient les distances en latitude comparables de l'équateur au pôle (*fig.* 349).

488. *Projection stéréographique sur l'horizon.*

Soit O (*fig.* 357) la projection de l'œil, AMBN celle de l'horizon, P et Q celles des pôles: il s'agit, comme précédemment, de trouver les projections des méridiens et des parallèles, et pour nous occuper d'abord des premiers, cherchons leurs perspectives sur le plan de l'horizon. Pour cela, imaginons le méridien principal AB rabattu sur le plan du tableau, en le faisant tourner autour du diamètre AB, et nous aurons la figure 358, dans laquelle A'B' représente le diamètre AB, O' le sommet des cônes perspec-

tifs, P' et Q' les deux pôles. Les génératrices O'P' et OQ' vont percer le plan du tableau figuré ici par A'B', et son prolongement en deux points p' et q', qui, reportés en p et q sur la figure 357, donnent ceux par lesquels doivent passer toutes les perspectives des méridiens : la ligne pq est donc une corde commune à toutes ces courbes, qui sont des cercles, comme nous allons le démontrer, et la perpendiculaire RS élevée sur le milieu de pq, est évidemment le lieu géométrique de tous leurs centres. Pour les trouver, nous tracerons les tangentes pD, pE aux méridiens perspectifs pour le point commun p (*fig.* 357), et nous élèverons les perpendiculaires respectives pD', pE', qui rencontreront RS en des points D', E', centres des cercles correspondants.

489. Démontrons qu'ici, comme dans la projection sur un méridien, les courbes perspectives des méridiens sont des cercles. Si ensuite nous connaissions les angles qu'elles font entre elles, nous mènerions leurs tangentes pD, pE, par le pôle qui leur est un point commun; ces tangentes ont aussi la même inclinaison, les unes par rapport aux autres, et il en est de même des normales pD', pE', qui ne sont autre chose que les rayons des cercles, et qui, par leurs rencontres avec la droite RS, détermineront tous les centres D', E', etc. Réciproquement, D, E, etc., sont les centres des cercles ayant pour tangentes pD', pE', etc.

La figure 351 représentant le rabattement d'un grand cercle passant par le point de vue V, perpendiculairement à l'intersection C de l'horizon MN et de l'équateur RS, nous pouvons comparer les deux triangles VRS, VFQ : ils sont semblables et les angles en R et en Q sont égaux; car R a pour mesure la moitié de l'arc VS, tandis que la mesure de Q est $\frac{1}{2}$ MV — $\frac{1}{2}$ NS ou $\frac{1}{2}$ MV — $\frac{1}{2}$ MT $=$ $\frac{1}{2}$ VT, et que VT $=$ VS.

Les sections du cône par les plans RS et FQ sont donc antiparallèles (§ 486); l'une RS est un cercle, donc l'autre en est également un.

490. Si l'on voulait construire une telle projection perspective à une grande échelle, il pourrait se faire que cette opération devînt impossible, en raison de la grande distance à laquelle seraient situés certains centres. Pour parer à cet inconvénient, il faudrait trouver un troisième point de chacun des méridiens perspectifs, puisqu'en ayant déjà deux communs, les pôles p et

35.

q, on ferait passer un cercle par les trois points de chaque projection.

Imaginons, par le point de vue, un plan perpendiculaire à celui du tableau : il coupera tous les cônes suivant deux génératrices. En construisant les points où elles percent le plan du tableau, nous aurons des points appartenant aux sections des cônes par le plan du tableau : c'est-à-dire les points qui doivent permettre de construire les méridiens perspectifs sans le secours de leurs centres.

Rabattons le plan de construction que nous venons d'imaginer, sur celui du tableau, en faisant tourner le premier autour de l'intersection commune MN (*fig.* 357), et nous avons ce qu'indique la figure 359. M N′ est la trace du plan du tableau, et O″ la nouvelle projection du point de vue.

Les méridiens sont coupés par ce plan, suivant des droites CF, CG, CH, qui toutes passent par le centre de la sphère.

Unissant leurs extrémités F, G, H avec O′, nous avons une génératrice de chacun des cônes correspondants. Ces génératrices rencontrent le tableau en T,U,V, etc. ; et si, maintenant, on suppose redressé le plan de construction, pour en revenir à la figure 357, où il est représenté par la droite MN, les points T, U, V, prendront les positions T′, U′, V′, et l'on aura atteint le but que l'on se proposait.

491. Il reste à savoir quelle est l'inclinaison respective des traces des méridiens sur le plan du tableau oblique à leur intersection commune. Représentons par ACB, le plan du tableau (*fig.* 360), par C le centre de la terre, et par P le pôle : l'angle que fait CP avec le plan ACB est évidemment égal à la latitude L du point de vue. Les lignes PA et PB étant des tangentes à deux méridiens, sont inclinées l'une sur l'autre d'une quantité M qui est la différence en longitude des deux méridiens en question. Prolongées jusqu'en A et B, où elles percent le plan du tableau, si l'on unit ces points au centre C, on forme un angle ACB que nous désignons par M′, et qui est l'inclinaison correspondant à M, des traces des plans méridiens sur celui du tableau. Le plan CPA est celui du méridien principal, perpendiculaire à l'intersection de l'équateur et de l'horizon.

Cherchons la relation qui existe entre M et M′.

Le triangle ABP, rectangle en A, donne $\tan g. M = \frac{AB}{AP}$.

On trouve aussi dans APC, rectangle en P, $\sin.L = \frac{AP}{AC}$

donc $$\text{tang.}M \times \sin.L = \frac{AB}{AC}$$

Mais, dans le troisième triangle ACB, rectangle en A, on a

$$\text{tang.}M' = \frac{AB}{AC}; \qquad \text{donc enfin} \qquad \text{tang.}M' = \text{tang.}M \times \sin.L.$$

C'est-à-dire, qu'en multipliant les tangentes trigonométriques des angles que forment tous les méridiens avec l'un d'eux pris comme origine par le sinus de la latitude, on trouve les tangentes trigonométriques des angles, et, par suite, les angles eux-mêmes, qu'il faut former autour de P (*fig.* 357), pour avoir la position convenable des tangentes aux arcs de cercle et, par suite, les rayons pD, pE, pD', pE', etc.

Si l'on voulait seulement avoir un troisième point pour chacun des méridiens projetés, celui qui est compris dans le cercle rabattu (*fig.* 359), il faudrait figurer les traces CF, CG, CH, etc., des méridiens, en remarquant que, puisqu'il est perpendiculaire à l'horizon, c'est par le cosinus de la latitude, et non par son sinus, qu'il faut multiplier la longitude. Les extrémités F,G,H, etc., des traces unies au point de vue O'', donnent V,U,T, où les génératrices correspondantes percent le plan du tableau.

492. Il faut actuellement s'occuper des parallèles, et démontrer d'abord que leurs perspectives sur le plan du tableau sont des cercles.

V représente le point de vue (*fig.* 361) : ADEF est une section de la sphère passant par le point de vue, et perpendiculaire au tableau, qui alors est représenté ici par la droite DF.

Si AB indique la trace d'un parallèle quelconque dont AB se trouve être un diamètre, le cône auquel il sert de base, et dont la section est AVB, sera coupé par le plan du tableau suivant une courbe projetée en ab, et que nous allons démontrer être un cercle tout aussi bien que la base du cône. Il nous suffit, pour cela, de faire voir que les plans du tableau et de la base du cône sont anti-parallèles. En effet,

$$Vba = \frac{VF + DB}{2} = \frac{VF + DE + EB}{2} = \tfrac{1}{4}\text{ cir.} + \frac{BE}{2}$$

de même

$$VAB = \frac{VDE + BE}{2} = \tfrac{1}{4}\text{ cirr.} + \frac{BE}{2}$$

Donc, $Vba = VAB$; donc, ce que nous avons avancé se trouve démontré.

493. Pour tracer les cercles perspectifs des parallèles, il suffit d'opérer pour chacun d'eux comme nous venons de faire pour AB : car, pour celui-ci, les points a et b sont les extrémités d'un de ses diamètres.

Cette construction est indiquée sur les figures 357 et 358.

Lorsque les parallèles approchent du point de vue, il devient impossible d'obtenir graphiquement le point où l'une des deux génératrices extrêmes du cône projetant perce le plan du tableau. C'est ce qui a lieu pour les portions ab et de, situées dans l'hémisphère où se trouve le point de vue O' (*fig.* 358) : on n'a donc que le point c pour l'un, et f pour l'autre, qui sont reportés sur la figure 357 par des parallèles à OO', en c' et f'. Pour compléter la détermination des projections de ces parallèles, on remarque qu'elles ont deux points représentés (*fig.* 358) par b pour l'une, et e pour l'autre : que ces points appartenant également à la sphère seront connus de position. Si, par b et e, on trace perpendiculairement à l'axe de rotation deux droites qui viennent couper la sphère (*fig.* 357) en g, h, k, l, on obtient trois points pour chacun des deux cercles, de manière qu'en les unissant par des cordes sur le milieu desquelles on élève des perpendiculaires, les centres qui d'ailleurs, et c'est une garantie de bonne exécution, doivent se trouver sur AB prolongés, sont connus, et le problème est entièrement résolu.

Comme les précédentes projections, celle-ci a l'inconvénient de ne pas offrir un rapport constant dans toutes ses parties.

494. *Projections orthographiques.* Quoique ces projections soient plus imparfaites encore que les précédentes, il convient d'en parler ici, parce qu'elles ont été quelquefois, quoique rarement, employées. Au surplus, si l'on ne voulait pas s'en servir pour la reproduction d'un hémisphère entier, mais seulement pour une petite portion de sphère dont le plan de tangence serait perpendiculaire à la direction des lignes projetantes, elle serait très-bonne et préférable à la projection stéréographique : et en effet, dans ce petit espace, le plan tangent s'écartant à peine de la surface courbe, les figures projetées et leurs projections seraient égales.

On a vu, n° 484, que le point de vue était supposé à une distance infinie sur la normale au centre du tableau. Celui-ci peut

comme pour la projection stéréographique, être l'équateur, ou un méridien ou l'horizon.

495. *Projection orthogonale sur l'équateur.* Le point de vue étant placé sur le prolongement de la ligne des pôles, c'est-à-dire sur l'intersection commune à tous les méridiens, leurs traces passeront par la projection du point de vue qui n'est autre chose que le centre du tableau : elles feront aussi entre elles des angles égaux, évidemment, à l'inclinaison des méridiens les uns sur les autres.

Les parallèles, bases de cylindres droits, seront coupés par l'équateur suivant des cercles concentriques égaux aux parallèles qu'ils représentent (*fig.* 362).

Les rayons de ces parallèles sont, comme on le reconnaît à la simple inspection de la figure, égaux aux cosinus des latitudes correspondant à chacun d'eux. Nous pouvons ajouter ici, en passant, que des arcs de même amplitude étant proportionnels à leurs rayons de courbure, le rapport d'un degré en longitude mesuré sur l'équateur et sur un parallèle est le même que celui du rayon de la sphère au cosinus de la latitude ; et, si l'on considère ce rayon comme l'unité, le rapport est égal au cosinus de la latitude.

496. *Projection orthographique sur un méridien.* Ici, le point de vue est situé dans le plan de l'équateur. Les méridiens sont les bases circulaires de cylindres obliques, et leurs sections par le tableau perpendiculaires aux génératrices, sont des ellipses. Toutes passent par les deux pôles : car ces deux points sont communs aux méridiens et à leurs projections. Cette ligne est, pour chacun des méridiens, le seul diamètre projeté en véritable grandeur : c'est le grand axe commun à toutes les projections elliptiques. Les petits axes, perpendiculaires aux grands, seront tous sur la trace du plan abaissé du point de vue perpendiculairement aux méridiens, c'est-à-dire sur la trace de l'équateur : et, comme on ne s'occupe que d'un seul hémisphère, celui qui est en avant du tableau, il suffit de trouver les extrémités antérieures des petits axes. Soit AC la trace sur l'équateur (*fig.* 363) de la moitié d'un méridien : elle se projettera en A',C', qui sera la moitié cherchée du petit axe. En projetant de même les extrémités des autres méridiens analogues à A, on sera à même de construire toutes les ellipses, d'une manière continue. Il faut pour cela connaître les deux foyers ; mais, comme on sait que la

somme des deux rayons vecteurs est une quantité constante égale au grand axe, il suffira de prendre un fil de cette longueur, de fixer son milieu sur le sommet du petit axe, et de tendre ses deux parties jusqu'à ce que les extrémités s'appuient exactement sur le grand axe. Les deux foyers seront ainsi déterminés, et rien ne s'opposera plus au tracé continu de l'ellipse.

Quant aux parallèles qui sont les sections de la sphère par des plans parallèles à l'équateur, ils se projettent suivant des droites (*fig.* 363). On peut remarquer que les projections sur l'équateur et sur un méridien sont exactement ce qu'en géométrie descriptive on nommerait les projections horizontale et verticale de la sphère.

497. *Projection orthographique sur l'horizon.*

VAP'BP représente une section suivant le méridien d'un point V, AB (*fig.* 364) la trace de l'horizon de ce point, et PP' la *ligne* des pôles : on se propose de trouver les projections des méridiens sur l'horizon. Toutes passent par les projections p, p', des pôles (*fig.* 365), et sont des ellipses comme intersections de cylindres plus ou moins inclinés et à bases circulaires. L'horizon étant un grand cercle de la sphère, coupe les méridiens suivant des diamètres qui sont les grands axes des ellipses.

Nous avons trouvé, n° 491, en parlant de la projection stéréographique sur l'horizon, la relation qui existe entre l'inclinaison des traces sur l'équateur et sur l'horizon : elle est, en les désignant par M et M', fournie par l'équation $\text{tang.M}' = \text{tang.M} \sin.\text{L}$. Nous pourrons donc nous en servir ici, et prendre, si nous voulons, pour premier méridien, celui qui passe par le point V, et qui de tous est le seul qui se projette suivant une droite A'B' (*fig.* 365). L'ellipse se réduit ici à une droite, parce que le cylindre, qui a pour base ce premier méridien, se réduit lui-même au plan qui le contient. Il n'est, au reste, pas indispensable de partir de ce méridien plutôt que de tout autre. Toujours est-il que l'on sait projeter les grands axes de toutes les ellipses : quant aux petits axes, ils leur seront respectivement perpendiculaires, mais ils varieront de longueur, en raison de l'inclinaison des plans méridiens sur celui de l'horizon. Ils seront d'ailleurs les projections des diamètres perpendiculaires à ceux qui se confondent avec leurs projections comme situés dans le plan du tableau, qui, par ce motif, sont les grands axes des ellipses, et dont nous venons de parler un peu plus haut.

Pour obtenir l'un de ces petits axes, supposons que GH (*fig.* 365) soit la trace d'un méridien quelconque : il n'est pas difficile de trouver l'inclinaison de ce plan sur l'horizon, puisque nous connaissons aussi sa trace verticale PP', qui est celle de tous les méridiens.

Imaginons, pour cela, par un point de la trace verticale, P par exemple, un plan vertical perpendiculaire au méridien dont la trace horizontale est GH : les traces de ce plan seront PE, *p*K, côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, dans lequel l'angle aigu en K mesurera l'inclinaison, sur l'horizon, du méridien dont nous nous occupons. Pour construire ce triangle, nous rapportons PE en *p*N, par le simple procédé qu'enseigne la géométrie descriptive : nous traçons l'hypothénuse NK, et *p*KN est l'angle cherché. Par le centre C de la sphère, faisons passer CL parallèle à KN; projetons le point L en M sur CM perpendiculaire à GH grand axe de l'ellipse, et CM en sera le petit axe. Nous ne répéterons pas ici ce que nous avons dit au n° 496, sur la manière de tracer une ellipse dont on connaît les deux axes : nous rappelons seulement que toutes doivent passer par les points *p* et *p'*, si on les décrit entières, ou, tout au moins, que les demi-ellipses apparentes dans cette projection se coupent au point *p*.

498. Il reste, pour compléter cette projection, à déterminer les parallèles qui sont aussi des ellipses, résultant de la section de cylindres obliques à bases circulaires par des plans. Soit EP'QP (*fig.* 366) la section de la sphère par le plan méridien perpendiculaire à l'horizon dont la trace est BH : AB celle d'un parallèle dont le diamètre au plan du tableau s'y projette en véritable grandeur, tandis qu'ici, il n'apparaît que par sa trace F : il faut donc abaisser de F une perpendiculaire sur HB, la prolonger jusqu'au rabattement *chc'b*, et porter *ff'* égal à AB. C'est le grand axe de l'ellipse suivant laquelle se projette le parallèle AB. Pour déterminer le petit axe, il suffit de projeter les points A et B en *a* et *b*.

Nous avons, dans cette figure, représenté l'équateur EQ, le parallèle VD passant par le pôle de l'horizon, et celui AB qui est tangent à cet horizon. La figure 367 représente une telle projection complète.

499. Il est facile de reconnaître, à l'inspection des figures, que les projections stéréographique et orthographique ont des défauts contraires. Tandis que la première augmente considérable-

ment les parties éloignées du centre, la seconde les diminue dans un rapport tel, qu'elle n'est même presque pas usitée. On conçoit donc qu'il ait pu venir à l'idée de trouver sur la perpendiculaire au plan du tableau un point de vue tel que les rayons qui percent ce plan, en partant de points également distants sur le globe, donnent des projections également espacées.

Supposons que V (*fig.* 368) soit ce sommet des cônes : désignons par x sa distance VP à la terre, par na un certain nombre de divisions du méridien, et par nh le même nombre de divisions correspondantes sur l'équateur, égales entre elles, et voyons si nous arrivons à une valeur constante de x. Il s'agit ici d'une projection sur l'équateur.

Les triangles semblables GFV, DCV, donnent

$$\text{CV} : \text{FV} :: \text{DC} : \text{GF}$$

ou

$$x+r : x+r+\sin.na :: nh : \text{cosin}.na,$$

d'où nous tirons

$$(x+r)\ \text{cosin}.na = nh\,(x+r+\sin.na)$$

Et enfin successivement

$$(x+r)\ (\text{cosin}.na - nh \sin.na) = nh \sin.na$$

$$x+r = \frac{nh.\sin.na}{\text{cosin}.\,na - nh} \qquad \text{et} \qquad x = \frac{nh.\sin.na}{\text{cosin}.na - nh} - r$$

S'il avait été question de la projection sur un méridien, l'expression de x n'eût changé que par la mutation réciproque du sinus et du cosinus de na.

Cette valeur de x variant avec na, c'est-à-dire avec n, prouve qu'il n'y a pas de position pour V, qui remplisse complétement le but que nous nous proposions d'atteindre.

Nous pouvons, tout au moins, chercher à satisfaire le mieux possible à la condition qu'on ne rencontre, ni dans la projection stéréographique, ni dans la projection orthographique. Pour cela, prenons l'expression générale d'un rayon projeté de parallèle en fonction de la latitude et de la position du point de vue.

En désignant ces quantités par h, L et x, la figure 368 et la

même comparaison des triangles semblables que ci-dessus fournissent :

$$h : r\cos.L :: x+r : x+r+r\sin.L$$

$$h=\frac{(x+r)\,r\cos.L}{x+r+r\sin.L}=\frac{r\cos.L}{1+\frac{r\sin L}{x+r}}$$

Si $x=0$, nous rentrons dans la projection stéréographique, et le rayon du parallèle projeté est

$$h=\frac{r.\cos.L}{1+\sin.L}$$

Si $x=\infty$, ce qui correspond à la projection orthographique,

$$h=\frac{r\cos.L}{1+\frac{1}{\infty}}=r.\cos.L$$

Dans ce dernier cas, h varie trop peu, lorsque L est voisin de 0^g. Dans le précédent, la valeur du sinus qui entre au dénominateur, prenant des accroissements d'autant plus rapides que le cosinus décroît plus lentement, non-seulement détruit l'inconvénient qui existe dans la projection orthographique, mais encore lui substitue le défaut contraire, dans une proportion cependant moins défavorable. Ceci ne fait que confirmer les inconvénients signalés § 499.

Si l'on supposait $x=r$, la formule deviendrait

$$h=\frac{r.\cos.L}{1+\frac{1}{2}\sin.L}$$

L'expérience a prouvé qu'on détruisait ainsi un peu trop l'action du sinus, et *Lahire* a pensé que ce qu'il y avait de mieux à faire était de prendre $x=\sin.50^g=\frac{1}{\sqrt{2}}r$ (*fig.* 369), ce qui donne

$$h=\frac{r\cos L}{1+\frac{r.\sin L}{r\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}=\frac{r.\cos.L}{1+\frac{\sin.L\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}=\frac{r.\cos.L}{1+\frac{1,41}{2,41}\sin.L}$$

et enfin,

$$h=\frac{r\cos.L}{1+0,585\sin.L} \quad \text{c'est-à-dire environ} \quad \frac{r.\cos.L}{1+\frac{3}{5}\sin.L}$$

Malgré l'avantage de cette méthode, on a continué à se servir

de la projection stéréographique, parce qu'elle seule jouit de la propriété de projeter les cercles de la sphère par des cercles.

500. *Projections par développement.—Développement du cône tangent.* Lorsqu'il ne s'agit que de représenter une petite portion seulement de la terre, comme un royaume, une province, etc., on se sert de projections qui altèrent moins les formes et les dimensions. Pour cela, on imagine une surface de révolution développable et tangente au globe vers le milieu de l'espace à reproduire, suivant le parallèle moyen. Cette surface différant peu de la portion correspondante de la terre, coupée par les plans des méridiens et des parallèles, se trouve divisée en quadrilatères mixtilignes qui représentent les quadrilatères curvilignes, et que l'on peut regarder comme leurs équivalents. Soit CQTP (*fig.* 370) la section d'un quart de la sphère par le méridien moyen de la surface à projeter. TD est la trace du parallèle moyen, et BE, AF, celles des parallèles extrêmes. Imaginons la surface conique engendrée par la tangente OT : elle se raccorde avec la sphère suivant le parallèle dont TD est le rayon, et les plans des parallèles extrêmes la coupent suivant les circonférences projetées ici en *b*B et *a*F. Les sections par les plans méridiens sont des génératrices du cône. Pour développer la portion nécessaire de la surface conique, on décrit un arc de cercle avec TO pour rayon, on porte dessus des parties égales aux divisions du parallèle moyen, et l'on trace les génératrices correspondantes ; puis ensuite on complète la projection en décrivant du même centre et avec O*a*, O*b*, pour rayons, des portions de circonférences qui sont les projections des parallèles.

Nous trouvons, dans ce procédé, que les quadrilatères sont rectangulaires comme sur la sphère, et que tous les détails situés sous la même latitude sont comparables ; mais, pour d'égales différences de latitude, nous voyons qu'elles décroissent de plus en plus rapidement, à mesure que l'on approche du pôle, tandis qu'elles augmentent sans cesse vers l'équateur. Dans ce cas, elles sont projetées plus grandes qu'elles ne sont sur le globe, et plus petites dans le premier cas. Un second inconvénient consiste en ce que les différences en longitude sont toutes plus grandes sur la surface conique que sur la sphère.

La figure 371 indique ce développement.

501. *Projection conique.* Pour que les latitudes ne soient pas altérées, on a imaginé de porter, à partir de T (*fig.* 370), sur TO,



des longueurs Ta'Tb', égales aux différences rectifiées de latitude des divers parallèles; puis ce sont les distances Oa', Ob', que l'on a prises pour rayons des projections de parallèles : ces projections sont exprimées par les arcs ponctués sur la figure 371. Il n'y a plus, par ce moyen, d'erreur en latitude, et les distances en longitude sont déjà moins grandes que précédemment, comme l'indique la comparaison des arcs pleins et des arcs ponctués sur la même figure.

502. Pour détruire complétement les erreurs en longitude, on a modifié cette projection, en agissant à l'égard de tous les parallèles comme on l'a fait précédemment pour le parallèle moyen, c'est-à-dire que, pour chacun d'eux, on a porté sur sa projection des longueurs précisément égales à celles qui séparent les méridiens. Si, par exemple, ceux-ci sont distants d'un grade, on a porté sur les arcs qui représentent les parallèles, des longueurs qui décroissent successivement et, comme on le sait, proportionnellement aux cosinus des latitudes: ceux-ci étant en effet égaux au rayon de la terre multiplié par le cosinus de la latitude correspondante : la figure 375 présente cette projection ainsi modifiée. On y reconnait bien que les distances en longitude ou suivant les parallèles, sont précisément égales à ce qu'elles sont sur le globe; mais on y remarque, en même temps, que l'on a un peu altéré, dans un autre sens, les résultats que présentait la projection conique avant la modification. En effet, les quadrilatères étaient rectangulaires comme sur le globe, et les distances en latitude n'étaient pas entachées de la plus petite erreur, tandis que, dans la projection nouvelle, ces conditions sont d'autant moins remplies, qu'on s'écarte davantage du centre de la carte. Quoi qu'il en soit, et parce que ces défauts ne sont pas aussi saillants que celui que l'on a fait disparaître, surtout quand il ne s'agit pas de projeter une très-grande portion du globe, on a dans ces derniers temps adopté cette projection que l'on désigne sous le nom de *projection du Dépôt de la guerre.* C'est elle que l'on emploie pour la plus belle œuvre topographique des temps modernes, *la nouvelle Carte de France.*

503. Nous ne répéterons pas ici ce qui a été dit au n° 414, sur la nécessité de déterminer les points d'intersection des méridiens et des parallèles, lorsque l'échelle de la projection est trop grande pour que l'on puisse, à l'aide d'un compas, tracer les parallèles d'une manière continue.

Nous avons trouvé que les coordonnées de ces points d'intersection étaient fournies par les formules

$$y = (r.\,\text{cot}.L - M^m)\,\text{sin}.P\;\frac{r.\,\text{cosin}.l}{r.\,\text{cotang}\,L - M^m}$$

$$x = (r.\,\text{cot}.M - M^m)\,\text{cosin}.P\;\frac{r.\,\text{cos}\,l}{r.\,\text{cotang}.L - M^m}$$

L représentant la latitude du parallèle moyen.

l celle du parallèle sur lequel est le point cherché.

P la différence en longitude du méridien principal et de celui sur lequel se trouve le point cherché.

r le rayon de la sphère.

Et M l'arc rectifié et compté en mètres, du méridien compris entre le parallèle moyen et l'autre.

On pourrait encore trouver facilement tous les points d'un même parallèle, en combinant l'une des deux formules ci-dessus, servant à déterminer x et y avec l'équation du cercle rapporté à l'origine des coordonnées (n° 418), $r^2 = x^2 + y^2$, ou

$$y = \pm \sqrt{(r+x)(r-x)}$$

Chaque valeur attribuée à x en donnerait deux égales et de signes contraires pour y.

Ce qui vient d'être dit suppose la terre sphérique : dans ce cas, des tables calculées à l'aide des formules ci-dessus fourniraient un moyen très-simple de construire la projection. La mesure de différents arcs de méridiens exécutée sous diverses latitudes ayant prouvé que telle n'était pas la figure de la terre : mais qu'elle s'approchait beaucoup plus de la forme d'un ellipsoïde de révolution, il a été nécessaire d'apporter aux formules les modifications qu'exigent les dimensions reconnues du globe.

D'abord, le rayon du parallèle moyen développé TP (*fig.* 376) qui, dans la sphère, est égal à r. cotang.L, doit être modifié par la substitution de la grande normale TB au rayon de la terre. Ce qui donne

$$\frac{a.\,\text{cotang}.L}{(1 - e^2\,\text{sin}.^2L)^{\frac{1}{2}}}$$

Dans le cas particulier de la Carte de France ou de toute autre pour laquelle on prend pour parallèle moyen celui du 50ᵉ grade, cette formule se simplifie et devient

$$TP = \frac{a}{\left(1 - \frac{e^2}{2}\right)}\tfrac{1}{2} = \frac{a}{(0,99677)}\tfrac{1}{2}$$

$$\begin{array}{rl} \log.\ (a = 6375737^m) = & 6.8045305 \\ C^t.\ \tfrac{1}{2}\ \log.\ (0.99677) = & 0.0006025 \\ \hline \log.TP = (6384588^m) = & 6.8051330 \end{array}$$

6384588^m est donc le rayon du développement du parallèle du 50e grade sur la terre considérée comme un ellipsoïde de révolution.

Pour avoir maintenant les rayons des projections des autres parallèles, on ne peut plus considérer tous les grades du méridien, depuis 0^g jusqu'à 100^g, comme égaux entre eux et à 100000^m. Il faut tenir compte de l'aplatissement de la terre, qui fait croître la longueur des grades à mesure que la latitude augmente.

Remarquons que les arcs du méridien se confondent avec les éléments des cercles osculateurs correspondants ; que toujours les arcs de même amplitude sont proportionnels à leurs rayons, et qu'ainsi la détermination du rayon de courbure en fonction de la latitude fera connaître la loi que suivent les variations des arcs de même amplitude sur le méridien. C'est ce dont nous nous sommes occupé au § 433 ; mais comme les théories sur lesquelles nous nous sommes appuyé peuvent n'être pas familières à toutes les personnes qui auront cet ouvrage entre les mains, nous plaçons ici un tableau contenant les longueurs en mètres des arcs de 1^g, du 30e au 70e de latitude.

Ce tableau est extrait d'un mémoire sur la projection du Dépôt de la guerre, calculé dans l'hypothèse adoptée par la Commission des poids et mesures, que l'aplatissement égale $\frac{1}{334}$. Les résultats diffèrent donc un peu de ce que fourniraient les formules, en prenant $\frac{1}{309}$ pour l'aplatissement. Ce mémoire a été publié, en 1810, par M. Henry, colonel au corps impérial des ingénieurs géographes.

LATITUDES.	LONGUEURS des grades.	DIFFÉRENCES.	LATITUDES.	LONGUEURS des grades.	DIFFÉRENCES.	LATITUDES.	LONGUEURS des grades.	DIFFÉRENCES.	LATITUDES.	LONGUEURS des grades.	DIFFÉRENCES.
g	m		g	m		g	m		g	m	
30	99741,9	11,6	40	99867,5	13,5	50	100006,2	14,1	60	100144,6	13,3
31	99753,5	11,8	41	99881,0	13,6	51	100020,3	14,1	61	100157,9	13,1
32	99765,3	12,1	42	99894,6	13,7	52	100034,4	14,0	62	100171,0	13,0
33	99777,4	12,3	43	99908,3	13,8	53	100048,4	14,0	63	100184,0	12,8
34	99789,7	12,5	44	99922,1	13,9	54	100062,4	13,9	64	100196,8	12,6
35	99802 2	12,7	45	99936,0	14,0	55	100076,3	13,9	65	100209,4	12,3
36	99814,9	13,4	46	99950,0	14,0	56	100090,2	13,7	66	100221,7	12,2
37	99827,8	13,1	47	99964,0	14,0	57	100103,9	13,7	67	100233,9	12,2
38	99840,9	13,2	48	99978,0	14,1	58	100117,6	13,6	68	100245,9	11,6
39	99854,1	13,4	49	99992,1	14,1	59	100131,2	13,4	69	100257,5	11,[illegible]

504. *Construction d'une carte.* On la divise en un certain nombre de rectangles égaux dont les côtés sont respectivement parallèles aux lignes qui ont été prises pour axes des coordonnées : ce sont le méridien principal développé et la perpendiculaire passant par le centre commun des parallèles. Quelquefois, au lieu de ce dernier, c'est à partir du parallèle moyen que l'on compte les abscisses des intersections des méridiens et des parallèles, ainsi que celles des angles des rectangles ; et cela, dans le but d'avoir à employer des nombres moins grands. On voit que, quant à la difficulté d'exécution, il importe peu que l'on emploie l'une ou l'autre de ces méthodes.

Si la latitude du point est plus grande que la latitude moyenne, la somme des abscisses comptées suivant les deux systèmes est égale au rayon du parallèle moyen développé : si cette latitude est, au contraire, plus faible, il y a entre les deux abscisses une différence toujours égale à ce même rayon.

Pour continuer à expliquer les opérations à faire, et parce qu'on agit ainsi au Dépôt de la guerre, adoptons pour axe des y la tangente au parallèle moyen de la carte (*fig.* 377). Le rapport des côtés de rectangles est évidemment arbitraire : cependant, comme il a fallu s'arrêter à quelque chose, le Dépôt de la guerre a choisi le rapport de 5 à 8 comme présentant une figure agréable

à l'œil, et commode lorsqu'on veut faire usage de la carte. Les feuilles ont $0^m,5$ de hauteur, et $0^m,8$ de largeur.

Pour reconnaître dans laquelle des quatre régions formées par les axes sont placées les feuilles, et leurs positions dans ces régions, on est convenu de numéroter les feuilles comme l'indique la figure 377, les chiffres placés sur deux côtés d'un rectangle indiquant les distances de ces côtés aux axes qui leur sont respectivement parallèles. De plus, la position de ces chiffres exprime aussi la région à laquelle appartient la feuille. Si ces chiffres sont inscrits près des côtés *sud* et *est*, la feuille dépend de la région du nord-ouest. Placés sur les côtés *nord* et *ouest*, ils dénotent que la feuille appartient à la région sud-est : il en est de même pour les deux autres positions que peut occuper la feuille.

Si l'échelle est celle de $\frac{1}{20000}$, chaque côté *est* ou *ouest* représente 10000^m, et les côtés *nord* et *sud* représentent 16000.

A l'échelle de $\frac{1}{50000}$, les côtés valent 25000^m et 40000^m : à l'échelle de $\frac{1}{80000}$, ils correspondent à 40,000 et 64000^m.

Les coordonnées des angles de tous les rectangles sont donc immédiatement connues, ainsi que celles des subdivisions de décimètre en décimètre.

Ces préliminaires établis, il n'y a aucune difficulté à placer un point dont les coordonnées ont été calculées par la méthode indiquée n° 503.

On reconnaît d'abord dans quel rectangle, et même dans laquelle de ses subdivisions tombe le point. On divise les côtés *nord* et *sud* de ce petit rectangle, proportionnellement à la différence qui existe entre l'ordonnée du point et celle du côté *ouest* du cadre : soient n et n' (*fig.* 378) les points de division : de même, on cherche m et m' qui divisent les côtés *ouest* et *est* proportionnellement à la quantité qu'il faut ajouter à l'abcisse du côté *sud*, pour compléter celle du point M. L'intersection des droites mm', nn', est la projection cherchée de M.

On peut voir (*fig.* 377) l'ensemble des projections des méridiens et des parallèles qui seraient ainsi tracés en unissant leurs points d'intersection isolément construits.

505. On ne calcule pas habituellement, et comme nous venons de l'indiquer plus haut, les coordonnées des points d'intersection ; mais on se sert des tables de *Plessis*, calculées de décigrade en décigrade, en latitude et en longitude, pour l'aplatissement de $\frac{1}{334}$.

Ces tables donnent les valeurs de x et y. Quant aux points intermédiaires, leurs coordonnées s'obtiennent par une double interpolation qui s'effectue au moyen des corrections fournies par les colonnes qui suivent celles de x et y, et qui contiennent les différences premières et secondes de ces quantités. Peut-être ne nous saura-t-on pas mauvais gré d'essayer à faire comprendre la signification et l'importances des termes, tout en rendant notre langage aussi élémentaire que possible.

Soit une droite MM' (*fig.* 380), x et y les coordonnées de l'un de ses points : supposons que x augmente de Δx, et y de Δy ; les nouvelles coordonnées $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, correspondent à un certain point M', dont la tangente trigonométrique de l'inclinaison sur l'axe des y est $\frac{\Delta x}{\Delta y}$.

Si nous imaginons une courbe MM' s'écartant trop sensiblement de la droite, pour regarder M' et M'' comme se confondant, y a entre ces deux points une distance qui est à peu près à Δx ce que Δx est à x. Désignant M''P par X, et M'M'' par $\Delta^2 x$, nous avons,

$$X = x + \Delta x + \Delta^2 x$$

Au lieu de considérer M' et M'' sur la même perpendiculaire M''P, si, par un motif quelconque, ils doivent se trouver sur une ligne inclinée (*fig.* 381), à la valeur ci-dessus de X, correspond

$$Y = x + \Delta y - \Delta^2 y.$$

puisque le petit triangle M''M't, rectangle en t, a pour côtés de l'angle droit les petits accroissements de Δx et Δy.

Admettons actuellement que l'on ait calculé les valeurs de x et y de décigrade en décigrade pour toutes les latitudes et longitudes, et que l'on ait formé une table à double entrée, ayant pour arguments la latitude et la longitude. On inscrit, dans deux colonnes, ces valeurs de x et y calculées au moyen des formules que nous avons données n° 414, et modifiées en vertu des considérations énoncées n° 502 : dans des colonnes contiguës se placent les valeurs de Δx, Δy, $\Delta^2 y$, correspondant à la dixième partie d'un décigrade, c'est-à-dire à dix minutes centésimales. Lorsqu'ensuite on veut appliquer les formules, on multiplie successivement Δx et Δy, par les coefficients 2, 3, 4.... 8, 9, pour avoir les intersections des méridiens et parallèles de minute en minute, ou encore par 0, 1 ; 0, 2.... ; 0, 9 ; 1, 1 ; 1, 2.... ; 1, 9, si l'on veut figurer les méridiens et parallèles de dix en dix secondes, tant en latitude qu'en longitude.

C'est lorsque ces interpolations sont effectuées par le calcul qu'on peut en faire de graphiques, pour placer les points qui appartiennent à l'un des quadrilatères, en divisant ses côtés proportionnellement au nombre de dizaines de secondes, et même de secondes.

Si nous designons par n le coefficient de Δx (c'est le nombre de secondes qu'il faut ajouter à la latitude du parallèle inférieur, formant l'un des côtés du quatrilatère), et par n', celui de Δy, nous voyons sur la figure 381, que $M''t$ ou Δ (VM), ou encore $\Delta (n\Delta x)$ varie nécessairement en raison de la grandeur de VM ou $n'\Delta y$, puisque la courbe MM' s'écarte d'autant plus de MM, que MV est plus considérable. Ainsi, $M\,t = n'\Delta\,(n\Delta x) = nn'\Delta^2 x$: de même $M'\,t = nn'\Delta^2 y$.

Jusqu'ici, nous avons supposé que nous connaissions les coordonnées d'un point M appartenant au même parallèle développé que M' : cela n'est pas, et il s'agit d'une double interpolation.

Soit A' (*fig.* 382), le point dont on cherche les coordonnées : son abscisse $X = ep = cp + Ac + Ae = x' + Ac + Ae$.

Ac est $\Delta x'$ répété n fois : c'est $n\Delta x$: Ae est l'accroissement de Ap ou x, d'autant plus grand que A' s'élève plus au-dessus de A, en raison de la plus grande différence en longitude de ces points : c'est donc $n\ \Delta x$. En ajoutant à ces différentes quantités, le terme en Δ^2 dont l'explication vient d'être donnée, on a

$$X = x' + n\Delta x' + n'\Delta x + nn'\Delta^2 x$$

Nous trouvons de même que

$$Y = y + A'e\,;\quad y = y' - cn = y' - ny'\,;\quad A'e = n'\Delta y - nn'\Delta^2 y$$

et enfin,

$$Y = y' - n\Delta y' + n'\Delta y - nn'\Delta^2 y$$

Les grades et décigrades qui correspondent à x et x', y et y' font connaître en même temps Δx, $\Delta x'$, Δy, $\Delta y'$, $\Delta^2 x$ et $\Delta^2 y$:

506. *Projection cylindrique.* Ce mode de représenter une portion de la surface du globe est certainement le plus défectueux, lorsqu'on n'apporte pas quelque modification à son principe. Il consiste à imaginer un cylindre tangent à la sphère, suivant l'équateur. Les génératrices tangentes aux méridiens (*fig.* 383) les représentent dans le développement du cylindre sur un plan. Les parallèles sont alors représentées par les droites, perpendiculaires aux méridiens, qui sont les développements des cercles suivant

lesquels les plans des parallèles coupent le cylindre. Ce n'est que pour une zone très-restreinte, au nord et au sud de l'équateur, que cette projection est admissible : au delà, les altérations vont sans cesse en augmentant ; elles sont d'ailleurs dues à une double cause, le décroissement des distances en latitude et leur accroissement en longitude. Il suffit de jeter un coup d'œil sur la figure 384 pour s'en rendre compte.

Lorsqu'il s'agit de représenter une portion de zône qui n'est pas contiguë à l'équateur, on imagine le cylindre inscrit dont la génératrice est FG (*fig.* 385), ou celui qui est circonscrit, et qui a pour génératrice AB, ou mieux, celui qui serait décrit par la droite DE passant par la latitude moyenne M de la zone. Dans la projection cylindrique, les aires des zones sont égales sur la sphère et sur le développement, et par conséquent, sur ce dernier, les hauteurs des rectangles varient en raison inverse de l'accroissement relatif des bases.

507. *Carte plate.* On peut détruire l'une des deux causes d'erreur, en modifiant d'une manière analogue à celle qu'on a employée pour la projection de *Flamstead*, c'est-à-dire en supposant les méridiens rectifiés sur les génératrices qui les représentent. Alors les distances mesurées sur la carte dans le sens de la latitude ont même longueur que sur le globe, et la projection se trouve composée d'autant de rectangles qu'il y a de quadrilatères sur la sphère (*fig.* 386) : c'est ce que l'on nomme *carte plate.*

Les formes et les surfaces ne sont pas sensiblement altérées dans le sens de l'*est* à l'*ouest* ; ainsi, pour une contrée qui serait beaucoup plus étendue dans ce sens que du nord au midi, on pourrait sans inconvénient employer ce mode de projection.

508. *Projection de Cassini.* Celle-ci n'est réellement qu'une modification de la précédente. Pour l'exposer, il suffit d'appliquer au méridien ce que nous avons dit de l'équateur, et réciproquement. On suppose un cylindre tangent à la sphère suivant le méridien principal : par les divisions de l'équateur, des plans parallèles au méridien, et par celles du méridien des grands cercles qui ont un diamètre commun situé dans le plan de l'équateur. Ce diamètre est, dans la projection de Cassini, ce qu'est la ligne des pôles dans la précédente. On imagine ensuite le cylindre développé, et les génératrices passant par les divisions du méridien représentent les grands cercles perpendiculaires au méri-



dien, tandis que les petits cercles qui lui sont parallèles ont pour projections les développements des intersections du cylindre par leurs plans (*fig.* 386 et 387).

Ici, ce sont les dimensions voisines du méridien qui ne sont pas défigurées dans la projection, tandis que, dans le sens de l'équateur, les quadrilatères diminuant de plus en plus de surface, et devenant de plus en plus obliques, sont fort mal représentés par les rectangles de la carte. Sans doute la configuration de la France, un peu plus étendue du nord au sud que de l'est à l'ouest, a été l'un des motifs qui ont déterminé *Cassini* à employer ce système pour l'exécution de sa carte de France.

Dans cette projection, les points ont été rapportés par leurs distances à la méridienne et à la perpendiculaire de l'Observatoire de Paris, et nous avons indiqué (nº 413), avec quelle facilité on passait successivement à celles de tous les sommets du canevas géodésique au moyen des éléments des triangles et de l'azimut d'un premier côté. Les coordonnées de chaque point peuvent être, comme vérification, déterminées par deux calculs qui les rattachent aux deux autres sommets déjà calculés d'un triangle : dans ce cas, nous ferons observer que, pour former les azimuts des deux côtés qui, avec eux, sont les éléments connus des triangles rectangles à calculer, il faut ajouter l'angle B (*fig.* 389, 390, 391, 392), à l'azimut Z pour le point B qui est à gauche, par rapport au sommet à déterminer C, tandis qu'il faut, pour l'objet de droite, retrancher l'angle A de l'azimut Z'. Ce dernier azimut est évidemment égal à Z augmenté de 200ᵍ.

509. *Carte réduite.* Les cartes marines n'ont pas pour but de présenter exactement la configuration des diverses parties du globe ; mais de permettre au navigateur de tracer avec une précision, presque toujours suffisante, le chemin parcouru par son navire. Les *données* sont les *distances* et les *directions :* les premières sont les hypothénuses d'autant de triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont les méridiens et les parallèles. Pour ne pas commettre d'erreurs dans les opérations graphiques, il faut que, partout sur la carte, il y ait, entre les degrés de latitude et de longitude, le même rapport que sur la terre, et que, de plus, les projections des méridiens et des parallèles soient toujours rectangulaires. Cette dernière condition n'est pas remplie dans les projections stéréographique et orthographique, si ce n'est dans le cas particulier où l'équateur est le plan du ta-

bleau ; mais on ne pourrait y tracer facilement *la loxodromie*, ou courbe suivant laquelle marche un vaisseau soumis à une même impulsion du vent : cette courbe, jouissant de la propriété de couper tous les méridiens sous un même angle, est représentée par une ligne droite sur les cartes où les méridiens sont parallèles.

Les cartes plates ne satisfont pas à la première condition énoncée plus haut, puisque l'on y fait tous les degrés de longitude égaux, tandis qu'en réalité ils décroissent proportionnellement au cosinus de la latitude. On pare à cet inconvénient, en divisant les degrés du méridien par ce même cosinus de la latitude, ou en les multipliant par sa sécante, de sorte, qu'alors, les degrés des méridiens croissent dans le même rapport que ceux des parallèles. Cette nouvelle projection, connue sous le nom de *carte réduite* (*fig.* 388), n'a plus d'échelle constante : les divisions de cette échelle croissent comme les degrés tracés sur les méridiens projetés. On a construit des tables *des latitudes croissantes* qui fournissent immédiatement la longueur du degré et de ses subdivisions, pour toutes les latitudes. On peut encore tracer une semblable projection, lorsqu'il s'agit d'opérer à une petite échelle, en décrivant un quart de circonférence d'un rayon égal à un degré ou à l'un de ses multiples, en divisant cette circonférence en degrés, ou par le même multiple, et prenant toutes les sécantes successives entre 0° et 90°, ou entre 0^g et 100^g. Il serait plus exact d'opérer, s'il était nécessaire, en calculant par logarithmes.

510. *Projection de Lorgna.* Cette projection a pour but la conservation, en vraie grandeur, des surfaces terrestres développées. Un hémisphère sera représenté par un cercle d'égale surface.

Désignant par R et r les rayons de la sphère et du cercle, il faut qu'on ait $\pi r^2 = 2\pi R^2$, et par conséquent $r = R\sqrt{2} =$ 1,4142 R, $r = 1,4142$ R. La valeur de r se trouve aussi très-facilement au moyen d'une construction graphique très-simple ; car, de $r^2 = 2R^2$, on conclut que r est l'hypoténuse d'un triangle isocèle rectangle APC (*fig.* 393), c'est-à-dire la corde AP qui sous-tend le quart de la circonférence, ou encore, en d'autres termes, le double du sinus de 50^g. On voit (*fig.* 379) la projection de l'hémisphère sur le plan de l'équateur. Dans ce cas, les méridiens sont projetés suivant des lignes droites comprenant

entre elles des surfaces égales aux fuseaux sphériques de la terre; les parallèles sont représentées par des circonférences dont les rayons sont déterminés par cette condition que les surfaces qu'ils comprennent soient égales aux zônes sphériques. Cette condition sera satisfaite si on établit l'égalité entre les surfaces des cercles représentant les parallèles sur le développement et celles des calottes sphériques déterminées par les parallèles terrestres. En désignant par L une latitude quelconque, et par ρ le rayon correspondant de la projection, ces deux surfaces ont pour expressions, la première $\pi\rho^2$ et la seconde $2\pi R^2 (1 - \sin. L)$ puisqu'elle est égale à une circonférence de grand cercle multipliée par la hauteur. On doit donc avoir

$$\rho^2 = 2R^2 (1 - \sin. L), \quad \rho = R \sqrt{2} \sqrt{1 - \sin L}$$

Mais $R\sqrt{2}$ représente le rayon r de l'équateur développé; on a donc en fonction de celui-ci

$$\rho = r \sqrt{1 - \sin. L}$$

Pour rendre le radical immédiatement calculable par logarithmes, il suffit de remplacer sin. L par le cosinus de son complément, et l'on a

$$\rho = r \sqrt{1 - \cos.(100 - L)} = r \sqrt{2} \sin.(50^g - \tfrac{1}{2} L)$$

S'il s'agissait de projeter sur un méridien, la figure 393 indiquerait que l'on a imaginé la sphère divisée, comme pour la projection de Cassini, par des plans parallèles au méridien principal, et par des plans perpendiculaires à ce même méridien. Toute la différence consiste en ce que Cassini a pris le plan de projection perpendiculaire à celui du méridien principal, tandis qu'ici, c'est lui qui est le plan du tableau.

La même figure 393 convient à la projection sur l'horizon, dans la supposition où tous les petits cercles sont parallèles au plan de l'horizon, et où les grands sont des cercles azimutaux. Les petits cercles, dans ce cas, se distinguent sous le nom d'*almicantarats*.

Les rayons des petits cercles seraient calculés facilement par le moyen qui a été expliqué plus haut pour la détermination de ceux des parallèles de la projection sur l'équateur. On aurait ainsi des systèmes de çoordonnées analogues aux latitudes et aux longitudes; mais les points principaux d'une carte sont

connus par ces derniers éléments ; en sorte que pour chacun d'eux il faudrait opérer un calcul destiné à faire connaître les éléments correspondants de la projection de Lorgna appliquée à un méridien ou à l'horizon, ce qui en rend l'exécution très-difficile.

511. *Projection homalographique de M. Babinet.* Le but qu'on se propose d'atteindre dans ce système de projection est le même que celui de la précédente : conserver aux surfaces leurs grandeurs relatives.

Soit EPQP' un méridien en vraie grandeur (*fig.* 373) ; soient également PP' la ligne des pôles et QE la trace de l'équateur. La surface de ce grand cercle sera la moitié de celle d'un hémisphère ; pour que la condition essentielle soit satisfaite, il faut que les fuseaux sphériques formés par les méridiens, et les zônes comprises entre les parallèles soient représentés sur la projection par des surfaces réduites dans le même rapport.

Occupons-nous d'abord de la recherche des méridiens. Si, d'une série de points situés sur la circonférence nous abaissons des perpendiculaires sur la ligne des pôles, et si nous divisons celles-ci en un même nombre de parties égales, nous obtiendrons des séries de points appartenant (§ 419) à des ellipses ayant pour grand axe commun la ligne des pôles, et pour petits axes des longueurs telles que $2\,\mathrm{OM} = 2r\frac{m}{n}$, si r désigne le rayon terrestre, et si n étant le nombre total de divisions employées, m est celui qui répond au point M. Les lignes PMP', PM'P' représenteront les méridiens, en satisfaisant à la condition de constance du rapport des surfaces. On sait en effet que la surface d'une ellipse dont les demi-axes sont a et b est représentée par πab ; le fuseau plan elliptique PMP'M' sera alors exprimé par

$$\tfrac{1}{2}\pi r^2\frac{m}{n} - \tfrac{1}{2}\pi r^2\frac{m-1}{n} = \frac{\pi r^2}{2n}$$

Tous les fuseaux auront donc des surfaces égales entre elles, et par suite, chacune de celles-ci sera moitié de la surface du fuseau sphérique correspondant.

Cherchons actuellement à représenter les cercles des parallèles par des lignes droites parallèles à la projection de l'équateur. Soit L la latitude de l'un d'eux, et x celle qu'il faut lui substituer pour satisfaire à la condition des surfaces, de telle sorte que

$$\text{surface } \tfrac{1}{2} \text{ zône sph. QL} = 2.\ \text{surf. zône plane } Qx.$$

La surface d'une zône de la sphère a pour mesure le produit d'une circonférence de grand cercle par la hauteur : la zône plane est égale à deux fois $HOxQ$ ou à $2\,OHZ + 2\,OQx$. On peut donc écrire

$$\pi r^2 \sin.L = 4\left(\frac{r^2 x}{2} + \frac{r^2 \sin.x \cos.x}{2}\right)$$

$$\pi \sin.L = 2x + \sin.2x.$$

Cette équation est insoluble, si on y regarde x comme l'inconnue ; mais on peut tourner la difficulté en la résolvant par rapport à L, en attribuant à x des valeurs arbitraires ; il faudra pour cela la mettre sous la forme

$$\pi \sin.L = 2x \times \text{rapport } 1^s + \sin.2x,$$

si x est exprimé en grades. On pourra ainsi construire une table renfermant, en regard de L, les valeurs de x correspondantes, et s'en servir de la même manière que d'une table de logarithmes, pour trouver par interpolation les valeurs de X, qu'il faut substituer à celles de la latitude vraie, de 10^g en 10^g, par exemple.

La projection homalographique se trouvera donc ainsi divisée en deux séries de lignes représentant les méridiens et les parallèles, comprenant entre elles séparément des surfaces égales à la moitié des surfaces correspondantes de la sphère. Il reste encore à faire voir qu'il en sera de même pour les portions comprises entre les parallèles et les méridiens elliptiques, car il n'a été question jusqu'à présent que des zônes entières comprises entre les parallèles. Comparons à cet effet les surfaces $ABab$, $ABa'b'$ relatives au cercle méridien de rayon r et à l'ellipse dont les axes sont r et $\frac{mr}{n}$. Le calcul différentiel prouve directement que ces surfaces sont proportionnelles au rayon EO et au petit axe OM ; sans rechercher cette démonstration, quelque simple que soit le procédé qui y conduit, il suffit de remarquer que les ordonnées des deux courbes ab, $a'b'$ étant par construction, toujours dans le rapport $\frac{n}{m}$, les surfaces qui sont composées d'une suite de ces coordonnées auxquelles on attribuerait une épaisseur constante, seront elles-mêmes dans ce rapport $\frac{n}{m}$, et un élément $a'b'a''b''$ formé par des méridiens et des parallèles consécutifs sera égal à la différence

$$ABa'b' - ABa''b'' = ABab \times \frac{m}{n} - ABab\frac{m-1}{n} = \frac{ABab}{n}$$

Mais AB ab est la moitié de la zône terrestre correspondante, renfermant n quadrilatères égaux entre eux; ceux-ci seront donc le double des surfaces telles que $a'b'a''b''$ qui les représentent sur la projection.

Donc enfin, toutes les parties du développement homalographique sont dans un rapport constant avec les parties correspondantes de la surface terrestre.

Ce mode de projection est surtout applicable aux mappemondes (*fig.* 372), que la projection de Lorgna seule pouvait rendre en conservant la proportionnalité des surfaces. Nous avons vu que cette dernière n'est facilement exécutable que sur le plan de l'équateur, et alors elle doit exprimer séparément les hémisphères boréal et austral, et il y a interruption dans le dessin des continents qui coupent l'équateur; la projection homalographique n'a pas cet inconvénient. Ses parallèles étant des lignes droites perpendiculaires à la ligne des pôles, elle a de plus l'avantage d'indiquer constamment les directions E, O à droite et à gauche de la carte, tandis que dans les autres systèmes de projection ces directions sont variables avec la courbure locale du parallèle.

M. Babinet a étendu le système homalographique à la représentation totale de la sphère. Il suffit, pour arriver à ce résultat, de prolonger les lignes droites qui forment les parallèles, et d'espacer les méridiens (*fig.* 374), au dehors comme au dedans du cercle.

LIVRE VI.

OBSERVATIONS ET CALCULS ASTRONOMIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

512. Ce livre n'est pas consacré à l'enseignement de l'astronomie. Assez d'hommes illustres dans la science se sont chargés de cette tâche, pour qu'il ne nous convienne, sous aucun rapport, de prétendre les suivre ou les imiter.

Il s'agit seulement de réunir les quelques questions que peut avoir à résoudre un officier chargé d'exécuter la carte géodésique et topographique d'une contrée lointaine. Obligé de posséder beaucoup d'autres connaissances, on conçoit qu'il ne puisse avoir toujours présentes à l'esprit des théories et des formules dont l'usage est si peu fréquent pour lui.

Nous avons dit (§ 350, liv. V) que toutes les opérations de la géodésie devaient se rattacher à des observations astronomiques préalables de la latitude et de la longitude d'un point et de l'azimut d'un côté de triangle avec le méridien qui passe par l'une de ses extrémités.

Ce sont ces questions seules que nous aurions voulu traiter. Nous sommes cependant forcé, avant d'entrer en matière, de parler de certains phénomènes qui motivent des corrections, sans lesquelles les observations astronomiques ne seraient d'aucun usage. Telles sont la *précession des équinoxes*, la *nutation*, l'*aberration* et la *réfraction*.

513. Comme il est indispensable de tenir compte des heures exactes auxquelles se font les observations, on doit avoir à sa disposition une pendule ou un chronomètre.

Il faut pouvoir reconnaître si cet instrument est bien réglé, ou quelle est sa marche, et quelle division du temps il indique.

Il y a trois manières de compter le temps :

1° *Le temps sidéral,* dans lequel tous les jours sont égaux et mesurés, chacun, par l'intervalle qui sépare deux passages consécutifs d'une étoile au méridien.

Le *jour sidéral,* ou le mouvement diurne d'une étoile, se divise en 24 heures qui se comptent, à partir de midi, de 0 à 24 ; il commence au moment où l'équinoxe du printemps passe au méridien supérieur.

L'*année sidérale* est le temps que le soleil met à revenir au méridien en même temps qu'une étoile avec laquelle il y était déjà simultanément passé. Elle est plus longue que l'*année tropique* de 20^m,331817 (temps moyen), en raison de la marche rétrograde apparente du soleil : sa durée est de 365^j, 256384 ou 365^j,6^h,9^m,11^s,5 (temps moyen).

2° *Le temps vrai ou apparent* est celui que mesurent les passages du soleil au méridien. Les jours vrais sont inégaux.

On nomme *année tropique,* le temps que le soleil met à revenir à un même point de son orbite, *équinoxe*, *solstice* ou tout autre. Il n'a alors parcouru que 359°,59',9'',9, en raison de la rétrogradation annuelle de 50''.1 de l'équinoxe.

Cette année est de 365^j,2422175 ou 365^j,5 ,48^m,47^s,59.

3° *Le temps moyen* représente la marche uniforme d'un *soleil fictif* qui parcourt l'équateur, dans le même temps que met le soleil vrai à faire sa révolution sur l'écliptique.

Ici les jours sont égaux et un peu plus longs que les jours sidéraux.

Le *soleil fictif* part du périgée non loin du solstice d'hiver, en même temps que le soleil vrai, et passe avec lui trois fois encore au méridien. C'est vers les deux équinoxes et vers le troisième solstice que ces rencontres ont lieu.

Nous ne parlerons pas ici du premier soleil fictif que l'on suppose décrire uniformément l'écliptique. Sa distance au soleil vrai, qui varie d'un jour à l'autre, se nomme l'*équation du centre.* Elle est nulle deux fois l'année, lorsque le soleil passe à l'apogée et au périgée.

La marche diurne du soleil moyen est le quotient de 360° par 365^j,2422175, c'est-à-dire 0^h,98565 = 59',1390 ou 59',8'',34. C'est l'accroissement diurne de l'ascension droite du soleil moyen. Quant au soleil vrai, cette quantité n'est pas constante ; elle est tantôt plus grande et tantôt moindre que celle du temps moyen.

La différence en avance ou en retard varie de 3′,35″ à 5′ ; mais la moyenne entre toutes lui est précisément égale.

514. On nomme *équation du temps* la différence entre le temps *moyen* et le temps *vrai*. Désignée sous le nom de *temps moyen au midi vrai*, dans la *Connaissance des temps*, elle est nulle quatre fois dans l'année : aux moments où le soleil passe au périgée, à l'apogée et en deux points intermédiaires. Ces circonstances se présentent du 23 au 24 décembre, du 14 au 15 avril, du 14 au 15 juin, et du 31 août au 1er septembre.

C'est ainsi qu'en 1852, le soleil moyen a marqué au midi vrai :

Le 14 avril	+	10s,88	14s,90, avance diurne du soleil vrai.
15 avril	—	4s,02	
14 juin	—	3s,75	12s,73, retard diurne.
15 juin	+	8s,98	
31 août	+	3s,19	18s,77, avance diurne.
1er septembre	—	15s,58	
23 décembre	—	25s,49	29s,92, retard diurne.
24 décembre	+	4s,43	

Dans les intervalles qui séparent ces quatre époques, l'équation du temps a atteint des *maxima*, savoir :

Le 11 février	+	14m,32s
14 mai	—	3m,54s,33
26 juillet	+	6m,11s,60
2 novembre	—	16m,18s,22

L'équinoxe du printemps a eu lieu le 20 mars.

Ce jour-là, on a eu au midi moyen de Paris. . . . . . :
- Æ = 0,0m,10s,43
- D = 0°,1′,7″,9 Boréale.
- M = 0°,2′,50″,5

Le solstice d'été est tombé le 21 juin :

Au midi moyen de Paris, on a eu :
- Æ = 6h,0m,45s,29
- D = 23°,27′,29″,6
- M = 90°,18′,23″,2

L'équinoxe d'automne, le 22 septembre :

- Æ = 11 ,58m,31s,47
- D = 0′,9′,6″,2 B.
- M = 179°,35′,52″,6

Le solstice d'hiver est tombé le 21 décembre :

Au midi moyen de Paris, on a eu : $\begin{cases} Æ = 17^h,59^m,22^s,49 \\ D = 23°,27',31'',0 \\ M = 269°,51',23'',7 \end{cases}$ A.

La *Connaissance des temps* donne la longitude, la latitude, l'ascension droite et la déclinaison du soleil, pour *midi moyen* au méridien de Paris; elle fournit également l'heure sidérale pour ce même instant du jour. On y trouve encore le temps moyen au *midi vrai* de Paris.

Au moyen de l'un des trois éléments Æ, D, M, et de sa variation diurne, on trouve, par une simple proportion, l'heure précise des équinoxes et des solstices.

Ainsi, par exemple, on trouve pour l'équinoxe d'automne, en temps moyen,

Par la déclinaison. . . .	$9^h,50^m,35^s,75$
Par l'asc. droite.	$9^h,50^m,51^s,39$
Par la longitude.	$9^h,50^m,47^s,53$
Temps moyen . . .	$9^h,50^m,44^s,56$
+ équation du T. .	$20^s,90$
Temps vrai.	$9^h,51^m,\ 5^s,46$

515. L'anné tropique serait égale à l'année sidérale si l'équinoxe n'avait pas un mouvement rétrograde de 50″ par an. La première est donc plus petite que la seconde, du temps que le soleil emploie à parcourir les 50″ de l'écliptique. On sait qu'il décrit les 360° de celui-ci en 366,2572 pour sidéraux. En supposant à sa vitesse angulaire actuelle la valeur moyenne de toute l'année, on trouvera, d'une manière suffisamment exacte, le temps employé à parcourir les 50″ dues à la rétrogradation de l'équinoxe, par la proportion

$$360° : 50'' :: 366,2572 \text{ j. sidéraux} : x$$

comme $50'' = \frac{1°}{72}$, on trouve $x = 20',20''$, ce qui donne à l'année tropique une valeur de 366.2431 jours sidéraux, ou 365,2422 jours moyens, ou encore $365^j,5^h,48^m,57^s,59$ temps moyen.

Cette année est celle de la vie civile.

Ce mouvement de 50″ de la ligne des équinoxes, combiné avec celui de la ligne des apsides (c'est le diamètre qui joint l'apogée au périgée), de 12″ en signe contraire, produit entre elles un rapprochement angulaire de 62″ qui, à la longue, aura une influence sensible sur les saisons.

D'après ce que nous avons dit du mouvement rétrograde propre du soleil, le soleil moyen parcourt, et tous les points de l'équateur aussi, chaque jour, un angle de $360°,59',8'',34$, et en une heure moyenne, $15°,0410686$ ou $15°,2',27'',847$, tandis qu'en une heure sidérale, l'angle est précisément de $15°$.

L'angle de $59',8'',34$, réduit en temps sidéral, correspond à $3^m,56^s,555$. Si on le réduit en temps moyen, à raison de $15°,04107$ par heure, il est égal à $3^m,55^s,90944$.

Ce dernier nombre est l'excédant, compté en temps moyen, du jour moyen sur le jour sidéral, tandis que celui qui précède représente la même différence exprimée en temps sidéral ;

On peut alors écrire :

$$24^{h.\ moy.} = 24^{h.\ sid.} + 3^m,56^s,555335$$

$$24^{h.\ sid.} = 24^{h.\ moy.} - 3^m,54^s,90944 \quad \text{ou} \quad 23^h,56^m,04^s,09056.$$

L'accélération diurne des étoiles, par rapport au soleil moyen, est $3^m,55^s,90944$.

Si une durée quelconque de temps est exprimée par S en temps sidéral, et par M en temps moyen, on a entre S et M, les relations suivantes :

$$M = 0,9972695667 \times S = S\,(1 - 0,0027304333)$$

$$S = 1,0027304333 \times M = M\,(1 + 0027304333)$$

On peut quelquefois, et plus simplement, ajouter dix secondes aux heures moyennes, pour les transformer en heures sidérales, ou retrancher dix secondes de celles-ci pour en faire des heures moyennes. Ce procédé n'est qu'approximatif, mais il peut suffire dans certains cas.

516. Il est encore une autre manière de compter l'année, par l'intervalle des passages du soleil au *périgée*. Ce point ayant un mouvement annuel de $11'',8$ dans le sens du soleil, il en résulte que l'angle parcouru entre deux retours au périgée est plus long que celui qui mesure deux passages à l'équinoxe, de

$$50'',1 + 11'',8 = 61'',9.$$

Cette différence, convertie en temps, est égale à

$$0^j,0127446 \quad \text{ou} \quad 25^m,7^s,2$$

L'intervalle de temps compris entre deux retours consécutifs du soleil au *périgée* se nomme *année anomalistique*.

517. Le mouvement annuel et diurne de la terre produit les années et les jours. Les faits s'expliquent aussi bien par les mou-

vements apparents que par la réalité. La raison seule fait comprendre combien les phénomènes seraient plus extraordinaires encore, si les choses se passaient comme il nous semble.

La rotation unique et diurne de la terre devrait être remplacée par la révolution, en 24 heures, non-seulement du soleil, mais des myriades d'étoiles que renferme l'immensité des espaces. Il faudrait que le soleil parcourût, chaque jour, un orbite qui n'aurait pas moins de 217 millions de lieues de développement, ou 9031800 par heure et plus de 2500 en une seconde. Ce serait une rapidité infiniment plus grande, et dont l'imagination ne peut se former une idée, lorsqu'il s'agit des étoiles. Et en outre, peut-on concevoir, dans cette infinité de mouvements indépendants et si rapides, une telle précision, que la position relative des étoiles restât toujours la même? Dans cette hypothèse, chaque astre serait soumis à une force centrifuge énorme qu'aucune force attractive existante ne pourrait contrebalancer.

Il était donc très-probable que le mouvement diurne provient de la rotation de la terre, lorsque les expériences du pendule de M. Foucault sont venues en donner la certitude.

Sans être appuyé sur une expérience aussi concluante, le mouvement de translation de la terre autour du soleil est presque certain; les causes de sa probabilité sont la rétrogradation des planètes, les parallaxes annuelles des quelques étoiles et le phénomène de l'aberration. Les mouvements apparents produisent une illusion en vertu de laquelle le soleil suit quotidiennement un parallèle à l'équateur, deux fois l'an l'équateur lui-même, aux équinoxes du printemps et d'automne, et l'écliptique chaque année.

Les parallèles les plus éloignées de l'équateur, et à partir desquelles le soleil semble rétrograder pour se rapprocher de l'équateur, se nomment les tropiques du cancer et du capricorne.

Les points où il atteint ces parallèles se nomment les solstices. C'est à ces deux époques que commencent l'été et l'hiver: c'est alors que les jours sont les plus grands et les plus petits.

Nous ne dirons pas ici comment on a reconnu que la courbe, que paraît suivre le soleil, est plane et que c'est une ellipse, dont la terre occupe un des foyers. Nous ne parlerons pas davantage des procédés trigonométriques fort simples au moyen desquels on a mesuré l'inclinaison de l'écliptique, ni comment on a pu reconnaître que les vitesses diverses du soleil sont en raison inverse du carré des distances à la terre: d'où l'on a déduit que les

aires décrites par les rayons vecteurs sont égales, pour des temps égaux. Nous rappelons que ce livre n'est pas un cours complet d'astronomie, et qu'il ne peut être utile qu'aux personnes qui l'ont sue déjà, mais qui en ont oublié certaines théories.

518. Le plus grand diamètre apparent du soleil est 32',593
Le plus petit . . . . 31',516
Le diamètre moyen. . . . . 32',055

Si l'on prend pour unité la plus petite distance du soleil à la terre, celle du périgée, on trouve la plus grande ou celle de l'apogée, par la proportion :

$$31{,}516 : 32{,}593 :: 1 : x = 1{,}03417$$

Le rapport de la différence de ces distances, à la plus petite, qui est représenté par $\frac{10}{314}$, est un trentième environ en nombre rond.

Le rayon de la terre étant de 1433 lieues de 2,280 toises ou 4,444 mètres, la distance de l'apogée à la terre est

24,388 fois le rayon ou 34,938,540 lieues.

Celle du périgée

23,580 fois ou 33,780,420 lieues.

La moyenne entre les deux

23,984 fois ou 34,359,450 lieues.

519. *Dimension du soleil.* Au moyen de la parallaxe horizontale du soleil, que nous verrons bientôt être égale à 8",73, et du demi-diamètre apparent 16' de cet astre, on peut calculer la dimension et le volume relatifs du soleil, ceux de la terre étant pris pour unités.

Représentant par r et R leurs rayons respectifs, on a :

$$8'',7 : 960'' :: r : R = 109.93\ r$$

Le diamètre du soleil est donc à peu près 110 fois plus grand que celui de la terre, et égal à 139999999^m, celui de la terre étant 12727272^m.

Quant aux volumes qui sont proportionnels aux cubes des rayons, on a

$$V : v :: \overline{110}^3 : 1 \qquad \text{et} \qquad V = 1332000 \times v.$$

520. *Distance et dimension de la lune.* La parallaxe horizontale de la lune étant d'à peu près 1°, entre 53',85 et 61', 48, c'est-à-dire 414 fois environ plus grande que celle du soleil, la lune est 414 fois plus rapprochée que lui de la terre : sa distance

moyenne est de 84,541 lieues, c'est-à-dire 29 fois et demie le diamètre de la terre.

Le diamètre apparent de la lune est 31',444 lorsque sa parallaxe horizontale est de 57',57, ce qui correspond à sa distance moyenne.

Il y a donc, entre les rayons de la lune et de la terre, le même rapport qu'entre 15',722 et 57',57, c'est-à-dire à peu près celui de 3 à 11. Il résulte ensuite de là que le volume de la terre est 49 fois plus considérable que celui de la lune.

521. *Rotation du soleil.* L'observation des taches du soleil a fait reconnaître qu'il tourne sur lui-même, d'occident en orient, et que la durée de sa rotation est de $25^j,6$.

522. *Rapport des deux axes de l'orbite terrestre.* Au moyen de la première loi de Képler, exprimant que les arcs parcourus par le soleil sont en raison inverse du carré des distances à la terre, et en désignant par a, A, r et R ces quantités, on a

$$A : a :: r^2 : R^2.$$

Prenons pour a et A les mouvements diurnes à l'apogée et au périgée, et nous trouverons

$$57',492 : 61',165 :: r^2 : R^2$$

$$R = r\sqrt{\frac{61.165}{57.492}} = 1,0344 \times r.$$

Ce résultat est conforme à celui que nous avons précédemment trouvé, et la méthode qui le fournit est préférable à l'autre, en ce sens qu'il est plus difficile de mesurer très-exactement le diamètre apparent que le mouvement diurne.

523. Ce qui se nomme *latitude* et *longitude* pour un lieu terrestre, prend les noms d'*ascension droite* et de *déclinaison* pour un astre.

La *longitude* se compte sur l'écliptique. La *latitude* est la portion comprise entre l'astre et l'écliptique du grand cercle qui passe par le pôle de l'écliptique. La latitude du soleil serait nulle s'il ne quittait jamais le plan de l'écliptique. Il n'en est pas tout à fait ainsi; mais, tantôt australe, tantôt boréale, elle n'atteint jamais une seconde.

524. *Détermination de l'heure précise des observations.* Les observations astronomiques ne pouvant avoir de résultats utiles,

ainsi que nous l'avons déjà dit, qu'autant que l'on connaît très-exactement les heures auxquelles elles sont faites, il faut que l'on ait une bonne pendule ou un bon chronomètre.

La marche de ces instruments peut être conforme à l'une des deux manières de compter le temps (moyen ou sidéral).

Les pendules placées dans les observatoires sont le plus habituellement disposées pour marquer le temps sidéral, parce qu'on peut facilement reconnaître si elles marchent bien ou comment elles marchent.

Si en effet une pendule marque exactement 24 heures entre deux passages consécutifs d'une même étoile au méridien, cela prouve qu'elle est réglée sur le temps sidéral. Si, par cas fortuit, elle marquait 24 heures entre deux passages du soleil, cela indiquerait que la pendule est réglée sur le temps vrai ; mais bientôt elle cesserait de marcher d'accord avec l'astre, puisque celui-ci paraît se mouvoir irrégulièrement.

Les chronomètres ou montres marines donnent plus ordinairement le temps moyen.

Comme on n'opère pas toujours dans un observatoire, et qu'on n'a par conséquent pas toujours la facilité de reconnaître la position du méridien, il faut, en beaucoup de circonstances, remplacer l'observation du passage du méridien, par quelqu'autre méthode : celle des hauteurs correspondantes est d'un grand secours dans ce cas-là.

Si l'on détermine la hauteur du soleil au moment où il passe au méridien, c'est au midi vrai qu'est rapportée l'observation. C'est au midi du jour sidéral, si l'on a observé une étoile.

De là naît la nécessité de savoir passer de l'un des modes de compter le temps à un autre. Nous traiterons cette question, après avoir indiqué la manière de régler une pendule.

525. Disposée pour le temps sidéral, elle peut avoir une avance ou un retard. Ainsi, dans les deux observations du passage d'une étoile au même méridien, la pendule a pu, 1° marquer 0 h. chaque fois, et alors elle est parfaitement réglée ; 2° marquer une même heure, autre que zéro, auquel cas, elle est affectée d'une erreur constante en avance ou en retard ; 3° ou, enfin, ne pas indiquer la même heure aux deux lectures. Il y a, dans ce cas, outre la différence constante, une variation diurne.

Quand il n'y a pas moyen d'observer le passage au méridien, on observe deux fois, chaque jour, le même astre à deux instants

où il est à la même hauteur au-dessus de l'horizon. Les heures doivent être symétriques, par rapport au méridien, si la pendule est bien réglée, et, dans tous les cas, la moitié de la différence des lectures est bien la quantité qui exprime l'heure de la seconde observation, et le supplément à 24 de la première.

h et h' représentant les deux instants d'observation, on doit avoir $h = 24 - h'$. Si $h + h' = 24 \pm \alpha$, $\frac{\alpha}{2}$ est la quantité dont la pendule est en avance ou en retard, et peut se composer d'une première différence absolue et d'une variation diurne.

Une semblable opération double, pratiquée le lendemain, donnera la même différence $\frac{\alpha}{2}$, s'il n'y a pas de variation diurne ou $\frac{\alpha \pm \alpha'}{2}$, si la marche quotidienne de la pendule n'est pas exactement de 24 heures. Dans cette circonstance $\pm \frac{\alpha'}{2}$ exprime le dérangement quotidien.

526. Supposons qu'un certain jour, après avoir fait disparaître la différence absolue et avoir déterminé $\frac{\alpha'}{2}$, on fasse une observation au moment où la pendule marque t. Si l'on veut connaître l'heure exacte t', il est clair qu'on l'obtiendra par la proportion

$$24 \pm \frac{\alpha'}{2} : 24 :: t : t', \qquad \text{d'où} \qquad t' = t\,\frac{24}{24 \pm \frac{\alpha'}{2}}$$

réduisant 24 et α' en minutes,

$$t' = t\,\frac{1440}{1440 \pm \frac{\alpha'}{2}} = t\,\frac{1}{1 \pm \frac{\alpha'}{2880}} = t\left(1 \pm \frac{\alpha'}{2880}\right)^{-1} = t\left(1 \mp \frac{\alpha'}{2880}\right)$$

d'où l'on tire

$$t - t' = \pm\, 0{,}00012\,\frac{\alpha'}{2}.t$$

On peut également procéder ainsi qu'il suit :

$$24^h : \frac{\alpha'}{2} :: t : t - t' \quad \text{et} \quad t - t' = \frac{\alpha'}{2} \times \frac{t}{24}$$

et en multipliant par $2 + \frac{1}{2}$ les deux termes de la fraction $\frac{1}{24}$

$$t - t' = (2 + \tfrac{1}{2}) \times \frac{\alpha'}{2} \times \frac{t}{60}$$

On évite la division par 60 en considérant dans le produit de

t par $\frac{\alpha'}{2}$ et par $2+\frac{1}{2}$ les minutes pour des secondes, et, en général, pour tel nombre qu'on voudra de degrés, minutes et secondes, la division par 60 est faite en prenant les degrés du nombre lui-même pour des minutes, les minutes pour des secondes, etc.

Si l'on se proposait de trouver la variation horaire de la pendule, on ferait $t = 1$ et la proportion deviendrait

$$24 : \frac{\alpha'}{2} :: 1 : t' = \frac{\alpha'}{2} \times \frac{1}{24} = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \times \frac{\alpha'}{2} \times \frac{1}{60}$$

si $$\frac{\alpha'}{2} = 12^m, \quad t' = 12^s + 12^s + 6^s = 30^s$$

si $$\frac{\alpha'}{2} = 25^m, \quad t' = 25^s + 25^s + 12^s,5 = 62^s,5$$

527. L'opération que nous venons d'indiquer est tellement simple que ce ne serait pas trop le cas de préférer l'emploi des logarithmes. Il ne nous paraît cependant pas inutile de rappeler la marche à suivre, ne fût-ce que pour avoir occasion d'indiquer certaine disposition avantageuse des tables de Callet :

On convertit 24^h, $\frac{\alpha'}{2}$ et t en secondes. D'abord $24^h = 86400''$

dont le logarithme est 4,93651374
et dont le comp^t. = 5,0648626

On a donc $t - t'$ en calculant

$$\text{Log.}\,(t - t') = \log.\,\frac{\alpha'}{2} + \log.\,t + c^t \log 86400 - 10$$

et si, comme tout à l'heure, nous supposons qu'on se propose de connaître la variation horaire de la pendule,

$$\text{Log.}\,(1_h - t') = \log.\,\frac{\alpha'}{2} + c^t \log.86400 - 10$$

Les tables des logarithmes de *Callet* contiennent une disposition particulière qui abrège les calculs.

A gauche de la colonne des nombres naturels, s'en trouvent deux autres où sont inscrits les arcs en degrés, minutes et secondes, dont chaque nombre, dans la troisième, est l'équivalent en secondes. On évite ainsi la conversion des arcs, et l'on a immédiatement leurs logarithmes dans les colonnes suivantes. Si le problème exige une marche inverse, c'est-à-dire si la solution amène à un logarithme qui représente un multiple de la seconde, on ne s'arrête pas à ce nombre, et l'on prend de suite, dans les

deux premières colonnes, l'arc exprimé en degrés, minutes et secondes.

528. Lorsque la pendule est réglée sur le temps sidéral, et qu'il est nécessaire de connaître, en temps moyen, un intervalle de temps marqué par elle, on retranche, dans la proportion de $3^m,55^s,909$ pour 24^h. Si, au contraire, le chronomètre ou la pendule sont réglés sur le temps moyen, l'heure indiquée par eux doit être augmentée dans le rapport de $3^m,56^s,555$ à 24^h.

529. Si c'est à l'aide du soleil qu'on veut régler une pendule marquant le temps moyen, il faudra convertir en *temps vrai* l'heure qu'elle donne : ce qui se fera en remarquant que,

temps vrai = *temps moyen* ± *équation du temps.*

On pourrait exprimer la même chose, en écrivant

Æ ⊙ vrai = *Æ ⊙ moyen* ± *équation du temps.*

par la raison que les heures vraies ou moyennes ne sont pas autre chose que les ascensions droites correspondantes, converties en temps.

530. Lorsque la pendule donne l'heure sidérale, on commence par transformer le temps sidéral en temps moyen, parce que, jour moyen = jour sidéral + $3^m,56^s,555$

ou *temps moyen* = *temps sidéral* $(1 + 3^m,56^s,555)$

cette expression, substituée dans celle du temps vrai indiquée plus haut, la transforme en

temps vrai = *temps sidéral* $(1 + 3^m,56^s,555)$ ± *équation du temps.*

Celle-ci se trouve, comme nous l'avons dit déjà, dans la *Connaissance des temps*, et pour tous les jours de l'année, sous le titre de *Temps moyen au midi vrai.* On l'obtient ensuite pour l'heure de l'observation, à l'aide d'une interpolation entre les valeurs relatives au midi qui précède et à celui qui suit.

Quand on veut employer la marche inverse, c'est-à dire, ramener l'heure de l'observation au mode sur lequel est réglée la pendule, on emploie les mêmes formules, en les appropriant à la circonstance.

Dans son traité d'*Astronomie pratique*, Francœur donne, sous le titre de tables 1 et 2, un moyen très-simple de convertir le temps moyen en temps sidéral *et vice versâ*. Une première colonne contient le nombre d'heures, de minutes et de secondes à transformer. S'il s'agit de trouver le temps moyen qui répond à

un temps sidéral donné, on retranche de celui-ci le nombre inscrit dans la deuxième colonne. Si, au contraire, c'est une durée comptée en temps moyen qu'on veut traduire en temps sidéral, à l'heure donnée, on ajoute la quantité contenue dans la troisième colonne.

531. La *longitude* du soleil sert à calculer sa déclinaison et son ascension droite, en ajoutant, comme donnée du problème, *l'inclinaison* de l'écliptique sur l'équateur. Les deux quantités cherchées sont, en effet, les côtés d'un triangle rectangle dans lequel on connaît l'hypoténuse et un angle aigu. Désignant par ω l'obliquité de l'écliptique, par $Æ$, D et M l'ascension droite, la déclinaison et la longitude, les formules sont § 62.

$$\text{tang.}\,Æ = \text{tang.}\,M.\cos\omega, \qquad \sin.\,D = \sin.M\,\sin.\omega,$$

On voit que ces équations pourraient également faire connaître la longitude, soit en fonction de l'ascension droite, soit en fonction de la déclinaison.

Les valeurs de la longitude du soleil, insérées dans la *Connaissance des temps*, sont calculées par rapport à l'équinoxe apparent, sans la correction relative à l'aberration. Si l'on a besoin de la longitude comptée de l'équinoxe moyen, il faut retrancher la nutation et l'aberration fournies aussi, pour toutes les époques de l'année, par la *Connaissance des temps*.

532. La latitude du soleil est sensiblement nulle. Sa longitude moyenne diffère, pendant toute l'année, d'une quantité constante de l'ascension droite du soleil moyen, puisque l'une est l'expression de la marche régulière du premier soleil fictif, que l'on suppose parcourir l'écliptique, tandis que l'ascension droite du second soleil fictif représente sa course uniforme sur l'équateur, et qu'ils parcourent l'un et l'autre 360° dans le même espace de temps. Elles seraient précisément égales, si le soleil vrai et le soleil fictif passaient ensemble au point équinoxial.

533. La distance angulaire du soleil au périgée se nomme *l'anomalie vraie;* la distance angulaire du périgée au second soleil fictif est *l'anomalie moyenne.*

On désigne sous le nom d'*équation du centre*, la différence entre les deux. Donc, en représentant par M la longitude, par ⊙ le soleil, par P le périgée, et par A l'anomalie

$$M\odot\,\textit{vrai} = MP + A\odot\,\textit{vrai},\quad M\odot\,\textit{moyen} = MP \pm A\odot\,\textit{moyen}$$

et

$$M\odot\,\textit{vrai} - M\odot\,\textit{moyen} = \textit{équation du centre}.$$

534. Nous avons déjà indiqué plusieurs méthodes, et entre autres celle qui, à l'aide de la variation diurne de la pendule, fait connaître sa variation horaire, en la multipliant par 24 et la divisant par 60.

Nous allons présenter les opérations analogues à l'aide desquelles on convertit un arc en temps et réciproquement.

Soit a un arc donné, on pose la proportion

$$15^\circ : a :: 1^h : x \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{15}{a} = \frac{4\,a}{60}$$

On multiplie donc l'arc par 4 et, dans le produit, les degrés deviennent des minutes et les minutes des secondes.

De même, un temps h étant connu, il se transforme en arc, en écrivant,

$$1^h : h^h :: 15^\circ : x, \qquad x = 15.h = h.\frac{60}{4}$$

ce qui signifie qu'après avoir obtenu le quotient de h par 4, on y prend les secondes pour des minutes et les minutes pour des degrés.

535. Après avoir parlé, d'une manière générale, de ce qui est relatif à la conversion d'un temps en un autre, et à celle d'un arc en temps, et réciproquement, disons que ces différentes opérations, déjà fort simples par elles-mêmes, le deviennent bien plus encore, lorsqu'on procède au moyen des tables insérées dans la *Connaissance des temps.*

C'est ainsi que, sous le n° VI, une table donne immédiatement la réduction du temps en parties de l'équateur ou en degrés de longitude terrestre.

La table VII résout la question inverse.

Les tables VIII et IX servent à convertir le temps sidéral en temps moyen, et réciproquement.

La table X fournit la quantité qu'il faut ajouter à l'équation du temps à midi vrai, pour avoir l'équation du temps à midi moyen.

Disons de suite, et pour ne pas revenir sur ces indications, que les parallaxes de hauteur du soleil se trouvent directement, pour tous les mois de l'année, dans la table XI.

La table XII donne celles des planètes.

La table Ire sert à corriger les hauteurs apparentes des erreurs causées par la réfraction, mais seulement dans l'hypothèse des

indications $0^m,76$ pour le baromètre, et $+ 10^g$ pour le thermomètre centigrade.

La table II sert à corriger, lorsque la précision qu'on veut donner aux calculs l'exige, les valeurs fournies par la table précédente. Les corrections alors sont faites en fonction de la pression et de la température du moment de l'observation. (Voir la formule § 549.)

Le rapport entre les distances du soleil à un point de la surface de la terre et au centre étant le même que celui des cosinus de la hauteur vraie et de la hauteur apparente, se trouve directement avec la table III, qui contient les différences logarithmiques de $\frac{\text{cosin. hauteur vraie}}{\text{cosin. hauteur appar.}}$ pour les différentes hauteurs apparentes du soleil.

La table IV donne les résultats analogues pour les étoiles ou pour les planètes dont la parallaxe est nulle.

Dans la table V sont inscrites les corrections à faire aux interpolations obtenues par une simple proportion, lorsqu'il est nécessaire de pousser l'exactitude plus loin.

536. *Temps moyen à midi vrai.* Quand le temps moyen est en avance sur le temps vrai, la pendule, réglée sur le temps moyen, indique un nombre de minutes et secondes qui est précisément l'*équation du temps.*

Lorsqu'il est en retard, la pendule marque 11^h, plus des minutes et secondes. Ce n'est alors que le complément à 12^h de l'*équation du temps.*

L'équation du temps donnée par la *Connaissance des temps* pour le midi vrai s'obtient pour une heure quelconque au moyen d'une proportion, mais toujours pour Paris. S'il s'agit d'un autre lieu dont on connaît la longitude, on la transforme en temps, que l'on ajoute à l'heure connue pour avoir celle de Paris si la longitude est occidentale, et que l'on retranche si, au contraire, elle est orientale. On prend la différence entre les valeurs de l'équation du temps sur les deux midis, entre lesquels est comprise l'heure modifiée : on fait la proportion, et l'on trouve la correction à faire à l'équation du temps pour l'un ou l'autre des deux midis, en tenant compte du signe qui doit l'affecter. Nous avons dit qu'il fallait avoir recours à la table V, lorsqu'on ne trouve pas assez exacte une simple interpolation.

537. *Conversion du temps vrai en temps moyen.* On ramène

l'heure vraie du lieu à celle de Paris : afin de pouvoir calculer l'équation du temps, on ajoute celle-ci à l'heure vraie du lieu. Nous avons dit qu'elle n'était que le complément à 12^h du *temps moyen au midi vrai*, quand il est compris entre 11 heures et midi : il faut donc, dans ce cas, et quand on ajoute celui-ci même, retrancher 12 heures du résultat.

538. *Conversion du temps moyen en temps vrai.* L'heure moyenne d'un lieu quelconque étant donnée, il s'agit de trouver l'heure vraie correspondante. On la ramène à celle de Paris. De celle-ci, on retranche l'équation du temps correspondant au midi le plus voisin, et l'on a une valeur approchée du temps vrai à Paris. Celui-ci permet de trouver l'équation du temps qu'il convient de retrancher de l'heure moyenne donnée, pour la transformer en temps vrai.

539. *Temps sidéral à midi moyen.* C'est l'ascension droite moyenne du soleil, ou l'heure sidérale du passage du soleil *moyen* au méridien de Paris.

S'il s'agit de connaître le temps sidéral au *midi moyen* d'une autre localité, connaissant sa longitude que l'on convertit en temps, on emploie une correction fournie par la table IX de la *Connaissance des temps*, en l'ajoutant au temps sidéral au midi moyen, ou en l'en retranchant, suivant que le lieu est situé à l'ouest ou à l'est de Paris.

540. *Transformation du temps sidéral en temps moyen.* Du temps sidéral donné, on retranche *le temps sidéral à midi moyen*; on soustrait du résultat la correction fournie par la table VIII, et l'on a le temps moyen cherché.

541. *Transformation du temps moyen en temps sidéral.* Le temps moyen donné servant d'argument, permet de trouver, dans la table IX, une correction qui, ajoutée au temps moyen donné et au temps sidéral à midi moyen, donne pour résultat le temps sidéral demandé.

CHAPITRE II.

PRÉCESSION, NUTATION, ABERRATION, PARALLAXE, RÉFRACTION.

542. Il nous reste, avant d'arriver aux observations et calculs de latitude, longitude et azimut, objets principaux de ce livre, à

dire quelques mots de la précession, de la nutation, de l'aberration, de la réfraction et de la parallaxe.

Précession des équinoxes. Le soleil passant à l'équinoxe en même temps qu'une certaine étoile se trouve, lors de son retour, en arrière de cette étoile, d'une quantité angulaire égale à 50″,1 : ce qui produira une révolution entière en 26,000 ans environ. La ligne équinoxiale a donc eu un mouvement dans l'écliptique, et c'est ce mouvement qu'on nomme *précession* des équinoxes. Ce phénomène s'explique parfaitement en supposant que l'arc de l'écliptique, pivotant autour de son point commun à l'axe de l'équateur, est animé d'un mouvement d'orient en occident, qui engendrerait une surface conique autour de lui.

De cette succincte explication, et les observations la confirment, il résulte que les ascensions droites, les déclinaisons et les longitudes des étoiles changent : leurs latitudes seules ne varient pas.

543. *Nutation.* On a remarqué qu'il existe des variations dans la précession des équinoxes, ainsi que dans l'obliquité de l'écliptique. On s'en rend parfaitement compte en supposant que le pôle de l'écliptique ne reste pas constamment sur le petit cercle qu'il parcourt autour de l'axe du monde, mais qu'il est animé, en outre, d'un second mouvement circulaire autour des positions moyennes qu'il occuperait successivement sur le cercle dont nous venons de parler, s'il ne produisait que la *précession des équinoxes.* Nous n'entrerons pas dans une explication complète de la *nutation ;* nous nous bornerons à dire qu'elle est due, ainsi que la précession, à l'action combinée du soleil et de la lune sur les ménisques de la terre.

Les ascensions droites, les déclinaisons et les longitudes variant en raison de la *précession des équinoxes* et de la *nutation*, qui modifient sans cesse l'obliquité de l'écliptique, on conçoit qu'il importe de savoir corriger les trois premières de ces cinq quantités en fonction des deux autres.

La variation en longitude pour une durée de temps se déduit aisément de la variation annuelle de 50″,1. Quant aux deux autres, ce sont des formules qui peuvent les faire connaître en fonction des variables.

C'est ainsi qu'en s'appuyant sur ce qu'enseigne la trigonométrie sphérique, on arrive à trois équations entre Æ, D, L, M et ω, qui sont :

$$\sin L = \sin D \cos\omega - \cos D \sin\omega \sin Æ$$

$$\sin D = \sin L \cos\omega + \cos L \sin\omega \sin M$$

et

$$\cos Æ . \cos D = \cos L . \cos M.$$

Elles permettent de calculer Æ et D en fonction de L et M, ou réciproquement. On peut d'ailleurs les transformer et les rendre plus favorables au calcul logarithmique. Quoi qu'il en soit, et pour avoir des expressions de *d*Æ et *d*D, on transforme ces premières formules pour arriver à celles-ci :

$$d.\mathrm{D} = d.\omega \times \sin.\text{Æ} + d.\mathrm{M} \times \cos.\text{Æ} \times \sin.\omega$$

$$d.\text{Æ} = d.\mathrm{M}\,(\cos.\omega + \mathrm{tang.D}.\ \sin.\omega.\ \sin.\text{Æ}) - d.\omega.\ \mathrm{tang.D}.\ \mathrm{cot}.\text{Æ}$$

Telles sont les équations qui permettent de calculer les corrections relatives à la précession et à la nutation qu'il faut faire à la déclinaison et à l'ascension droite ; on voit qu'elles sont fonction de *d*. M et *d*.ω (tableau IX).

Les astronomes ont trouvé pour *d*ω, plusieurs valeurs différant peu entre elles, et dont la moyenne paraît être

$$d.\omega = 9'',6 \times \cos.\mathrm{N}$$

N représentant la longitude du nœud ascendant de la lune.

Quant à la nutation en longitude, elle est exprimée par

$$-\,2.d.\,\omega.\,\mathrm{cot}.2.\omega$$

c'est-à-dire que $$d\mathrm{M} = -\,19.2.\cos.\mathrm{N}.\ \mathrm{cot}.2\,\omega$$

Au surplus, ce facteur se trouve tout calculé dans la *Connaissance des temps*.

Il existe des tables de nutation lunaire qui donnent *d*D et *d*Æ plus promptement que l'emploi des formules. Lorsqu'on veut avoir égard à l'influence solaire, qui d'ailleurs a moins d'importance, on se sert des mêmes tables en multipliant ce qu'elles donnent, par 0,075, et alors on a tenu compte de la *nutation luni-solaire*.

544. *Aberration*. Les astres ne sont réellement pas au lieu où ils apparaissent à celui qui les contemple. Cette illusion est due au temps que la lumière met à venir de l'astre à la terre, et du déplacement de celle-ci pendant ce temps.

En $8^{m},13^{s}$ ou 493^{s}, la lumière qui arrive du soleil parcourt environ 34 millions de lieues. Pour connaître le déplacement apparent du soleil ou réel de la terre pendant 493^{s}, il faut poser l'une ou l'autre des proportions ci-dessous :

$$365^{j},25636 : 360^{o} :: 493^{s},2 : x = 20'',253$$

$$365^{j},25636 : 406857143 \text{ lieues} :: 493^{s},2 : x = 144288 \text{ lieues.}$$

Ainsi, le rapport des vitesses est celui de 34 millions à 144288, et la distance angulaire parcourue par la terre est de 20'',253.

Concluons en passant, quoique ce soit étranger au sujet qui nous occupe en ce moment, que le mouvement de la terre est de 292 lieues $\frac{1}{3}$ environ par seconde.

En comparant, pour un instant, les vitesses à des forces qui agissent constamment sur la molécule lumineuse qui arrive en T (*fig.* 59, *planche* XXIV), nous pourrons porter sur les directions ST et TT′ des longueurs respectivement proportionnelles aux vitesses indiquées plus haut, et, pour trouver la résultante, nous imaginerons, appliquées en T, deux nouvelles forces de signes contraires, égales et parallèles à ST. L'une d'elles détruira celle-ci, et la résultante des trois se réduira à TS. Combinant ensuite cette dernière avec TT′, la molécule lumineuse sera soumise à une force unique dirigée suivant TS′; elle paraîtra donc venir à l'œil de l'observateur de S′ et non de S, c'est-à-dire d'un point situé en avant de la position réelle, dans le sens du mouvement apparent de l'objet lumineux, soleil ou astre quelconque.

En considérant la terre comme un point, et en négligeant par conséquent, comme on le fait dans ce cas, sa rotation diurne, en raison du peu d'effet qu'elle produirait sur l'aberration, l'angle que forme le rayon solaire avec l'élément de l'orbite est toujours droit. Par le fait de l'aberration, il paraît plus petit que l'angle TST′ $= 20''$, 53. Ainsi, il se trouve également démontré que l'astre paraît en arrière de sa position vraie, par rapport au mouvement réel de la terre, ou en avant si l'on considère le mouvement apparent du soleil.

Cette erreur angulaire est évidemment la même pour les étoiles et les planètes, puisque, quelle que soit leur distance à la terre, l'angle d'aberration est également la conséquence des deux vitesses qui sont toujours les mêmes, celles de la terre et de la lumière. En considérant l'immense éloignement des étoiles, on reconnaît que le rayon visuel, dirigé sur l'une d'entre elles. reste parallèle à lui-même pour toutes les positions de notre planète dans son orbite.

Si, dans un cas tout particulier, l'étoile est située dans le plan de l'écliptique, elle paraît, dans le cours d'une année, se mouvoir de e' en e'' (*fig.* 60, *planche* XXIV), par un mouvement alternatif rectiligne : e' et e'' étant symétriquement situés à $20''$, 253 de la véritable position e de l'étoile.

Si elle était placée au pôle de l'écliptique, la position apparente parcourrait, pendant l'année, une circonférence ayant un rayon de $20'',253$ et le pôle pour centre. Puis enfin, l'étoile pa-

rait décrire une ellipse plus ou moins allongée, suivant qu'elle est plus ou moins voisine du plan de l'écliptique, mais dont le grand axe est invariablement le double de 20″,253.

L'aberration pour le soleil serait constamment 20″,253, si la terre, dans sa révolution annuelle, parcourait un cercle. L'ellipsité de l'orbite la fait varier de 19″,9 à 20″,6. Elle se trouve dans la *Connaissance des temps*, pour tous les mois de l'année, de cinq en cinq jours.

L'aberration ayant lieu dans le plan de l'écliptique, affecte d'autant la longitude. Les corrections que l'on doit faire subir aux ascensions droites et aux déclinaisons, pour détruire l'effet de ce phénomène, sont données par les formules

$$d.Æ = -\frac{20'',25}{\cos.D}(\cos.Æ.\cos.M.\cos.\omega + \sin.Æ.\sin.\omega)$$

$$d.D = -20'',25.\sin.D\,(\cos.Æ\,\sin.M - \sin.Æ\cos.M.\cos.\omega + \cot.D.\cos.M.\sin.\omega)$$

Ce sont ces formules qui ont été préparées pour pouvoir être réduites en tables.

Indépendamment des tables générales de nutation et d'aberration, on a construit des tables particulières pour un grand nombre d'étoiles principales.

545. *Parallaxe*. On désigne sous ce nom la correction à faire à un angle observé sur la terre, pour le ramener au centre du globe.

Parallaxe de hauteur. Soient C le centre, O le lieu de l'observation (*fig.* 61, *planche* XXIV), S′ le soleil à une hauteur quelconque, S le même astre à l'horizon sensible de O. Désignons par P, l'angle OSC ou la parallaxe horizontale ; par P′, celle qui est relative à la position S′ ; par R le rayon de la terre et par K sa distance du soleil :

On aura, dans SOC,

$$\sin.P : \sin.90° :: R : K \qquad \text{ou} \qquad \sin.P = \frac{R}{K}$$

dans S′OC, $\sin.P' : \sin.(180°-\delta) :: R : K$

d'où $\sin P' = \frac{R}{K}\sin.\delta$ et par suite $\sin.P' = \sin.P.\sin.\delta$.

P et P′ sont assez petits pour qu'on puisse admettre la même relation entre P et P′ qu'entre leurs sinus.

On peut donc écrire $P' = P.\sin.\delta$: ce qui exprime que la parallaxe de hauteur est égale à la parallaxe horizontale, multipliée par le sinus de la distance zénithale observée.

Quand on veut l'avoir en fonction de la distance zénithale héliocentrique, il faut substituer $\Delta + P'$ à δ. On écrit alors

$$\sin.P' = \sin.P.\sin.(\Delta + P') = \sin P(\sin.P'\cos.\Delta + \sin.\Delta\cos.P')$$

$$\text{tang } P' = \sin.P\cos.\Delta\ \text{tang}.P' + \sin.P.\sin.\Delta$$

$$\text{tang}.P' \times (1 - \sin.P\cos.\Delta) = \sin.P.\sin.\Delta$$

$$\text{tang}.P' = \sin.P\sin.\Delta\,(1 - \sin.P.\cos.\Delta)^{-1}$$

$$\text{tang}.P' = \sin.P.\sin.\Delta\,(1 - \sin P.\cos.\Delta + \sin.^2P\cos.^2\Delta - \sin.^3P.\cos.^3\Delta + \text{etc})$$

et en s'en tenant aux deux premiers termes, et écrivant P′ au lieu de tang. P′.

$$P' = \frac{\sin.P}{\sin.1''}\sin.\Delta - \frac{1}{2}\frac{\sin.^2P.}{\sin.1''}\sin.2\Delta$$

546. *Parallaxe horizontale.* Celle-ci se détermine au moyen de deux observations simultanées du soleil, faites en deux points d'un même méridien.

Soient O et O′ (*fig.* 62, *planche* XXIV) les points de la terre où se prennent les distances zénithales δ et δ' : P' et p' sont les parallaxes de hauteur correspondantes, P la parallaxe horizontale qui est la même pour tous les points du globe, et C l'angle que forment les verticales de O et O′ : on a, d'après ce que nous avons trouvé plus haut,

$$P' = P.\sin.\delta\,;\ p' = P.\sin.\delta', \qquad \text{d'où} \qquad P' + p' = P(\sin.\delta + \sin.\delta')$$

D'ailleurs, le quadrilatère COSO′ donne :

$$P' + p' + C + 180° - \delta + 180° - \delta' = 360\,; \quad P' + p' + C - (\delta + \delta') = 0$$

et

$$P' + p' = \delta + \delta' - C, \qquad P(\sin.\delta + \sin.\delta') = \delta + \delta' - C$$

$$P = \frac{\delta + \delta' - C}{\sin.\delta + \sin.\delta'} = \frac{\delta + \delta' - C}{2.\sin.\frac{1}{2}(\delta + \delta')\cos.\frac{1}{2}(\delta - \delta')}.$$

547. *Distance du soleil à la terre.* Les observations qui viennent de servir à la détermination de la parallaxe horizontale, pouvant faire aussi connaître la distance du soleil à la terre, nous croyons devoir indiquer ici la suite des calculs à faire.

L'arc OO′, sur la même figure, est la différence des latitudes L et L′ supposées connues, de O et de O′. Les angles HOO′ et H′O′O sont égaux et déterminés, puisqu'ils ont l'un et l'autre

pour mesure la moitié de l'arc OO'. Le triangle SOO' peut se résoudre au moyen des trois éléments :

1° La corde qui sous-tend l'arc OO';

2° L'angle $SOO' = 90 - \delta + HOO' = 90 - \delta + \frac{L-L'}{2}$;

3° L'angle $SO'O = 90 - \delta + H'O'O = 90 - \delta' + \frac{L-L'}{2}$.

Pour trouver la longueur de la corde OO', on se sert du triangle isocèle COO'. L'angle en C est L—L' ; les deux côtés qui le comprennent sont des rayons de la terre.

Résolvant d'abord SOO', on trouve OS et O'S; puis, au moyen de SOC et de SO'C, on obtient les parallaxes α et β, ainsi que SC, distance du soleil au centre de la terre.

Pour le point A situé sur SC, la parallaxe est nulle. Cette circonstance ne se présente que lorsque le soleil passe au zénith et pour les localités situées entre les tropiques, deux fois l'année seulement pour chacune d'elles.

La plus grande parallaxe se manifeste pour les points tels que A', à l'extrémité d'un rayon CA' perpendiculaire à CS', au moment où le soleil est à l'horizon de A'. C'est précisément la parallaxe horizontale qui est égale à 8',7.

548. Les étoiles sont tellement éloignées de la terre que, pour elles, la parallaxe est nulle. Il n'en est pas de même à l'égard du soleil, de la lune et des planètes. Elle doit, dès lors, établir une différence entre les ascensions droites, déclinaisons, latitudes et longitudes géocentriques, et celles qui se rapportent aux points de la surface.

On a bien pu construire des tables qui donnent les coordonnées géocentriques du soleil, de la lune et des planètes, tandis qu'il eût été impossible de les calculer pour tous les lieux de la terre. Il faut, par conséquent, faire usage de formules qui déterminent les ascensions droites, les déclinaisons, etc., apparentes en fonction des ascensions droites, déclinaisons, etc., géocentriques.

Voici ces formules, dans lesquelles ω représente l'obliquité de l'écliptique ; Æ, D, L, M, les ascensions droites, déclinaison, latitude et longitude géocentriques, tandis que les mêmes lettres accentuées indiquent les mêmes éléments pour le lieu de l'observation.

$$(1) \quad \text{tang.Æ}' = \frac{\text{cos.D. sin.Æ} - \text{sin.P. cos L. sin.M}}{\text{cos.D. cos Æ} - \text{sin.P. cos.L. cos.M}}$$

$$(2)\quad \text{tang.D}' = \frac{\cos.Æ'\,(\sin.D - \sin.P.\sin.L)}{\cos.D.\cos.Æ - \sin.P.\cos.L.\cos M}$$

(M. longitude du lieu est égal à l'ascension droite de l'astre plus ou moins l'angle horaire, c'est-à-dire, que $M = Æ - H$).

Souvent, dans ces formules et celles qui suivent, on met en évidence la distance polaire au lieu de la déclinaison dont elle est le complément. Ce sont alors des sinus qui remplacent des cosinus et des cosinus que l'on substitue à des sinus.

$$(3)\quad Æ' - Æ = \sin.P\,\frac{\sin.(Æ - M)\cos.L}{\cos.D.\sin.1''} + \sin.^2 P.\,\frac{\cos.^2 L.\sin.^2 (Æ - M)}{2\cos.^2 D.\sin.1''}$$

$$(4)\quad \sin.d = \left(\frac{\sin.P\ \sin.L.\sin.(P + \alpha)}{\sin.H} - \frac{2\ \sin.\frac{1}{2}\alpha.\sin.D\ \cos\,(P + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin.H}\right)\cos.(D + d$$

α et d représentent $Æ' - Æ$ et $D' - D$

Pour rendre la formule (4) d'un emploi plus facile, il convient de la transformer ainsi qu'il suit :

On représente les deux termes de la parenthèse par tang.x et tang.y, on a donc

$$\sin.d = (\text{tang}.x - \text{tang}.y)\cos.D' = \left(\frac{\sin x}{\cos.x} - \frac{\sin y}{\cos.y}\right)\cos.\,(D - d)$$

$$\text{in } d = \frac{\sin.x.\cos.y - \sin.y.\cos.x}{\cos x.\cos.y}\cos.(D - d) = \frac{\sin.\,(x - y)}{\cos.x\ \cos.y}\cos.\,(D - d)$$

$$\sin.d = \frac{\sin.\,(x - y)}{\cos.x.\cos.y}(\cos D\cos d + \sin.D.\sin.d)$$

$$\text{tang } d = \frac{\sin.\,(x - y)}{\cos x.\cos.y}(\cos.D + \sin.D.\text{tang}.d)$$

$$\text{tang}.d\left(1 - \frac{\sin.\,(x - y)}{\cos.x\ \cos.y}\sin.D\right) = \frac{\sin.\,(x - y)}{\cos.x.\cos.y}\cos.D$$

$$\text{tang}.d = \frac{\sin.\,(x - y)}{\cos.x.\cos y}\cos.D\left(1 - \frac{\sin\,(x - y)}{\cos.x.\cos.y}\sin.D\right)^{-1}$$

$$\text{tang}.d = \frac{\sin.\,(x - y)}{\cos.x.\cos.y}\cos.D + \frac{\sin^2\,(x - y)}{\cos.^2x.\cos.^2y}\sin.D.\cos.D$$

et enfin, en divisant par sin.1''.

$$(5)\quad \text{tang}.d = \frac{\sin.\,(x - y)\cos.\,D}{\cos.x.\cos y\sin.1''} + \frac{\sin.^2\,(x - y).\sin.2D}{2.\cos.^2x.\cos.^2y.\sin.1''}$$

Cette formule calculée, après avoir trouvé x et y au moyen de

$$(6)\quad \text{tang } x = \sin.P.\,\frac{\sin.L.\sin.\,(P + \alpha)}{\sin.H}$$

$$(7)\quad \text{tang.}y = 2.\ \sin.\tfrac{1}{2}\,\alpha\ \frac{\sin.\text{D}.\ \cos.\left(\text{P}+\tfrac{1}{2}\,\alpha\right)}{\sin.\text{H}}$$

fournit la correction de déclinaison en fonction des données. Plus loin, nous donnerons des exemples numériques de cette question et de beaucoup d'autres.

On trouve encore, si l'on veut, la déclinaison au moyen de cette autre formule

$$\text{tang.D}'\ \text{ou tang.}\ (\text{D}-d) = \frac{\sin\ \text{Æ}'}{\sin.\text{Æ}}\left(\text{tang.D} - \frac{\sin.\text{L}.\ \sin.\text{P}}{\cos.\text{D}}\right)$$

ou en faisant
$$\frac{\sin.\text{L}.\ \sin.\text{P}}{\cos.\text{D}} = \text{tang.}\varphi \quad (8)$$

$$\text{tang. D}' = \frac{\sin.\text{Æ}'}{\sin.\text{Æ}} \times \frac{\sin.\ (\text{D}-\varphi)}{\cos.\ \text{D}\ \cos.\ \varphi} \quad (9)$$

S'il s'agissait de trouver, au contraire, les parallaxes de latitude et de longitude, on se servirait de formules analogues aux précédentes (3) (8) (9) (1) et (2), que l'on peut même en déduire en changeant les Æ et D en L, M et réciproquement, et aussi M, longitude du lieu qui est aussi l'ascension droite du zénith en sa déclinaison, que nous désignerons par D (z), et qui n'est autre chose que la latitude géocentrique du lieu de l'observation.

Ces formules seraient

$$(10)\quad \omega' = \text{M}' - \text{M} = \sin.\text{P}.\ \frac{\sin.\ [\text{M}\ (\text{A}) - \text{M}\ (z)\cos.\text{L}\ (z)]}{\cos\ \text{L}.\ \sin.1''} +$$

$$+ \sin.^2\text{P}\ \frac{\cos.^2\ (z)}{2.\cos.^2\text{L}} \times \frac{\sin\ 2\ [\text{M}(\text{A}) - \text{M}\ (z)]}{\sin.1''}$$

$$(11)\quad \text{tang.L}' = \frac{\sin.\text{M}'}{\sin.\text{M}} \times \frac{\sin.\ (\text{L}-\varphi')}{\cos.\text{L}.\ \cos.\varphi'} \ .\ .\ .\ .\ \text{tang.}\varphi' = \frac{\sin.\text{D}.\ \sin.\text{P}}{\cos.\text{L}}$$

$$(12)\quad \text{tang.M}' = \frac{\cos.\text{L}.\ \sin.\text{M} - \sin.\text{P}.\ \cos.\text{D}.\ \sin.\text{Æ}}{\cos.\text{L}.\ \cos.\text{M} - \sin.\text{P}.\ \cos.\text{D}.\ \cos.\text{Æ}}$$

$$(13)\quad \text{tang.M}' = \frac{\cos.\text{L}'(\sin.\text{M} - \sin.\text{P}.\ \sin.\text{Æ})}{\cos.\text{L}.\ \cos.\text{M} - \sin.\text{P}.\ \cos.\text{D}.\ \cos.\text{Æ}}$$

On peut se proposer de passer des Æ et D d'un astre à ses L et M. Les formules se déduisent avec la plus grande facilité du triangle PP'S (*fig.* 63, *planche* XXIV) dans laquelle $\gamma n = \text{Æ}$; $\text{S}n = \text{D}$; $\gamma m = \text{M}$; $\text{S}m = \text{L}$.

Mais on a $\text{PP}' = \omega$; $\text{P}'\text{S} = 90 - \text{L}$; $\text{PS} = 90 - \text{D}$.

Dans les triangles PSS', $\text{P}' = 90 - \text{M}$ et $\text{P} = 180° - (90 - \text{Æ}) = 90 + \text{Æ}$.

Les formules (2) et (4), § 61, nous fournissent

$$(14)\quad \sin.D = \cos.\omega.\ \sin.L + \sin.\omega.\ \cos.L.\ \sin.M$$

$$(15)\quad \text{tang}.Æ = \frac{\cos.\omega.\ \sin.M - \sin.\omega\ \text{tang}.L}{\cos.M}$$

$$(16)\quad \sin.L = \cos.\omega.\ \sin.D - \sin.\omega.\ \cos D.\ \sin.Æ$$

$$(17)\quad \text{tang}.M = \frac{\text{tang}.D.\ \sin.\omega + \cos.\omega.\ \sin.Æ}{\cos.Æ}$$

Ces relations convenant à un point quelconque du ciel, donnent le moyen de trouver les coordonnées du zénith. Aussi, les deux dernières pourraient s'écrire, dans ce cas,

$$(18)\quad \sin.(L.z) = \cos.\omega.\ \sin.(D.z) - \sin.\omega.\ \cos.(D.z)\ \sin.(Æ.z)$$

$$(19)\quad \text{tang}.(M.z) = \frac{\text{tang}.\ (D.z)\ \sin.\omega + \cos.\omega.\ \sin.\ (Æ.z)}{\cos.(Æ.z)}$$

(*Voir* les tableaux X et XI.)

549. *Réfraction.* La réfraction fait paraître les objets plus hauts, par rapport à l'horizon, qu'ils ne le sont réellement.

L'erreur angulaire causée par la réfraction varie, d'ailleurs, avec la hauteur au-dessus de l'horizon. Nulle au zénith, elle augmente de plus en plus, à mesure que le point visé s'en éloigne davantage. Elle dépend aussi de la densité de l'air et de sa température.

Pour construire des tables au moyen desquelles on pût promptement corriger les angles observés, on est arrivé, par des calculs assez longs que nous croyons inutile de placer ici, à la formule

$$r = r'\left(\frac{1}{2}\sin.nr'.\ \text{tang}.\delta - \frac{1}{4}\sin.^3nr'.\ \text{tang}.^3\delta + \frac{1}{10,725}\sin.^7nr'.\ \text{tang}.^7\delta + \text{etc.}\right)$$

dans laquelle r' est la réfraction horizontale, et r celle relative à une distance zénithale δ. n est un nombre entier qui représente $\frac{\Delta}{r} - 1$.

Les coefficients des puissances de tang.δ, dans la parenthèse, ont été trouvés par les observations des passages supérieurs et inférieurs d'un nombre suffisant d'étoiles, les mêmes que par les calculs théoriques.

Une longue suite d'observations a fait reconnaître que les réfractions sont proportionnelles aux tangentes des distances zénithales correspondantes. C'est aussi ce que justifie la formule,

38.

si l'on n'en conserve que le premier terme en négligeant les autres, en raison du peu d'importance de leurs coefficients.

$$\frac{1}{4}\sin.^{5}nr,\ \frac{1}{11}\sin.^{7}nr,\ \text{etc.}$$

Jusqu'ici, il n'est pas question de l'influence de la densité et de la température de l'air. Au moyen de raisonnements, basés sur les propriétés physiques de l'air, on a trouvé que

$$r' = r'^{\circ}.\ \frac{h'\,(1+0{,}00375)\,(1+0{,}00018)}{0^{m},76\,(1+0{,}00375.x)\,(1+0{,}00018\,h')}$$

r'° représentant la réfraction, lorsque le thermomètre marque 10° et le baromètre $0^{m},76$; r' la réfraction pour une température x et sous une pression h'.

On trouve, dans la *Connaissance des temps* et dans beaucoup d'autres ouvrages, les deux tables dont nous avons parlé au § 535, et qui ont été calculées au moyen des formules que nous venons de mettre sous les yeux du lecteur.

CHAPITRE III.

OBSERVATIONS RELATIVES A LA MARCHE D'UNE PENDULE ET A LA DÉTERMINATION DE LA LATITUDE ET DE LA LONGITUDE D'UN POINT, AINSI QUE DE L'AZIMUT D'UN COTÉ.

550. Ce chapitre renfermant plus spécialement les matières utiles à la géodésie, nous grouperons ici ceux des renseignements épars dans les chapitres précédents, qui sont indispensables pour comprendre les questions qui nous restent à traiter.

Rapport du temps sidéral au temps moyen. L'année sidérale, qui est l'intervalle de temps compris entre deux passages successifs du soleil au méridien en même temps qu'une étoile, étant de 365,2572 jours moyens, ou, 366,2572 jours sidéraux, il s'ensuit que

$$\frac{1\text{j ou }1^{m}\text{ ou }1^{s}\text{ temps moyen}}{1\text{j ou }1^{m}\text{ ou }1^{s}\text{ temps sidéral}} = \frac{366{,}2572}{365{,}2572}$$

Il résulte de cette proportion, que pour exprimer en temps moyen, un intervalle donné en temps sidéral, il faut retrancher du nombre qui exprime celui-ci, $3^{m},55^{s},909$ par 24 heures; réciproquement pour passer du temps moyen au temps sidéral, il faut ajouter dans le rapport de $3^{m}\ 56^{s},555$ par 24 heures.

Plus simplement, mais approximativement, on peut se conten-

ter de retrancher 10ˢ par heure dans le premier cas, et de les ajouter dans le second.

Calcul du temps. Le règlement d'une pendule exige deux opérations distinctes. La première a pour but de constater si elle marque réellement soit des heures sidérales, soit des heures moyennes : la seconde que nous traiterons plus tard, doit faire connaître si l'origine des heures de cette pendule, son midi, a lieu lors du passage au méridien, soit de l'équinoxe du printemps s'il s'agit du temps sidéral, soit du soleil moyen s'il s'agit du temps moyen.

Heures sidérales et heures moyennes. On s'assurera que la pendule marque les unes ou les autres de ces heures, par l'un des deux procédés suivants.

1° Après avoir établi verticalement et d'une manière invariable le limbe d'un cercle répétiteur ou celui d'un théodolite, on observera plusieurs jours de suite, les passages supérieurs ou inférieurs d'une même étoile dans ce vertical. La variation probable de la réfraction rendra nécessaire un très-léger mouvement de la lunette, dans le plan du limbe. On trouvera que ces passages sont séparés, en temps de la pendule, de T, T', T''..... Si $T = T' = T'' = ...$ la marche de la pendule est régulière, ce qui est indispensable. Si $T = T' = ... = 24^h$, elle marque des heures égales aux heures sidérales. Si enfin $T = 24^h + \alpha$, elle avance de α en 24 heures sidérales, de telle sorte qu'un intervalle de temps h exprimé par elle, équivaut (§ 525) à

$$h' = \frac{24.h}{24+\alpha} \text{ temps sidéral.}$$

Le même laps de temps écoulé entre les passages supérieurs ou inférieurs tous deux, d'une étoile au même vertical, égal à 24^h sidérales, est encore en vertu de ce que nous avons dit précédemment, égal à $24^h - 3^m55^s,909$ heures moyennes. Si donc $T = 24^h - 3^m55^s,909$, la pendule marque des heures égales aux heures moyennes. Si, au contraire, $T - 24^h + 3^m55^s,909 = \beta$, cette dernière quantité indique l'avance en 24 heures sidérales ou en $24^h - 3^m55^s,900$ heures moyennes, et pour avoir le temps moyen h'' répondant à une observation h faite sur cette pendule, il suffit de prendre

$$\text{approximativement } h'' = \frac{24.h}{24+\beta}$$

$$\text{ou plus exactement } h'' = \frac{(24^h - 3^m55^s,909)\,h}{24^h - 3^m55^s,909 + \beta}$$

Il est nécessaire, pour le calcul de h', ou pour celui de h'', que α et β soient petits, afin que les nombres qu'ils donnent en temps de la pendule puissent être confondus avec leurs correspondants du temps employé, car ce sont en effet ceux-ci qui doivent figurer dans la formule. Si cependant β par exemple était assez grand pour qu'on ne pût pas agir ainsi, on pourrait encore se servir de la pendule, mais il faudrait commencer par l'exprimer avec la même unité de temps qui figure dans l'équation $h''=\frac{24\,h}{24+\beta}$, en le remplaçant par $\beta'=\frac{24\,\beta}{24+\beta}$.

Il résulte de ce qui précède qu'une même pendule dont la marche est régulière peut être employée pour les deux modes de mesure du temps. Cependant lorsque α est très-petit, on dit qu'elle marque le temps sidéral; elle marque le temps moyen lorsque c'est β qui est très-petit.

2° La méthode que nous venons d'indiquer est la plus simple à employer lorsqu'on veut seulement constater la marche de la pendule. Mais habituellement, l'opération doit être complétée par la recherche de l'heure qu'elle marque un certain jour, à l'origine du temps moyen ou à celle du temps sidéral, c'est-à-dire lorsque le soleil moyen ou l'équinoxe du printemps passent au méridien du lieu de l'observation. Dans ce cas, il est préférable de combiner les deux vérifications, en opérant comme nous l'indiquerons plus loin, pour le règlement de la pendule, pendant plusieurs jours de suite. On reconnaît ainsi que, par exemple, le midi moyen passe au méridien lorsque la pendule marque des heures t, t', t''.... Si $t'-t=t''-t'=\ldots.=\alpha$, elle marche régulièrement et elle peut être employée à la mesure du temps moyen ou à celle du temps sidéral. Dans le premier cas, un intervalle de temps h donné par elle sera, en temps moyen, $h'=\frac{h.\,24}{24+\alpha}$.

Le temps écoulé entre les deux passages du soleil moyen au méridien, égal à 24^h moyennes, égale aussi $24^h+3^m\,56^s,555$ heures sidérales, en sorte que le temps sidéral h'' répondant au temps h de la pendule sera

$$h''=h\,\frac{24}{24+\alpha}\,\frac{24^h+3^m,56^s,555}{24^h}=h\,\frac{24^h+3^m 56^s,555}{24^h+\alpha}$$

Angles horaires et heures de la pendule. Rappelons-nous que l'angle horaire d'un astre est celui que forme avec le méridien du lieu, le méridien céleste qui contient cet astre au moment de l'observation. Cette définition faite dans le système des mouve-

ments apparents, est remplacée par la suivante, lorsqu'on se reporte aux mouvements réels : l'angle horaire est celui que forme le méridien céleste de l'astre avec le plan actuel du méridien terrestre du lieu de l'observation.

Les questions qui nous restent à traiter reposent sur les relations qui existent entre cet angle et l'heure marquée par la pendule au moment de l'observation. Rappelons succinctement ce qui a été dit à ce sujet, en divers points des chapitres précédents.

Soit PM le méridien du lieu (*Pl.* XXIV. *fig.* 64), P*e* et PS_v les méridiens célestes ou les cercles horaires qui contiennent l'étoile *e* ou le soleil S_v au moment de l'observation. Soient encore PE et PS_m les cercles horaires de l'équinoxe du printemps et du soleil moyen.

1° *Pendule réglée sur le temps sidéral.* Par un procédé que nous indiquerons plus loin, on a réglé la pendule, c'est-à-dire, que marquant déjà des heures égales aux heures sidérales (ou qu'on sait ramener à celles-ci, comme nous l'avons indiqué), l'origine de ses heures $0^h0^m0^s$ a lieu lorsque l'équinoxe du printemps passe au méridien.

Soit *t* le temps sidéral qui s'écoulera jusqu'au passage de cet équinoxe au méridien, temps donné immédiatement par l'indication de la pendule ; on a conséquemment $MPE = 15.t$.

L'angle cherché MP*e* ou $MPS_v = MPE - ePE$ ou S_vPE. Mais *e*PE et S_vPE sont précisément les ascensions droites de l'étoile et du soleil vrai, $Æ_e$ et $Æ_{sv}$ données par les tables pour certaines époques, et obtenues par interpolation pour le moment même de l'observation. L'angle horaire sera donc en fonction de l'heure de la pendule sidérale.

$P = 15\ t - Æ_e$ pour l'étoile, et $P = 15.t - Æ_{sv}$ pour le soleil.

2° *Pendule réglée sur le temps moyen.* L'indication T fournie par la pendule indique le temps moyen qu'emploiera le soleil moyen pour arriver au méridien. On a donc $MPS_m = 15.T$, puisque cet astre fictif parcourt 360° en 24 de ces heures moyennes.

Supposons d'abord que l'observation ait été faite sur le soleil.

On aura $$MPS_v = MPS_m + S_v\,PS_m = 15.\,T + S_v\,PS_m$$

Mais S_vPS_m est l'angle qui sépare le soleil vrai du soleil moyen, angle mesuré par l'équation du temps relative au moment même de l'observation et calculée par interpolation au moyen des éphémérides. Donc l'angle horaire cherché est pour une observation du soleil,

$$P = 15\,(T + \textit{équation du temps}).$$

Supposons en second lieu qu'il s'agisse d'une étoile. On aura

$$MPe = MPS_m - ePS_m = MPS_m - (ePE - S_m PE)$$
$$= MPS_m - ePE + S_v PE + S_v PS_m$$

Mais $MPS_m = 15.T$, $ePE = \mathrm{AR}_e$ ascension droite de l'étoile, $S_v PE = \mathrm{AR}_{sv}$, ascension droite du soleil, $S_v PS_m =$ l'équation du temps réduite en angle. Substituant ces valeurs, on trouve pour l'angle horaire de l'étoile observée à l'heure T de la pendule moyenne,

$$P = 15\,T - \mathrm{AR}_e + \mathrm{AR}_{sv} + 15.\ \textit{équation du temps}$$
$$= 15\,(T + \textit{équation du temps}) + \mathrm{AR}_{sv} - \mathrm{AR}_e$$

Les ascensions droites, ainsi que l'équation du temps, se trouvent dans la *Connaissance des temps*, mais rapportées aux heures du méridien de Paris. Les premières, relatives aux étoiles, ne sont données que pour des intervalles de temps très-éloignés par suite de leur peu de variation qui ne provient que de la précession et de la nutation ; elles doivent subir, avant d'être employées, les corrections qui résultent de ces phénomènes, corrections qui peuvent être obtenues immédiatement par une interpolation. Ces ascensions droites doivent également être corrigées de l'aberration. Il en est de même pour les observations du soleil, quant à cette dernière cause. Mais pour son ascension droite, ainsi que pour l'équation du temps, il est nécessaire de tenir compte assez exactement de l'époque même de l'observation, parce que leurs variations dépendant de son mouvement apparent de translation, et subsidiairement de la nutation et de la précession, sont assez considérables. La connaissance des temps donnant ces quantités (l'équation du temps et l'ascension droite) pour chaque jour, il suffira encore de faire une interpolation pour connaître leurs valeurs suffisamment exactes à l'époque de l'observation ; mais pour cela, il faudra connaître l'heure du méridien de Paris, répondant à cette époque ; on y arrivera simplement si l'on connaît déjà, d'une manière seulement approchée, la longitude du lieu de la pendule. Cette longitude réduite en temps, c'est-à-dire, divisée par 15 et ajoutée à l'heure de la pendule, fera connaître d'une manière suffisamment approchée, avec la date, l'heure et la date qui devront être consultées pour établir l'interpolation qui fournira l'équation du temps et l'ascension droite du soleil répondant à l'instant de l'observation.

551. *Règlement de la pendule.* Il y a trois manières de régler une pendule au moyen d'observations astronomiques :

1° Par le passage au méridien du soleil ou d'une étoile ;

2° Par les hauteurs correspondantes ;

3° A l'aide des hauteurs absolues ou des distances zénithales du soleil ou des étoiles.

Par le passage au méridien. Lorsqu'on opère dans un observatoire où se trouve convenablement établi un cercle mural ou une lunette méridienne, on note les heures de passage des deux bords antérieur et postérieur du soleil.

Si l'on veut vérifier la position de la lunette, ou si l'on est dans l'obligation de la placer soi-même, on a recours à une opération préalable qui consiste à observer les passages d'une étoile au méridien supérieur et inférieur. Le parallèle que décrit l'astre dans sa révolution doit être divisé en deux parties égales et, par suite, il faut que le temps soit de même durée entre le premier et le deuxième passage, qu'entre le deuxième et le troisième. S'il n'en est pas ainsi, on déplace un peu la lunette, pour la porter du côté où l'arc et le temps sont plus considérables. Après quelques tâtonnements, la lunette décrit bien le plan méridien, lorsqu'on la fait mouvoir autour de son axe horizontal.

On peut encore, si l'on dispose d'un cercle horizontal gradué, observer les excursions extrêmes d'une étoile dont la déclinaison soit plus grande que la latitude du lieu. La moyenne donne la direction du méridien.

La moyenne entre les heures du passage des deux bords horizontaux du soleil au méridien, donne l'heure vraie.

L'heure du passage d'une étoile donne l'heure sidérale.

On compare l'une ou l'autre à l'indication de la pendule, après avoir ramené celle-ci au même mode de compter le temps que celui fourni par l'observation, ou réciproquement.

Nous ne répèterons pas ici ce que nous avons dit, § 524, sur la détermination de la différence constante et de la variation diurne.

L'opération est plus simple lorsque c'est une étoile et non le soleil que l'on observe : mais, dans l'un et dans l'autre cas, on ne s'en tient pas à l'observation d'un seul jour; on procède de la même manière plusieurs jours de suite, et l'on prend la moyenne.

552. *Par les hauteurs correspondantes du soleil.* La moyenne entre les heures d'observation de deux hauteurs correspondantes du soleil serait l'heure que marque une pendule au midi vrai, si le soleil décrivait le même parallèle chaque jour : mais, sa déclinaison variant sans cesse, il faut faire une correction à $\frac{t+t'}{2}$

(t et t' indiquant les heures que marquait la pendule, lors des observations du matin et du soir).

Soient P l'angle horaire avant midi, P', ou $P \pm \alpha$ celui de l'après-midi, H l'heure, à partir de minuit, T et T' ses indications au moment des observations, on aura (*fig.* 64, *planche* XXIV), ce que marquera la pendule au midi vrai :

$$H = T + P, \quad H = T' - P', \qquad \text{d'où} \quad H = \frac{T + T'}{2} - \frac{P - P'}{2}$$

$\frac{P - P'}{2}$ est la correction relative à la déclinaison.

Pour la réduire en temps, il faut diviser par 15 ou, comme nous l'avons dit, § 533, multiplier par 4 et diviser par 60.

Nous avons posé $P' = P \pm \alpha$, par conséquent $\frac{P - P'}{2} = \mp \alpha$. ainsi, la formule qui fera connaître l'heure qu'indiquerait la pendule au midi vrai, sera

$$H = \frac{T + T'}{2} \mp \frac{\alpha}{30}$$

En définitive, c'est α qu'il faut déterminer pour que la question soit résolue.

Soient Z et P (*fig.* 65, *planche* XXIV) le zénith et le pôle, S le soleil, a le complément de la latitude L du lieu de l'observation, b le complément de la déclinaison du soleil, et z sa distance zénithale ; le triangle PZS fournira la relation suivante,

$$\cos.z = \cos.a.\cos b + \sin.a.\sin.b.\cos.P$$

ou

$$\cos.z = \sin.L.\sin.D + \cos.L.\cos.D.\cos.P \qquad (1)$$

La distance zénithale est la même pour les deux observations, mais, à la seconde, P et D ont changé et sont devenus $P \pm \alpha$, $D \pm \delta$, tandis que L est constant. Les éléments relatifs à la seconde observation donnent ainsi,

$$\cos.z = \sin.L.\sin.(D + \delta) + \cos.L.\cos.(D + \delta)\cos.(P + \alpha)$$

$$(1) \quad \cos.z = \sin.L.\sin.D.\cos.\delta + \sin.L.\cos.D.\sin.\delta +$$
$$+ \cos L (\cos.D.\cos.\delta - \sin.D.\sin.\delta)(\cos.P.\cos\alpha - \sin.P.\sin.\alpha)$$

δ et α sont assez petits pour qu'on puisse considérer leurs cosinus comme égaux à l'unité et prendre les arcs pour les sinus : ce qui réduit la dernière équation à

$$\cos.z = \sin L.\sin.D + \delta.\sin L.\cos.D + \cos.L(\cos.D - \delta.\sin.D)(\cos.P - \alpha.\sin.P)$$

et enfin

$$(2) \quad \cos.z = \sin.L.\sin.D + \delta(\sin.L.\cos.D - \cos.L.\sin.D.\cos.P) +$$
$$+ \cos.L.\cos.D.\cos.P - \alpha.\cos L\cos.D.\sin.P.$$



On voit que nous avons, dans le produit, négligé le terme $+\alpha.\delta.$ cos.L. sin.D. sin.P, comme sans importance, par rapport aux autres.

Si l'on retranche la formule (1) de celle-ci, on élimine cos. z, et l'on trouve, entre les autres éléments, une relation indépendante de la distance zénithale, et par conséquent la même pour les diverses couples d'observations que l'on voudra combiner. (2) moins (1) fournit ce qui suit :

$$o = \delta\ (\text{sin.L}\ \ \text{cos.D} - \text{cos.L. sin.D.cos.P}) - \alpha.\ \text{cos.L. cos.D. sin.P}$$

ou $$\alpha = \delta \left(\frac{\text{tang.L}}{\text{sin.P}} - \text{tang.D. cot.P}\right)$$

δ connu en degrés, est converti en temps (§ 512) ; il est positif, quand le soleil s'avance vers le nord, c'est-à-dire du solstice d'hiver au solstice d'été, et négatif pendant les autres six mois de l'année. Quant aux tangentes de L et de D, elles sont positives, lorsque le soleil est dans l'hémisphère boréal : enfin, cot.P est positive si P est plus grand que 90° ou 6 h.

Nous pouvons maintenant substituer α dans l'expression de H qui devient

$$H = \frac{T + T'}{2} \pm \frac{\delta}{30} \left(\frac{\text{tang.L}}{\text{sin.P}} - \text{tang. D. cot. P}\right)$$

Telle sera donc l'heure que marquera la pendule au midi vrai.

Pour avoir celle qu'elle marquerait au midi moyen, il n'y aura plus qu'à ajouter l'équation du temps.

La distance zénithale apparente, commune aux deux observations, est supposée se rapporter au même état atmosphérique pour que la réfraction soit la même. On pourrait avoir égard à la variation de celle-ci, mais il est plus simple d'en atténuer l'influence par des observations réitérées.

La variation δ de la déclinaison du soleil est donnée par les tables, puisqu'on connaît toujours d'une manière approchée l'époque de l'opération et l'intervalle de temps qui sépare les deux observations. Cette variation est toujours assez petite, surtout vers les solstices, pour qu'on puisse se contenter de calculer approximativement la correction qui en résulte. Il suffira donc de connaître d'une manière approchée chacun des facteurs qui entrent dans le coefficient

$$\left(\frac{\text{tang.L}}{\text{sin P}} - \text{tang.D. cot. P}\right)$$

La déclinaison D sera prise égale à celle qui correspondra à midi du lieu de l'observation, celle-ci calculée, en rapportant ce midi à l'heure du méridien de Paris pour laquelle les déclinaisons sont fournies par la *Connaissance des temps*, ou plus simplement même, par suite de son peu de variation, en la prenant pour le midi correspondant de Paris.

La latitude L doit être connue d'une manière approchée.

Enfin, l'angle horaire P devra être calculé approximativement par la résolution de l'équation (1) transformée en

$$\sin.\tfrac{1}{2}\,P = \sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(z+L-D)\sin\tfrac{1}{2}(z+D-L)}{\sin L\ \sin.D}}$$

dans laquelle on mettra pour z la distance zénithale observée, sans correction. Plus simplement encore, on pourra se contenter de prendre $P = \frac{T+T'}{2}$. 15.

553. On arrive bien plus simplement à la même formule, en faisant usage du calcul différentiel. Voici comment on procède : on part de la formule (1).

$$\cos.z = \sin.L.\sin.D + \cos.L.\cos.P.\cos.D$$

L et z sont constantes, P et D variables, donc il vient, en différenciant,

$$o = \sin.L.\cos D.dD - \cos.L.\cos.P.\sin.D.dD - \cos.L.\cos.D.\sin.P.dP$$

d'où $$dP = dD\,\frac{\sin.L.\cos.D - \cos.L.\cos.P.\sin.D}{\cos.L.\cos.D.\sin.P}$$

et, en reprenant pour dP et dD, les notations adoptées dans la première démonstration, et effectuant les divisions possibles,

$$\alpha = \delta\left(\frac{\text{tang.L}}{\sin.P} - \text{tang D.cot.P}\right)$$

L'angle horaire, converti en temps et combiné convenablement avec l'ascension droite apparente de l'astre, donne l'heure sidérale; PM (*fig.* 66, *planche* XXIV) représente le méridien ; $e e'$ les positions occidentale et orientale de l'étoile ; γ le point équinoxial. γ M, ou l'heure sidérale, est évidemment égale à l'ascension droite de l'étoile + P ou — P', suivant qu'elle est située en e ou en e'.

On peut donc écrire :

$$T.S = Æ \pm P.$$

554. *Par les hauteurs absolues du soleil.* On peut atteindre le même résultat sans s'astreindre à saisir les instants où le soleil, après midi, se trouve précisément aux mêmes hauteurs qu'avant, et sans courir la chance défavorable que peut-être le soleil sera masqué par des nuages aux instants de l'après-midi correspondant aux observations antérieures.

Pour cela, on observe la distance zénithale apparente δ du soleil, soit avant, soit après midi : on répète cette observation un certain nombre de fois, en tenant compte à chaque fois de l'heure qu'indique la pendule.

On prend la moyenne des observations et celle des heures : on corrige la distance zénithale moyenne de la parallaxe et de la réfraction, la première correction étant négative et la seconde positive. L'heure moyenne est assez exacte, pour entrer dans les tables qui donnent la déclinaison du soleil. Il faut, d'ailleurs, connaître la latitude du lieu. La résolution du triangle SPZ (*fig.* 65, *planche* XXIV) donne un angle horaire qui est l'heure même, si l'observation est faite après midi, ou son supplément à 24 heures, si elle a lieu avant. Dans ce dernier cas, il faut diminuer d'un jour le quantième du mois.

Cet angle horaire est déterminé au moyen des trois côtés du triangle qui sont : la distance zénithale apparente, le complément de la latitude et celui de la déclinaison.

Nous avons dit quelles sont les corrections que doit subir δ. Quant à la déclinaison, elle doit être calculée pour le jour, l'heure et le lieu de l'observation. Ce calcul exige la connaissance approchée de la longitude du lieu, pour pouvoir connaître l'heure de Paris correspondant à l'instant de l'observation (*Voir* le tableau XII).

555. *Par l'observation des étoiles.* Les deux méthodes des *hauteurs correspondantes ou absolues* conviennent également, lorsque au lieu du soleil, on a observé une étoile.

La moyenne des heures qui correspondent à des hauteurs égales, de part et d'autre du méridien, donne l'heure du passage de l'étoile dans ce plan. Cette opération, exécutée deux jours de suite, indique le temps que marque la pendule en 24 heures sidérales. On saura donc de combien il faudra la corriger pour l'amener à marquer précisément 24 heures sidérales, entre deux passages consécutifs d'une étoile au méridien. Cette correction se fait en changeant la durée des oscillations du balancier de la pendule.

Nous répétons que, pour avoir l'expression du temps sidéral ou de son supplément, il faut ajouter l'angle horaire à l'ascension droite de l'étoile.

S'il s'agit de régler la pendule par les hauteurs absolues d'une étoile, il faut, comme précédemment, calculer son angle horaire au moyen de la latitude du lieu, la distance zénithale et la déclinaison de l'astre. Ici, il n'y a pas de correction de parallaxe pour δ; mais pour la déclinaison, on doit tenir compte de la précession, de la nutation et de l'aberration.

556. *Latitudes.* Il existe plusieurs méthodes pour déterminer la latitude du lieu où l'on fait les observations.

1° *Par les doubles passages des étoiles circompolaires.*

Désignons par h et h' les hauteurs d'une étoile dont e et e' présentent (*fig.* 67, *planche* XXIV) les passages supérieur et inférieur au méridien, h est le complément de la distance zénithale Δ : celle-ci est plus grande que l'observation δ, de l'erreur de réfraction r,

par conséquent $$h = 90 - \Delta = 90 - (\delta + r)$$

de même $$h' = 90 - \Delta' = 90 - (\delta' + r')$$

et $$\frac{h + h'}{2} = 90 - \tfrac{1}{2}(\delta + \delta' + r + r')$$

La latitude L du lieu (PH' sur la figure) est la moyenne entre eH' et $H'e'$, donc :

$$L = 90° - \tfrac{1}{2}(\delta + \delta' + r + r')$$

Il ne faut point oublier de noter les indications du thermomètre et du baromètre pour corriger la réfraction.

La seule difficulté de ce procédé, si simple dans un observatoire, consiste à placer exactement la lunette dans le plan méridien.

557. *Par des hauteurs méridiennes simples.* Lorsque l'étoile est peu éloignée du pôle, et si l'on se sert du passage supérieur, on observe $Ze = \Delta$; on connait, au moyen des tables, sa déclinaison $Ae = D$, et l'on a ainsi la latitude, puisque $AZ = Ae - Ze$, ou $L = D - \Delta$.

En employant le passage inférieur e', on a

$$AZ \text{ ou } PH' = 180 - (A'e' + Ze'), \quad \text{c'est-à-dire} \quad L = 180 - (D + \Delta).$$

La déclinaison se compte toujours de 0° à 90°. L'astre peut

être voisin de l'équateur. En le supposant en S, un peu au-dessus de l'équateur AA', on a

$$AZ = AS + SZ, \quad \text{c'est-à-dire} \quad L = D + \Delta$$

Quand l'étoile occupe la position S',

$$AZ = ZS' - AS', \quad \text{c'est-à-dire} \quad L = \Delta - D.$$

La déclinaison D, s'il s'agit d'une étoile, doit être corrigée du fait de la précession, de la nutation et de l'aberration. Lorsque l'on fait usage du soleil, il ne s'agit de tenir compte que de la réfraction et de la parallaxe de hauteur pour la distance zénithale, ainsi que du demi-diamètre apparent, si l'on n'a observé que l'un des bords.

558. *Par les hauteurs observées près du méridien.* Soit E la position d'une étoile peu distante du méridien (*fig.* 68, *planche* XXIV), E*e* est un petit arc appartenant au parallèle que décrit l'étoile, et dont le pôle est P. Les arcs EP, *e*P sont égaux et par suite EZ $>$ *e*Z (§ 49), EZ est la distance zénithale observée, et Z*e* en est la projection sur le méridien : ZP $= 90 - L$; P*e* $= 90 - D$. Donc Z*e* $=$ ZP $-$ P*e* $= D - L$, et si l'on pose ZE $=$ Z*e* $+ x$, on aura ZE $= D - L + x$.

Le triangle ZEP donne la relation

$$\cos.ZE = \cos.ZP.\cos.PE + \sin.ZP.\sin.PE.\cos.P,$$

P désignant l'angle horaire. Nous pouvons écrire l'équation cidessus sous la forme

$$\cos.[(D-L)+x] = \sin.L.\sin.D + \cos.L.\cos.D.\cos.P$$

et parce que $\cos.P = 1 - 2.\sin.^2\tfrac{1}{2}P$

$$\cos(D-L)\cos x - \sin(D-L)\sin.x = \sin.L\sin.D + \cos.L\cos.D - 2\cos.L\cos.D\sin.^2\tfrac{1}{2}P$$

Mettons $1 - \frac{x^2}{2}$ pour $\cos.x$ et x à la place de $\sin.x$

$$\cos.(D-L) - \frac{x^2}{2}\cos.(D-L) - x\sin.(D-L) = \cos.(D-L) - 2.\cos.L.\cos.D.\sin.^2\tfrac{1}{2}P$$

Supprimons le terme commun aux deux membres, et il viendra, en changeant les signes,

$$x.\sin.(D-L) + \frac{x^2}{2}\cos(D-L) = 2.\cos.L.\cos.D.\sin.^2\tfrac{1}{2}P.$$

Pour réduire à une équation du premier degré, nous employons un procédé dont nous nous sommes déjà servi § 456, en faisant d'abord x^2 nul. Nous trouvons

$$x = 2\,\frac{\cos.L.\cos.D}{\sin.(D-L)}\sin.^2\tfrac{1}{2}P$$

substituée dans le terme x^2 de la formule complète, et divisant par sin.1″, il vient

$$x = 2\,\frac{\cos.L\cos.D}{\sin.(D-L)}\,\frac{\sin.^2\frac{1}{2}P}{\sin.1''} - 2\,\frac{(\cos.L.\ \cos.D.\ \sin.^2\frac{1}{2}P)^2\cot(D-L)}{\sin.1''}.$$

Le plus ordinairement on se contente, pour trouver x, de calculer le premier terme du second membre en négligeant le deuxième. C'est à quoi nous serions plus simplement arrivé, si, dans l'une des premières transformations, nous avions remplacé cos.x par l'unité, au lieu de prendre les deux termes $1 - \frac{x^2}{2}$ de la série.

Si nous désignons par Δ la distance zénithale Z*e* de l'étoile au méridien, nous pouvons, parce qu'elle est égale à D — L, écrire ainsi la valeur de x

$$x = 2\,\frac{\cos.L.\cos.D}{\sin\Delta}\,\frac{\sin.^2\frac{1}{2}P}{\sin.1''}$$

Il est à remarquer que x est donné en fonction de la latitude, encore bien que ce soit pour trouver celle-ci qu'on cherche x. Nous avons déjà rencontré un semblable cercle vicieux, § 403, à l'occasion de la *réduction au centre*. Ici, comme ailleurs, il est facile de faire voir qu'il n'y a pas lieu d'être arrêté par cette circonstance. Et, en effet, les observations étant faites, comme nous l'avons supposé, lorsque l'astre est très-voisin du méridien, la correction x ne changerait pas sensiblement, même pour des latitudes très-différentes; à plus forte raison, quand la valeur employée pour L diffère peu de la vérité. On peut, alors, prendre pour L la déclinaison diminuée de la distance zénithale Z*e* observée, et substituer de même celle-ci à Δ, au dénominateur.

Le facteur $\frac{\sin.^2\frac{1}{2}P}{\sin.1''}$, que l'on trouve dans les tables de réduction, est assez petit pour qu'une légère inexactitude dans l'autre facteur $2\,\frac{\cos.L.\cos D}{\sin.(D-L)}$ n'apporte aucune erreur appréciable dans la valeur de x.

Si, poussé par le scrupule, on voulait atteindre une plus grande précision, on calculerait une première fois L, pour l'introduire dans la formule : mais le second résultat donnerait, pour x, une quantité qui ne différerait pas sensiblement de la première.

On fait plusieurs observations de distances zénithales, soit avant, soit après midi : on prend la moyenne entre elles : on fait aussi la moyenne des heures indiquées par la pendule, ce



qui permet de connaître l'angle horaire moyen; puis, à l'aide de ces éléments, on trouve x. (*Voir* le tableau XIII.)

Si nous ne nous étions pas proposé d'indiquer principalement tous les procédés des calculs, d'une manière quelquefois minutieuse même, nous nous en tiendrions à ce qui précède : mais notre tâche ne serait pas remplie; nous plaçons, à la fin de l'ouvrage, des tableaux et des exemples qu'il faut que le lecteur puisse comprendre, et pour lesquels nous sommes obligés d'ajouter des explications nouvelles.

D'abord la formule $x = 2 . \frac{\sin.^2 \frac{1}{2} P}{\sin. 1''} \frac{\cos.D . \cos.L}{\sin.(D-L)}$ exige la connaissance de l'angle horaire P.

Cet angle s'obtiendra au moyen de l'heure corrigée de la pendule, ainsi qu'il a été indiqué à la fin du § 550. Si, pour préciser les indications relatives au tableau XIII, nous supposons les observations faites sur le soleil, avec une pendule marquant le temps moyen, on devra prendre

$$P = 15\ (t + \textit{équation du temps})$$

l'équation du temps étant prise positivement lorsque le soleil moyen est en avance sur le soleil, et réciproquement.

L'heure t doit être corrigée d'abord de l'avance du midi de la pendule sur le midi moyen, pour le jour de l'observation, ce qui se fait par une simple soustraction, ou par une addition, puis de la fraction de l'avance diurne qui répond au temps t. Cette seconde correction peut se faire de la manière suivante :

En 24 heures de temps moyen, la pendule marque $24 \pm \rho$, ρ représentant un certain nombre de secondes. L'angle P fourni par la pendule devra donc subir une correction et devenir P' que donnera la proportion

$$24^h \pm \rho : \rho :: P : P' - P = P \frac{\rho}{24^h \pm \rho}$$

d'où

$$P' = P \left(1 + \frac{\rho}{24^h \pm \rho}\right)$$

et en représentant $\frac{\rho}{24 \pm \rho}$ par ρ', $\quad P' = P(1 + \rho')$

Cela posé, remarquons que P est toujours un très-petit arc de 3° ou 4° au plus, ou de 16^m en temps, et nous pourrons dire que $\sin.^2 \frac{1}{2} P'$ et $\left(\frac{P'}{2}\right)^2$ diffèrent très-peu l'un de l'autre, de telle sorte

que, dans la valeur de x, on peut mettre $2\left(\frac{P'}{2}\right)^2$, c'est-à-dire $2\left(\frac{P}{2}\right)^2\left(1+\rho\right)^2$, ou encore $\frac{1}{2}P^2\left(1+\rho'\right)^2$.

On peut également, par suite de la petitesse de ρ', remplacer $(1+\rho')^2$ par $1+2\rho'$.

Remarquons que la substitution de $\left(\frac{P}{2}\right)^2$ à $\sin.^2 \frac{1}{2} P$ a exigé l'emploi de l'angle horaire en rapport, en sorte que si nous continuons à désigner cet angle par P représentant un nombre de secondes, il faudra multiplier par $\sin.^2 1''$, et la formule qui donnera x en secondes sera

$$x = \frac{1}{2} P^2 \sin.1'' (1 + 2\rho') \frac{\cos.L.\cos.D}{\sin.(D-L)}$$

ρ' étant égal à $\frac{\rho}{24^h \pm \rho}$ ou à $\frac{\rho}{86400'' \pm \rho}$.

Nous avons dit ailleurs qu'on prenait, pour la latitude L, en tant qu'on la considère comme simple élément de calcul, une valeur approchée, suffisamment exacte. Quant à D, on en trouve la variation diurne dans la *Connaissance des temps*, et l'on en conclut celle qui correspond à l'angle horaire moyen.

L'arc total parcouru par la lunette supérieure du cercle répétiteur, si l'on emploie cet instrument, divisé par le nombre des observations, donne la distance zénithale moyenne, dont la hauteur apparente du soleil est le complément. Les tables I et II de la *Connaissance des temps*, déjà citées, fournissent une première correction relative à la réfraction toujours additive pour les distances zénithales, et par conséquent négative par rapport à la hauteur des astres au-dessus de l'horizon. La table XI donne la correction de parallaxe, de signe contraire à celle de réfraction.

La distance zénithale moyenne se trouve ainsi transformée en distance zénithale vraie ou géocentrique. On combine celle-ci avec la déclinaison calculée pour l'heure même de l'observation, s'il s'agit du soleil. On trouve dans la *Connaissance des temps* la déclinaison du soleil pour chaque jour de l'année, et par conséquent la variation diurne.

On y trouve également les Æ et D de 114 étoiles principales, calculées de dix jours en dix jours, et celles de la polaire, pour tous les jours de l'année à midi moyen de Paris. La variation est si faible, pour les étoiles, qu'on n'a pas de parties proportion-

nelles à calculer pour connaître la déclinaison d'une étoile, le jour de l'observation : on doit la regarder comme constante pendant la période de dix jours qui comprend celui de l'observation.

Nous avons dit, § 557, comment, d'après la position de l'astre, on pouvait avoir, en désignant par Δ la distance zénithale,

$$L = D - \Delta, \quad L = 180^\circ - (D + \Delta), \quad L = D + \Delta, \quad L = \Delta - D$$

Il nous reste à donner une dernière explication, celle du tableau dans lequel s'inscrivent les éléments fournis par l'observation et se font les calculs. (*Voir* le tableau XIII.)

La première colonne contient les chiffres représentant le nombre des répétitions.

Dans la deuxième colonne, on écrit les heures que marque la pendule à l'instant de chaque observation : les unes sont antérieures à midi, les autres postérieures.

On prend l'expression du temps moyen au midi vrai, pour le jour de l'observation, dans la *Connaissance des temps*. La différence de ce nombre et des heures de la pendule donne les angles horaires que l'on écrit dans la troisième colonne, en tenant compte toutefois, et dans le sens convenable, de l'avance ou du retard de la pendule. Ils y sont exprimés en secondes de temps.

La moyenne de ces angles horaires, comptés avec le signe qui indique ceux qui appartiennent au matin et ceux qui dépassent midi, sert à trouver plus tard la variation en déclinaison du soleil.

Chacun des angles horaires exprimé en secondes de temps a servi lui-même ou sert ensuite d'argument pour trouver (table XVI, *Astronomie* de Puissant, ou table X, *Astronomie pratique* de Francœur) la *réduction au méridien* correspondante. On les écrit successivement dans la quatrième colonne, on en fait la somme, que l'on divise par le nombre d'observations, et l'on a la réduction moyenne, représentée dans la formule par $2\,\frac{\sin.^2 \frac{1}{2} P}{\sin. 1''}$, ou par $\frac{1}{2}\,P^2 \sin. 1''$.

559. *Par la hauteur de la polaire.* Cette dernière méthode évite l'emploi d'une valeur approchée de L, dans la recherche de x; mais elle n'est avantageuse qu'autant que la déclinaison est très-grande. Cette condition se manifeste clairement dans la formule que nous allons chercher.

$ZP = 90 - L$ (*fig.* 69, *planche* XXIV).

$ZE = 90 - h = \delta$.

$PE = 90 - D = d$ et $P =$ l'angle horaire.

On a observé δ ; on connaît l'angle P, et l'on veut trouver L.

L'étoile que l'on observe étant voisine du pôle, on peut représenter la petite différence qui existe entre ZP et ZE par x, c'est-à-dire que

$$x = zP - zE = 90 - L - (90 - h) \quad \text{ou} \quad x = h - L \quad \text{et} \quad L = h - x$$

On a dans le triangle ZEP,

$$\cos.zE = \cos.zP.\cos.PE + \sin.zP.\sin PE.\cos.P$$

$$\sin.h = \sin.L.\cos.d + \cos.L.\sin.d.\cos.P$$

$$\sin.h = \sin.(h-x)\cos.d + \cos.(h-x)\sin d.\cos.P$$

$$\sin h = (\sin.h.\cos.x - \sin.x\cos.h)\cos.d + (\cos.h.\cos.x + \sin.h.\sin.x)\sin.d.\cos.P$$

Réunissant les termes en $\sin.x$, et ceux en $\cos.x$, puis divisant par $\sin.h$,

$$1 = \cos.x\,(\cos.d + \cot.h.\sin.d.\cos.P) - \sin x\,(\cot h.\cos.d - \sin.d.\cos.P)$$

d étant très-petit, on peut, en substituant les séries à son sinus et à son cosinus, négliger les puissances supérieures à la troisième,

$$1 = \cos.x\left[\left(1 - \frac{d^2}{2}\right) + \left(d - \frac{d^3}{6}\right)\cot h\cos.P\right] -$$

$$-\sin.x\left[\left(1 - \frac{d^2}{2}\right)\cot.h - \left(d - \frac{d^3}{6}\right)\cos.P\right]$$

ou, en effectuant les multiplications dans les parenthèses,

$$1 = \cos.x\,\left(1 + d.\cot.h.\cos.P - \frac{d^2}{2} - \frac{d^3}{6}\cot.h.\cos.P\right) -$$

$$-\sin.x\,\left(\cot.h - d.\cos.P - \frac{d^2}{2}\cot.h. + \frac{d^3}{6}\cos.P\right) \quad (\alpha)$$

x et d croissent et diminuent ensemble : lorsque $d = o$, x est nul aussi. On peut donc poser

$$x = Ad + Bd^2 + Cd^3$$

en s'arrêtant à la troisième puissance du petit angle d.

A, B, C sont des coefficients indéterminés que nous calculerons plus tard : mais, d'abord, introduisons cette expression de x dans les séries qui représentent son sin. et son cos., et qui deviennent ainsi,

$$\cos.x = 1 - \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{A^2}{2}d^2 - ABd^3$$

$$\sin.x = Ad + Bd^2 + Cd^3 - \frac{A^3}{6}\,d^3 = Ad + Bd^2 + \left(C - \frac{A^3}{6}\right) d^3$$

Ces valeurs substituées dans l'équation (α) la transforment en celle qui suit :

$$1 = (1 - A^2d^2 - ABd^3)\,(1 + d.\cot.h.\cos.P - \frac{d^2}{2} - \frac{d^3}{6}\cot.h.\cos.P) -$$

$$-(Ad + Bd^2 + \left(C - \frac{A^3}{6}\right) d^3)\;(\cot.h - d\cos.P - \frac{d^2}{2}\cot.h + \frac{d^3}{6}\cos.P)$$

Multipliant et ordonnant par rapport aux puissances de d

$$\begin{array}{rl|l|l|l}
1 = 1 + \cot h.\cos.P & d & -\frac{A^2}{2} & d^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ AB & d^3 \\
- \quad A\cot.h & & -\frac{1}{2} & -\left(\frac{A^2}{2}\cot.h - \frac{\cot.h}{6} - B\right)\cos.P & \\
 & & + A\cos.P & -\left(C - \frac{A}{2} - \frac{A^3}{6}\right)\cot.h & \\
 & & - B\cot.h & &
\end{array}$$

Cette équation de la forme

$$o = Py + Qy^2 + Ry^3$$

pour être satisfaite, quelle que soit la valeur de y, exige que

$$P = o, \quad Q = o, \quad R = o$$

Il faut donc que

$$A.\cot.h - \cos.P\cot.h = o$$

$$A.\cos.P - B.\cot.h - \frac{A^2}{2} - \frac{1}{2} = o$$

$$AB + \left(\frac{A^2}{2}\cot.h - \frac{1}{6}\cot.h - B\right)\cos.P + \left(C - \frac{A}{2} - \frac{A^3}{6}\right)\cot.h = o$$

ces trois équations déterminent A, B, C.

De la première on tire $A = \cos.P$, qui, substitué dans la seconde, donne

$$\cos.^2P - B.\cot.h - \frac{1}{2}\cos.^2\frac{P}{2} - \frac{1}{2} = o$$

ou
$$B\cot.h = -\frac{1}{2}(1 - \cos.^2P)$$

et par suite
$$B = -\frac{1}{2}\sin.^2P\,\text{tang}.h$$

Dans la troisième, on supprime d'abord AB et — B cos. P qui se détruisent, et l'on en tire, en divisant par le facteur commun, cot. h.

$$C = \frac{1}{2}\cos P - \frac{1}{6}\cos.P - \frac{1}{2}\cos.^3P + \frac{1}{6}\cos.^3P$$

$$C = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)\cos.P.\,(1 - \cos^2P)$$



et enfin $C = \frac{1}{3} \cos.P. \sin.^2P$

Nous avions posé $x = Ad + Bd^2 + Cd^3$

donc $x = d. \cos.P - \frac{d^2}{2} \sin.^2P \tang.h + \frac{d^3}{3} \cos.P. \sin.^2P.$

L'emploi des développements en séries de sin. x et cos. x a exigé que cet angle fût exprimé en rapport ; il en avait été de même de d, par suite des mêmes opérations faites sur sin. d et cos. d. Dans ces circonstances la formule finale est homogène ; mais on a besoin de connaître x en secondes, et d est donné par l'emploi de la même unité.

Si nous conservons les signes x et d pour désigner les nombres de secondes, nous savons que les expressions en rapport des mêmes angles de la formule seront égales aux premières multipliées par sin. 1″. On aura donc, en supprimant le facteur commun,

$$x = d. \cos.P - \frac{d^2}{2} \sin.^2P. \sin.1''. \tang.h + \frac{d^3}{3} \sin.^2 P. \cos.P. \sin.^2 1''$$

$$L = h - d. \cos.P + \frac{d^2}{2} \sin.^2 P. \sin.1''. \tang.h - \frac{d^3}{3} \sin.^2 P. \cos.P. \sin.^2 1''$$

L'angle horaire P est obtenu, comme nous l'avons indiqué au § 550, en fonction de l'heure de la pendule, corrigée, s'il y a lieu, de l'avance diurne, c'est-à-dire que, si la pendule marque les heures sidérales, il est égal à 15 T augmenté ou diminué de l'ascension droite de l'étoile polaire ; si la pendule marque les heures moyennes, il est égal à

$$15\,(T + \textit{équation du temps}) + Æ_{\odot} - Æ_{e}$$

L'angle à l'horizon h doit être corrigé de la réfraction.

Telle est la formule à l'aide de laquelle on trouve la latitude ; mais elle ne peut, ainsi que nous l'avons annoncé, servir qu'autant que d, complément de la déclinaison, est très-petit. C'est donc l'observation de la polaire qui est la plus favorable. On a pu remarquer, en effet, que la série qui donne L, se développant suivant les puissances ascendantes de d, n'est convergente qu'autant que d est très-petit. (*Voir* le tableau XIV.)

L'observation de la polaire, comme de toute autre étoile d'ailleurs, est plus facile, lorsqu'elle est le plus loin possible du méridien, c'est-à-dire, quand elle atteint le cercle horaire de six heures, parce qu'alors elle reste un peu plus longtemps sur le

même vertical. Cette circonstance permet de faire l'observation plus exactement.

560. *Détermination simultanée de l'heure et de la latitude.* Le procédé exposé au § 558, qui repose sur l'observation d'un astre près du méridien, exige une connaissance approchée de la latitude, et il ne peut être employé qu'avec le secours d'une pendule réglée sur l'un ou l'autre des deux modes de compter le temps. L'observation de l'étoile polaire demande seulement que cette deuxième condition soit satisfaite.

On peut se dispenser également de cette seconde condition, pourvu qu'on ait seulement une pendule marquant, soit les heures sidérales, soit les heures moyennes, sans faire connaître le passage au méridien de l'origine du temps employé. Le procédé général suivant servira simultanément à trouver la latitude et à régler la pendule.

Le triangle formé par le pôle, le zénith et une étoile quelconque, donne toujours, en désignant par δ la distance zénithale, par L,D,P, la latitude, la déclinaison et l'angle horaire relatif au moment de l'observation,

$$\cos.\delta = \sin.D \sin.L + \cos.D \cos.L \cos P$$

Une seconde observation de la même étoile donnera

$$\cos.\delta' = \sin.D \sin.L + \cos.D \cos.L \cos.P'$$

La pendule indiquera par la différence de ses heures, ramenées, s'il y a lieu, à représenter des heures sidérales,

$$\frac{P' - P}{15} = a$$

On aura ainsi trois équations renfermant trois inconnues P.P'. et L qu'il sera possible de déterminer.

L'observation peut se faire également sur le soleil, et la pendule peut aussi bien donner les heures sidérales ou les heures moyennes : suivant les cas, la transformation de l'indication a^h en angle horaire P — P' se fera par l'un des moyens indiqués au § 550.

Si l'observation a été faite sur une étoile, la déclinaison D pourra être regardée comme constante et donnée immédiatement par les tables ; si elle a porté sur le soleil, elle devra être calculée pour chaque opération en rapportant l'heure du lieu à celle du méridien de Paris. On voit alors qu'il devient nécessaire

de connaître la longitude d'une manière approchée, et qu'il en est de même de l'heure du lieu, qui pourtant n'est pas connue, puisque la pendule n'est pas réglée. Observons cependant relativement à ce dernier point qu'il sera suffisant d'apprécier approximativement cette heure. Il est cependant préférable, on le comprend facilement, d'opérer sur une étoile. Supposons qu'il en soit ainsi, et indiquons les détails du calcul à effectuer.

La première observation se fera lorsque l'étoile sera près du méridien ; son angle horaire P sera en conséquence très-petit, et la première équation pourra se mettre sous la forme

$$\cos.\delta = \sin.D \sin.L + \cos.D \cos.L = \cos.(L - D)$$

qui fournira une première valeur approchée de L.

La seconde observation faite lorsque l'étoile sera loin du méridien correspondra à un angle horaire P' proche de 100^g, dont le cosinus variera par conséquent peu. L'équation

$$\cos.\delta' = \sin.D \sin.L + \cos.D \cos.L \cos.P'$$

dans laquelle on substituera la valeur approchée de L trouvée par la première opération, fera connaître P'. La substitution de cet angle dans l'équation

$$\frac{P' - P}{15} = a$$

donnera P qui, substitué dans la première, mise sous la forme

$$\cos.\delta = \sin.D \sin.L + \cos D \cos.L \left(1 - \frac{P^2}{2} \dots\right)$$

permettra de déterminer L d'un manière plus exacte, en employant seulement la seconde puissance de P très-petit par hypothèse.

Si l'on désire plus d'exactitude, cette nouvelle valeur pourra servir à en déterminer une autre, et ainsi de suite.

561. *Instruments zénithaux*. Les procédés indiqués aux § 556 et 557 n'exigent pas l'emploi d'une pendule, mais ils reposent sur la détermination du plan méridien qui ne peut se faire que dans un observatoire. On a imaginé, dans ces derniers temps, des instruments zénithaux qui permettent cette observation dans le méridien sans que celui-ci soit complétement déterminé, autrement du moins que par la verticale. Ces instruments sont construits de différentes manières que nous pouvons ramener au type suivant, afin de ne pas entrer dans de trop longs détails.

Une lunette est placée verticalement au-dessous d'un vase en verre contenant de l'eau ; le fond plan de ce vase est mis horizontal au moyen d'un niveau.

La surface horizontale du liquide réfléchit l''image du réticule due à l'interposition de l'objectif. Si l'œil placé au-dessous de l'oculaire aperçoit le réticule et sa réflexion confondus, l'axe optique est vertical. Pour éviter l'incommodité résultant de la position de l'œil, l'oculaire est brisé, c'est-à-dire formé par un prisme lenticulaire qui permet de regarder horizontalement.

Supposons que dans cet état on aperçoive à un certain moment une étoile à la croisée des fils du réticule, cette étoile sera au zénith et sa déclinaison sera égale à la latitude du lieu. Si la première est connue, elle donnera immédiatement la seconde, et cela indépendamment de la réfraction nulle au zénith, réfraction qui, dans les cas ordinaires de distances zénithales quelconques, est toujours imparfaitement corrigée, d'abord, par suite de l'incomplète exactitude de la formule employée, puis en raison des renseignements barométrique et thermométrique recueillis toujours entachés d'erreur. C'est en cela que consiste le principal avantage des instruments zénithaux, qui sont encore exempts de l'erreur provenant de l'usage de la pendule.

Mais il est à présumer qu'au lieu même de l'opération on ne trouvera presque jamais une étoile dont la déclinaison soit connue, passant exactement au zénith. On obvie à cette difficulté de la manière suivante. La lunette est armée d'un micromètre réglé et d'un fil perpendiculaire ; ce dernier peut facilement être mis très-approximativement dans la direction du méridien.

Il suffit alors d'amener le fil mobile du réticule sur une étoile cataloguée au moment où elle passe sur le fil du mèridien ; sa distance angulaire à la verticale donnée par la marche du fil mobile ajoutée ou retranchée de la déclinaison de l'étoile fait connaître la latitude. Si cette distance angulaire est très-petite, et elle ne peut jamais être considérable pour que l'astre soit vu dans le champ de la lunette, les corrections résultant de l'emploi approximatif seulement, du fil méridien, et de la faible réfraction provenant d'une distance zénithale différant quelque peu de 100^{g}, sont négligeables.

Si l'on veut obtenir une plus grande exactitude, ou si l'angle a une valeur sensible, il faut opérer comme au § 558 qui donne la latitude par une observation près du méridien. Il semble alors qu'on rentre absolument dans la méthode qui y est indiquée ;



mais il suffit d'observer, pour faire comprendre l'avantage des instruments zénithaux, que la correction cherchée sera toujours excessivement petite et que, par suite, l'influence de l'erreur commise sur l'angle horaire fourni par la pendule sera beaucoup plus petite que dans le cas d'une observation quelconque. Enfin la correction de la réfraction, si elle est nécessaire, portant sur une quantité très-petite elle-même, sera entachée d'une erreur insensible.

562. *Latitude obtenue par des observations azimutales.* M. Babinet, en modifiant et étendant un procédé anciennement connu, a indiqué la marche à suivre pour obtenir la latitude d'un lieu au moyen d'observations azimutales. Nous nous contenterons d'indiquer le cas le plus simple, celui par conséquent qui convient le mieux aux opérations géodésiques, et nous terminerons par l'énoncé des avantages inhérents à cette méthode.

Soient (*fig.* 77, *planche* XXIV) ZPM le méridien, Z le zénith, P le pôle, E une étoile qui n'atteigne pas le zénith de l'observation. Cette dernière décrira, pendant la révolution diurne, un petit cercle EE' tel que l'arc de grand cercle PE mesurera le complément de sa déclinaison.

Un observateur muni d'un théodolite doublement répétiteur pourra observer les excursions extrêmes à l'est et à l'ouest du plan vertical contenant l'étoile; il lira ainsi, sur le limbe horizontal, la somme $2a$ de ces excursions.

Au lieu d'observer ainsi la même étoile dans ses deux positions, il pourra, pour gagner du temps, observer l'étoile E dans son excursion maximum à l'ouest, et quelques instants après, une seconde étoile E″ dans son excursion maximum à l'est. L'angle $a + a'$ parcouru sur le limbe horizontal, joint aux déclinaisons supposées connues, permettra de trouver la latitude L.

En considérant le triangle ZPE, on aura en effet,

$$\sin.a = \frac{\sin.E.\cos.D}{\cos.L}$$

L'angle E peut passer par tous les états de grandeur; le maximum de son sinus répondra au maximum de sin. a et par suite à celui de a (qui est $< 100^g$). L'observation répondant à l'excursion extrême donnera naissance au maximum de sin.E, et par suite le triangle sera rectangle en E. On aura donc

$$\sin.a = \frac{\cos.D}{\cos.L} \quad \text{ou} \quad \cos.D = \sin.a \cos.L \qquad (1)$$

L'observation faite sur la deuxième étoile à son excursion extrême opposée donne de même

$$\cos.D' = \sin.a' \cos.L \qquad (2)$$

La combinaison des équations (1) et (2) par voie d'addition et de soustraction donne

$$(\cos.D + \cos.D') = (\sin.a + \sin.a') \cos.L$$
$$(\cos.D - \cos.D') = (\sin.a - \sin.a') \cos L$$

divisant terme à terme et transformant,

$$\frac{\cos D + \cos.D'}{\cos.D - \cos.D'} = \frac{\sin a + \sin.a'}{\sin a - \sin a'}$$

$$\frac{2 \cos.\frac{1}{2}(D + D') \cos.\frac{1}{2}(D - D')}{2 \sin \frac{1}{2}(D + D') \sin.\frac{1}{2}(D' - D)} = \frac{2 \sin.\frac{1}{2}(a + a') \cos.\frac{1}{2}(a - a')}{2 \cos.\frac{1}{2}(a + a') \sin.\frac{1}{2}(a - a')}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(D + D') \text{ tang.}\tfrac{1}{2}(D' - D) = \cot.\tfrac{1}{2}(a + a') \text{ tang.}\tfrac{1}{2}(a - a')$$

Les observations azimutales ont fait connaître $a + a'$; on tirera donc $a - a'$ de l'équation précédente, et par suite a et a' seront déterminés. La substitution dans l'une ou l'autre des équations (1) et (2) donnera enfin la latitude L. L'opération double offrira un moyen de vérification.

Les observations azimutales ont l'avantage d'être indépendantes de la réfraction et de toutes les causes d'erreur qui entachent les observationsdes distances zénithales, comme l'usure des centres, la flexion de quelque partie de l'instrument; elles facilitent de plus l'exactitude du pointé, dans le sens utile à l'observation du moins. On sait, en effet, que la dispersion fait apparaître toute étoile observée autre part qu'au zénith, sous une forme allongée dans le sens vertical. Ainsi vers la hauteur de 45 degrés, pour une réfraction d'une minute, la dispersion, qui est environ $\frac{1}{14}$ ou $\frac{1}{15}$ de la réfraction, donne une amplitude verticale de 4″ à l'image de l'étoile. Quand on observe une distance zénithale, il faut bissecter le petit spectre par le fil horizontal, de manière à pointer sur le maximum d'intensité lumineuse. Mais ce maximum est variable par suite de la variation du pouvoir absorbant de l'atmosphère; en sorte que l'observation est indécise. Il n'en est pas de même pour la bissection de l'image par un fil vertical, c'est-à-dire, pour une observation azimutale, l'allongement en hauteur aidant au contraire l'exactitude de ce pointé.

Remarquons de plus que pour le cas particulier dont nous

avons indiqué l'emploi, il n'est pas nécessaire d'avoir une pendule.

563. *Longitudes.* La latitude d'un premier point est non-seulement utile pour placer le réseau géodésique à sa hauteur convenable sur la terre, mais elle est encore indispensable pour exécuter le calcul des latitudes des autres sommets de triangle. Il n'en est pas de même de la longitude, sous ce second point de vue ; c'est ce dont on sera convaincu si l'on se reporte à la formule de géodésie qui ne contient les longitudes qu'à l'état de différence simple. Ceci est du reste une conséquence de l'hypothèse qui admet que la terre est une surface de révolution ; tous les méridiens y jouant le même rôle, on pourrait partir d'une longitude quelconque arbitraire, et le réseau géodésique traduit en coordonnées géographiques ne serait pas déformé ; il n'y aurait plus, pour rentrer dans la réalité, qu'à ajouter une constante à toutes les longitudes calculées.

La différence en longitude de deux points de la terre se détermine de plusieurs manières.

Les marins emploient souvent un procédé fort imparfait, mais qui donne de certaines approximations, suffisantes parfois. Ils rectifient d'ailleurs les résultats, lorsqu'ils le jugent nécessaire et que c'est possible, au moyen d'observations astronomiques.

Ce procédé consiste à jeter à la mer un corps en bois ou en liége restant à la surface, et que l'on considère comme ne quittant pas la place où il a été mis à l'eau. A ce corps, qu'on nomme *loch,* est attachée une corde dont l'autre extrémité reste dans le vaisseau. On laisse filer la corde dont la longueur est connue par les nœuds qui la subdivisent. On peut ainsi apprécier la marche du bâtiment en un temps donné, et l'on en conclut l'espace franchi sur une direction indiquée par la boussole. Le résultat rapporté graphiquement sur la carte fait connaître le lieu où l'on est. C'est ce qu'on appelle faire le *point.*

564. Mais, en général, et pour trouver avec précision la différence en longitude de deux lieux quelconques, on y observe simultanément un même phénomène céleste, ou, si les observateurs ne sont pas placés à des distances trop considérables, on produit, en un lieu intermédiaire, un fait instantané et qui peut être visible pour les deux observateurs, tel que l'explosion d'une certaine quantité de poudre, ou l'apparition d'un fanal au sommet d'un monument, ou bien encore, l'ascension d'une fusée dans les

airs. Dans l'un et l'autre cas, chacun recueille l'heure exacte à laquelle il a aperçu le phénomène céleste ou le signal convenu. La différence des heures indiquées par les pendules donne la différence des longitudes. Il va sans dire que chacune des pendules est réglée sur le méridien du lieu où elle est placée.

Cette méthode a des inconvénients que l'on devine aisément : il faut, avant de se séparer, convenir de ce qu'on fera. Celui qui se transporte en une contrée lointaine ne peut communiquer qu'à son retour directement avec l'autre. Et, d'ailleurs, il peut se faire qu'il ait besoin de connaître immédiatement le résultat de ses observations.

565. Les chronomètres remédient à cet inconvénient, et l'on comprend que, partant d'un point avec un chronomètre bien réglé sur son midi sidéral et à l'abri de tout dérangement, on aura immédiatement la longitude d'un second point, par la différence de l'heure sidérale de ce lieu avec celle du chronomètre, en multipliant par 15 le temps ainsi obtenu.

On peut également se servir d'un chronomètre réglé sur le temps moyen, en ayant soin d'employer l'heure qu'il donne au midi moyen du lieu de l'observation.

Comme on ne peut pas espérer qu'un instrument soit aussi parfait, il faut en revenir aux doubles observations simultanées, en modifiant le procédé, ainsi que nous le dirons au § 567.

566. On peut se servir des éclipses du soleil, de la lune ou des satellites de Jupiter, ou encore des occultations des étoiles ; mais chacune de ces manières de procéder a ses inconvénients.

Les éclipses de la lune et des satellites de Jupiter sont instantanées pour tous les points de la terre desquels elles sont visibles, parce qu'elles sont le résultat de l'entrée dans le cône d'ombre projetée par la terre ou par Jupiter.

Il n'en est pas de même de celles du soleil, causées par l'interposition de la lune entre le soleil et le lieu où se trouve l'observateur. Le phénomène ne se produit donc pas au même moment pour deux personnes placées en deux points différents du globe.

Les éclipses du soleil et de la lune sont trop rares, pour qu'on puisse s'en servir, surtout dans le cours d'un voyage.

Dans les éclipses de lune, les bords de l'ombre terrestre ne sont pas nettement déterminés.

A ce double point de vue, les éclipses des satellites de Jupiter

sont bien préférables. Mais, pour les observer, il faut d'excellentes lunettes, et même il est indispensable que les deux soient également fortes, également bonnes, sinon l'éclipse paraîtra commencer plus tôt et finir plus tard, pour l'observateur armé du moins bon instrument. Le satellite cessera de paraître pour lui, tant qu'il sera dans l'ombre de la planète, tandis que l'autre personne pourra saisir les instants précis de l'immersion et de l'émergence.

Quant à l'occultation de certaines étoiles, des erreurs sur l'influence de la parallaxe lunaire en causent de très-graves dans les résultats.

567. La meilleure manière de procéder, la plus simple et celle qui, par conséquent, convient le mieux aux officiers pour lesquels nous écrivons plus spécialement, est celle dont nous allons parler avec quelques détails.

L'observation se fait en un seul point, tel jour et à telle heure qu'on veut. La détermination de la longitude dépend de la distance angulaire qui sépare la lune, soit du soleil, soit des planètes, soit encore de neuf étoiles favorablement situées.

La *Connaissance des temps* fournit, pour tous les jours de l'année, et de trois heures en trois heures, la distance angulaire prise du centre de la terre, de la lune à ces astres, qui tous peuvent être vus à l'aide d'une lunette ordinaire. Les heures, correspondant aux distances angulaires, sont rapportées au méridien de Paris et calculées en temps moyen.

Si l'on peut saisir le moment où la lune est séparée du soleil ou d'une étoile, par l'une des distances angulaires consignées dans les tables sus-mentionnées, la différence entre l'heure qui y correspond et celle de l'observation, convertie en angle, donne la longitude rapportée au méridien de Paris.

La distance observée entre les deux astres n'est pas nécessairement l'une de celles des tables : cette condition rendrait l'observation bien plus pénible. Une proportion fera facilement connaître à quelle heure l'angle aurait été le même à Paris. La longitude exprimée en temps est alors la différence entre l'heure fournie par le quatrième terme de cette proportion et l'heure de l'observation.

Il nous reste à parler d'une dernière considération importante. La *Connaissance des temps* donne les distances vraies, tandis qu'on ne mesure qu'une distance apparente. Il faut ainsi transformer cette dernière pour la rendre comparable à

celles des tables. Voici comment on peut calculer la correction :

Soient LS la distance vraie du soleil à la lune,

L'S' leur distance apparente (*fig.* 70, *planche* XXIV).

La parallaxe du soleil étant plus faible que la réfraction, S' position apparente est plus élevée que S, L' est, au contraire, située plus bas que L, par la raison qu'ici la parallaxe est plus considérable que la réfraction.

On mesure la distance S'L' et les distances zénithales correspondantes, ou, si l'on veut, les hauteurs au-dessus de l'horizon qui en sont les compléments. On note les indications du baromètre et du thermomètre ; puis, on lit l'heure à la pendule qui, d'abord, a été bien réglée sur le méridien du lieu. On tient compte, s'il y a lieu, et suivant qu'on a observé les deux bords internes ou les deux bords externes des astres, ou l'interne de l'un et l'externe de l'autre, des diamètres apparents.

Désignant par h et h' les hauteurs apparentes, et par H et H' les hauteurs vraies, on obtient ces dernières en corrigeant les autres de la réfraction et de la parallaxe.

Si, enfin, nous convenons de représenter D et D' les distances vraie et apparente, nous aurons dans le triangle L'ZS'

$$\cos.D' = \sin.h.\ \sin.h' + \cos.h.\ \cos.h'.\ \cos.z$$

et dans le triangle LZS

$$\cos.D = \sin.H.\sin.H' + \cos.H.\cos.H'.\ \cos.z \qquad (a)$$

d'où, en éliminant z qui est inconnu,

$$\frac{\cos.D' - \sin.h.\ \sin.h'}{\cos h.\ \cos.h'} = \frac{\cos.D. - \sin.H.\ \sin.H'}{\cos.H.\ \cos.H'}$$

Ajoutant l'unité à chaque membre, et opérant les réductions qui se présentent, on trouve

$$(1) \qquad \frac{\cos.D' + \cos.(h+h')}{\cos.h.\ \cos.h'} = \frac{\cos.D + \cos.(H+H')}{\cos H.\ \cos.H'}$$

La trigonométrie rectiligne fournit les formules qui suivent :

$$\cos.A + \cos.B = 2.\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)\ \cos.\tfrac{1}{2}(A-B) \quad (2)$$

et aussi $\cos.A + \cos B = 2.\cos.^2\tfrac{1}{2}A - 2\sin.^2\tfrac{1}{2}B \quad (3)$

parce que $2\cos.^2\tfrac{1}{2}A = 1 + \cos.A$ et $2\sin.^2\tfrac{1}{2}B = 1 - \cos.B$

Transformant le premier membre de (1) en vertu de (2) et son second membre, au moyen de (3), il vient

$$\frac{2.\cos.\tfrac{1}{2}(h+h'+D')\cos\tfrac{1}{2}(h+h'-D')}{\cos.h.\ \cos.h'}=\frac{2.\cos^2\tfrac{1}{2}(H+H')-2.\sin^2\tfrac{1}{2}D}{\cos.H.\ \cos.H'}$$

ou, en résolvant par rapport à D

$$\sin.^2\tfrac{1}{2}D=\cos.^2\tfrac{1}{2}(H+H')-\frac{\cos.H.\ \cos.H'}{\cos.h.\ \cos.h'}\cos.\tfrac{1}{2}(h+h'+D')\cos.\tfrac{1}{2}(h+h'-D')$$

On fait

$$(4)\qquad \frac{\cos.H.\ \cos.H'}{\cos.h.\ \cos.h'}+\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(h+h'+D')\cos.\tfrac{1}{2}(h+h'-D')}{\cos.^2\tfrac{1}{2}(H+H')}=\sin.^2\varphi$$

d'où $\sin.^2\tfrac{1}{2}D=\cos.^2\tfrac{1}{2}(H+H')(1-\sin.^2\varphi)=\cos.^2\tfrac{1}{2}(H+H')\cos.^2\varphi$

et $$\sin.\tfrac{1}{2}D=\cos.\tfrac{1}{2}(H+H')\cos.\varphi \qquad (5)$$

l'équation (4) détermine φ et l'équation (5) fait connaître la distance vraie D, qu'on peut alors comparer à celles de la table dont nous avons précédemment parlé.

Si l'observateur est muni d'un cercle répétiteur, c'est ainsi qu'il faut opérer, pour connaître la distance vraie du soleil à la lune au moment de l'observation, par le moyen des distances zénithales et de l'angle dans le plan des objets. Mais l'opération est plus simple avec le secours d'un théodolite qui, outre H et H', donnera immédiatement l'angle z; en sorte que l'équation (α) pourra être résolue tout de suite et faire connaître D.

568. *Azimuts.* Si l'on connaissait un point matériel du méridien du lieu où l'on se trouve, l'opération ne présenterait aucune difficulté. On observerait l'angle compris entre ce point et celui qui forme l'extrémité du côté dont on cherche l'azimut.

On le réduirait à l'horizon, dans le cas où l'on se serait servi du cercle répétiteur. Il n'y aurait aucune correction à y faire, si l'on avait fait usage du théodolite. Cette manière d'agir ne convient que dans le cas très-rare où l'on a à sa disposition une lunette de passage, et où, de plus, les localités permettent de faire établir une mire à une grande distance sur la direction exacte du méridien.

569. Si l'on pouvait saisir l'instant précis où une étoile E (*fig.* 71, *planche* XXIV) passe au méridien, l'opération reviendrait à ce que nous venons de dire au paragraphe précédent. L'angle observé entre l'étoile et l'objet terrestre serait l'azimut lui-même, si cet objet était placé en V à l'ouest du méridien; ce



n'en serait que le supplément à 360° ou 400° s'il était situé vers l'est, en V'. Ne pouvant reconnaître le moment du passage de l'étoile au méridien, et d'ailleurs préférant, comme toujours, que l'angle cherché soit la moyenne entre plusieurs observations, on doit mesurer l'angle plusieurs fois, tant avant qu'après son passage.

Si les secondes observations étaient en même nombre que les premières, et correspondaient à des positions symétriques de l'étoile, la moyenne des observations serait encore l'azimut exact, ou son supplément à 400°.

On ne peut s'astreindre à une telle régularité dans la marche des opérations, mais il est très-possible de faire plusieurs observations un peu avant et un peu après le passage. On prend note des heures, et l'azimut moyen correspond à l'heure moyenne.

L'azimut réel en sera facilement déduit, puisqu'il suffira de l'augmenter ou de le diminuer proportionnellement à ce dont l'heure moyenne précède ou suit celle du passage de l'étoile au méridien.

570. Généralement, on ne s'astreint pas à suivre la marche que nous venons d'indiquer : voici comment on procède :

On calcule l'azimut d'un astre, du soleil, par exemple, puis l'angle formé par les plans verticaux, passant tous deux au zénith, l'un par l'astre et l'autre par l'objet terrestre. L'azimut de ce dernier se déduit de la combinaison de ces deux éléments, comme l'indiquent les *figures* 72, 73, 74, 75 (*planche* XXIV).

Représentons par Z (⊙) l'azimut du soleil,
Z (V) celui de l'objet,
et par α l'angle formé par les directions O⊙ et OV.

Pour la fig. 72, on a $Z(V) = Z(\odot) + \alpha$

73, $Z(V) = Z(\odot) - \alpha$

74, $Z(V) = Z(\odot) + \alpha' = Z(\odot) + 360^{\circ} - \alpha.$

75, $Z(V) = Z(\odot) - \alpha' = Z(\odot) - 360^{\circ} + \alpha.$

c'est-à-dire, que le soleil et l'objet se trouvant du même côté du méridien,

$$Z(V) = Z(\odot) \pm \alpha$$

si, au contraire, le méridien les sépare,

$$Z(V) = Z(\odot) \pm (360^{\circ} - \alpha)$$

Le problème se divise. Il faut trouver,

1° L'azimut du soleil ;

2° L'angle α.

L'azimut du soleil est l'angle SZP, ou plutôt son supplément à 360°, ce qui ne complique nullement la question (*fig.* 65, *planche* XXIV).

On connaît : PZ, complément de la latitude,

SP, complément de la déclinaison fournie par les tables, et l'angle horaire P, que marque la pendule au moment de l'observation. Au moyen des analogies de Neper, on trouve les deux angles du triangle, qui ont leurs sommets en S et en Z.

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(Z+S) = \text{cot}\,\tfrac{1}{2}P.\frac{\cos.\frac{1}{2}(SP-ZP)}{\cos.\frac{1}{2}(SP+ZP)}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(Z-S) = \text{cot.}\tfrac{1}{2}P.\frac{\sin.\frac{1}{2}(SP-ZP)}{\sin.\frac{1}{2}(SP+ZP)}$$

On obtient donc Z, l'azimut cherché, et l'angle S.

Le même triangle donne la valeur de SZ ou la distance zénithale vraie du soleil, que nous représenterons par Δ, au moyen de la proportion des quatre sinus,

$$\sin.SZ = \sin.SP\,\frac{\sin.P}{\sin Z} \quad \text{ou} \quad \sin.SZ = \sin.PZ\,\frac{\sin.P}{\sin.S}$$

c'est-à-dire,

$$\sin.\Delta = \cos.D\,\frac{\sin.P}{\sin.Z} \quad \text{et} \quad \sin.\Delta = \cos.L\,\frac{\sin.P}{\sin S}$$

on trouve donc ainsi S en fonction de Z.

Il semble que cette formule seule, résolue par rapport à Z, eût donné plus simplement la solution du problème : mais il eût fallu obtenir la distance zénithale apparente Δ' du soleil, et en déduire Δ. Tout à l'heure, nous allons voir qu'il y a assez déjà d'observations à faire, sans y ajouter celle qui peut être évitée par le calcul de la simple formule que nous venons d'écrire.

L'emploi de deux des analogies de Neper, ayant fait connaître, non-seulement Z, mais aussi S, on calcule quelquefois Δ au moyen des cinq autres éléments du triangle, au moyen de la formule

$$\sin.\tfrac{1}{2}\Delta = \cos.\tfrac{1}{2}P\,\frac{\sin.\frac{1}{2}(L-D)}{\sin.\frac{1}{2}(S-Z)}$$

Comme nous n'avons pas donné cette formule dans la trigonométrie sphérique, nous croyons devoir indiquer ici la combinaison des formules connues qui la produisent.

En reprenant les notations générales *a*, *b*, *c*, A, B, C, les première et quatrième analogies de Neper sont :

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B) = \text{cot.}\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos.\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(a-b)=\text{tang.}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin.\frac{1}{2}(A-B)}{\sin.\frac{1}{2}(A+B)}$$

on peut les écrire sous la forme

$$\cot.\tfrac{1}{2}C=\frac{\cos.\frac{1}{2}(a+b)\sin.\frac{1}{2}(A+B)}{\cos.\frac{1}{2}(a-b)\cos.\frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}c=\frac{\sin.\frac{1}{2}(a-b)\sin.\frac{1}{2}(A+B)}{\cos.\frac{1}{2}(a-b)\sin.\frac{1}{2}(A-B)}$$

d'où, en divisant la deuxième par la première,

$$(1)\qquad \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}c}{\cot.\frac{1}{2}C}=\frac{\sin.\frac{1}{2}c.\sin.\frac{1}{2}C}{\cos.\frac{1}{2}c.\cos.\frac{1}{2}C}=\frac{\sin.\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos.\frac{1}{2}(a+b)\sin.\frac{1}{2}(A-B)}$$

Mais $\dfrac{\sin c}{\sin.C}=\dfrac{\sin.\frac{1}{2}c.\cos.\frac{1}{2}c}{\sin.\frac{1}{2}C.\cos.\frac{1}{2}C}=\dfrac{\sin.a-\sin.b}{\sin.A-\sin.B}$,

et $\dfrac{\sin a-\sin.b}{\sin.A-\sin.B}=\dfrac{\sin.\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin.\frac{1}{2}(A-B)\cos.\frac{1}{2}(A+B)}$

donc $\dfrac{\sin\frac{1}{2}c.\cos.\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}C.\cos.\frac{1}{2}C}=\dfrac{\sin.\frac{1}{2}(a-b)\cos.\frac{1}{2}(a+b)}{\sin.\frac{1}{2}(A-B)\cos.\frac{1}{2}(A+B)}$ (2)

Si l'on multiplie (1) et (2), membre à membre,

il vient $\dfrac{\sin.^2\frac{1}{2}c}{\cos.^2\frac{1}{2}C}=\dfrac{\sin^2\frac{1}{2}(a-b)}{\sin.^2\frac{1}{2}(A-B)}$.

Il suffit actuellement, de substituer aux symboles généraux, les lettres spéciales au problème dont nous nous occupons, et d'extraire la racine carrée, pour retomber sur l'équation

$$\sin.\tfrac{1}{2}\Delta=\cos\tfrac{1}{2}P.\frac{\sin.\frac{1}{2}(L-D)}{\sin\frac{1}{2}(S-Z)}$$

Passons maintenant à la seconde partie de la question :

S et S', V et V' (*fig.* 76, *planche* XXIV) représentent les lieux vrais et apparents du soleil et de la mire terrestre.

Nous exprimons par Δ et Δ' les distances zénithales vraie et apparente du soleil; par δ et δ' les éléments analogues de V.

On observe δ' et K', distance apparente du soleil au point V : on lit l'angle P qu'indique la pendule. On n'a pas le temps d'observer Δ' ; mais nous avons dit, tout à l'heure, comment on trouve l'azimut du soleil d'abord, et ensuite Δ en fonction de cet azimut, de la latitude et de la déclinaison. On sait que $\Delta'=\Delta-r+p$. On retranche donc l'effet de la réfraction de Δ fourni par le calcul ; on y ajoute p et l'on a la distance zénithale telle qu'elle eût été observée, si le temps l'avait permis.

Cela posé, le triangle S'ZV', dont nous connaissons les trois côtés, sert à déterminer l'angle en Z que nous avons désigné d'a-

bord par α, et qui, combiné convenablement avec l'azimut du soleil, donne celui de V. Il est à remarquer que cet angle α, mesuré par $S''V''$, appartient également au triangle SVZ, dans lequel les sommets Z et V sont les lieux vrais du soleil et du signal terrestre.

On emploie l'une des trois formules, § 63, qui donnent la moitié de l'angle par le sinus, le cosinus ou la tangente en fonction des trois côtés.

Si l'angle compris entre le soleil et la mire a été observé avec le théodolite, il est naturellement réduit à l'horizon et mesure l'angle α. Dans ce cas, il n'y a pas besoin de calculer Δ, d'en déduire Δ', ni de résoudre l'une des trois formules du § 63. Dans le tableau XV, nous présentons l'opération complète.

En résumé, voici quels sont les éléments que doit fournir l'observation :

1° La distance angulaire apparente $S'V'$;

2° L'heure de la pendule bien réglée, de manière que la moyenne entre les temps corresponde sensiblement à la moyenne des distances angulaires ;

3° La distance zénithale apparente de V.

Nous avons dit que Δ' se déduisait de Δ donné par le calcul : leur différence est $r-p$, quand il s'agit du soleil. Si l'on s'est servi d'une étoile, il n'y a pas de parallaxe, mais on tient compte de l'aberration et de la nutation.

Il est très-important que la pendule soit réglée avec beaucoup de soin : car, $1''$ d'erreur sur l'heure vraie en produirait plusieurs sur l'azimut.

La pendule étant réglée sur le temps moyen, il faut réduire, en temps vrai, l'heure qu'elle donne, lorsque l'observation a été faite sur le soleil.

Si, par circonstance, on n'avait pas pu régler préalablement la pendule, auquel cas on ignorerait sa marche, il faudrait le faire, ou dans la même journée, ou le lendemain, au moyen des hauteurs correspondantes ou des hauteurs absolues du soleil.

SUITE DE TABLEAUX

DESTINÉS :

1° A L'INSCRIPTION DES ANGLES OBSERVÉS ET DES ÉLÉMENTS DE RÉDUCTION, AINSI QU'AUX DIFFÉRENTS CALCULS GÉODÉSIQUES ;

2° AUX CALCULS ASTRONOMIQUES.

TABLEAU Ier. Inscription des angles, des distances zénithales, de *r* et de *y*.

— II. Calcul des triangles provisoires.

— III. Réduction des angles au centre et à l'horizon, et des distances zénithales aux sommets des signaux.

— IV. Calcul des triangles définitifs.

— V. Différence de niveau des points du premier et du second ordre.

— VI. Différence de niveau des points conclus.

— VII. Calcul des latitudes, longitudes et azimuts.

— VIII. Coordonnées géographiques des points.

— IX. Détermination de l'*ascension droite* et de la *déclinaison* d'une étoile ; corrections relatives à la *nutation* et à l'*aberration*.

— X. Parallaxes d'*ascension droite* et de *déclinaison*

— XI. Parallaxes de *longitude*.

— XII. Détermination du *temps* par les *hauteurs absolues*.

— XIII. Détermination d'une *latitude* par les *distances méridiennes du soleil*.

— XIV. Détermination d'une *latitude* par la *polaire*, observée près du *méridien*.

— XV. *Azimut* déduit des observations du soleil.

— XVI. *Longitude* déterminée par une distance du soleil à la lune.

TABLEAU PREMIER.

On recueille, dans ce premier tableau, les angles et les distances zénithales multiples, ainsi que les divers éléments de réductions au centre, à l'horizon et au sommet du signal.

Les angles multiples se placent dans la colonne $n0$, à côté des chiffres 2, 4, 6, etc., les quotients, par ces mêmes chiffres, s'écrivent dans la troisième colonne 0, et la comparaison des différents résultats indique la marche de la série. C'est le dernier quotient qui doit servir dans le calcul des triangles.

Les distances zénithales multiples sont inscrites dans la colonne $n\Delta$, et les quotients correspondants dans la colonne contiguë Δ.

Pour obtenir l'élément de réduction y, on se dispense de remettre le vernier à zéro. Au moment où l'observation d'un angle est terminée, la lunette supérieure est dirigée sur l'objet de gauche et le vernier marque $n0$: on la rend libre pour la pointer sur l'axe du signal ; l'angle qu'on lit ensuite et qui, sur le tableau, est désigné par V, se composant de $n0 + y$, il suffit d'en retrancher $n0$ pour connaître y.

N° 1.

STATION à

ANGLE ENTRE { D / G

On pointe sur

n	nO	O	n	$n\Delta$	Δ
2					
4			2		
6			4		
8			6		
10					

nO=	O=	2		
V=	y=	4		
y=	O+y=	6		
r=	dH=			

ANGLE ENTRE { D / G

On pointe sur

n	nO	O	n	$n\Delta$	Δ
2					
4			2		
6			4		
8			6		
10					

nO=	O=	2		
V=	y=	4		
y=	O+y=	6		
r=	dH=			

TABLEAU II.

Calcul des triangles provisoires.

Ces calculs ont pour objet la détermination approximative des côtés de triangles qui entrent, comme données indispensables, dans la formule de réduction au centre.

Il suffit de prendre les logarithmes à 3 décimales. On pourrait, à la rigueur, se dispenser des calculs provisoires, en faisant avec soin le canevas au moyen des angles observés. On y prendrait graphiquement les longueurs des côtés. Néanmoins, ces calculs ont un autre but encore, celui de servir de vérification aux calculs définitifs.

NOMS des SOMMETS.	ANGLES OBSERVÉS.	LOGARITHMES des sinus DES ANGLES	CALCUL des CÔTÉS.	CÔTÉS en mètres.
	° ′ ″			m.
(S)	,	,	l. DG , c. l. sin.S , l. sin.D ,	,
(D)	,	,	l.S.G. ,	,
			l. DG + } c. l. sin.S } , l. sin.G ,	
(G)	,	,	l. SD ,	,
	° ″			m.
(S)	,	,	l.DG , c.l. sin.S , l. sin.D ,	,
(D)	,	,	l.S.G ,	,
			l.DG + } c.l.sin.S } , l. sin.G ,	
(G)	,	,	l.SD ,	,
	° ″			m.
(S)	,	,	l.DG , c.l. sin.S , l. sin.D ,	,
(D)	,	,	l.SG ,	,
			l.DG + } c.l. sin.S } , log. sin.G ,	
(G)	,	,	l.SD ,	,

TABLEAU III.

Réductions des angles observés à l'horizon et au centre et des distances zénithales aux sommets des signaux.

La réduction à l'horizon n'a lieu que lorsque les angles sont observés avec le cercle répétiteur. Le théodolite les donne tout réduits.

Ces réductions peuvent se calculer au moyen des tables de logarithmes, en se bornant à 3 décimales, ou avec des tables que M. le colonel Puissant a insérées dans son *Traité de géodésie*, sous les numéros 1 et 2. On entre dans la table 1 avec l'angle observé O, et l'on trouve les nombres correspondants aux premiers facteurs des deux termes de la correction, dans les colonnes intitulées *tangentes* et *cotangentes*. La table 2 donne les seconds facteurs, et les arguments sont $200 - (\Delta + \Delta')$, et $\Delta - \Delta'$: on multiplie et l'on fait la somme algébrique des deux termes.

On peut encore employer de petites tables donnant les logarithmes des facteurs fournis par les précédentes.

La correction au centre s'effectue au moyen des logarithmes ou d'une table semblable à celle indiquée ci-dessus, et comprise sous le nº 1, dans l'instruction sur la disposition et la tenue des registres de calculs, publiée anciennement par le Dépôt de la guerre.

La réduction des distances zénithales est positive quand dH est positif; c'est-à-dire, lorsque l'observation se fait au-dessous du point de mire : elle est négative dans le cas contraire.

Quand on calcule les différences de niveau des points du troisième ordre, on ne rapporte pas la distance zénithale au sommet du signal : on emploie Δ : mais alors il faut corriger la hauteur obtenue de la quantité dH, puisque l'on part de la côte du sommet et non de celle du lieu de l'observation. Il faut alors, du résultat obtenu retrancher dH avec son signe.

On peut aussi calculer de la même manière les points du second ordre : on fait deux calculs différents avec chacune des distances zénithales réciproques non corrigées.

STATION A

NOMS DES OBJETS.	RÉDUCTION A L'HORIZON. $\tang.\frac{0}{2}\sin.1''.\left\{400^g-\left(\frac{\Delta+\Delta'}{2}\right)\right\}^2-$ $-\cotang.\frac{0}{2}\sin.1''\left(\frac{\Delta-\Delta'}{2}\right)^2$	RÉDUCTION AU CENTRE. $C=0+\frac{r.\sin(0+y)}{D.\sin 1''}-\frac{r.\sin.y}{G.\sin.1''}$	RÉDUCTION DES DISTANCES ZÉNITHALES. $\frac{dH}{K.\sin.1''}$
d.—	Δ= , Δ'= , Δ+Δ'= | + ″ Δ−Δ'= | − ,	0+y= , | l.D= , | 1er tme= ″ y= , | l.G= , | 2e tme= 0= , Réduction C= ″ Réduction h=	Δ= , Réduction= , δ= ,
g.—	Réduction h=. , dH= dT=	r= C+h= ″ Angle observé= Angle réduit =	Δ= , Réduction= , δ'= ,
d.—	Δ= , Δ'= , Δ+Δ'= , | + ″ Δ−Δ'= , | − ,	0+y= , | l.D= , | 1er tme= ″ y= , | l.G= , | 2e tme= 0= , Réduction C= Réduction h=	Δ= , Réduction= , δ= ,
g.—	Réduction h=. ″ dH= dT=	r= C+h= Angle observé= Angle réduit =	Δ'= , Réduction= , δ'= ,

TABLEAU IV.

Calcul des triangles définitifs.

Les logarithmes des côtés de triangles du premier et du deuxième ordre, c'est-à-dire ceux dont les trois angles ont été observés, se prennent à sept décimales. Cinq suffisent pour les triangles du troisième ordre. On nomme ainsi ceux dans lesquels un angle est conclu : on n'a pas fait station à ce troisième angle. Les points ainsi obtenus doivent être calculés sur deux bases.

La seconde colonne du tableau IV contient les angles réduits au centre et à l'horizon. Si le triangle était rectiligne, et s'il n'y avait pas d'erreur dans les observations, la somme des trois angles devrait être précisément 200^g. La différence que l'on trouvera sera donc due, d'une part, à l'excès sphérique, et de l'autre, aux erreurs de pointé, de lecture et à celle causée par l'imperfection de l'instrument. Si l'on veut savoir avec quel degré de précision l'on a opéré, on calcule à part l'excès sphérique que l'on sait être égal à la surface du triangle réduite en secondes, dont l'expression est $\frac{1}{2}\, bc.\ \frac{\sin. A'}{r.^2 \sin. 1''}$.

En préparant ces calculs, il est bon de transcrire les deux premiers chiffres des logarithmes des sinus, d'après le calcul des triangles provisoires : cela évite de commettre des erreurs, en prenant parfois des cosinus pour des sinus, et réciproquement.

Les triangles doivent fermer à $15''$ environ. L'erreur est souvent beaucoup moindre : quelquefois, quand les côtés sont petits, elle peut aller jusqu'à $40''$.

On doit trouver la longueur des côtés du second ordre à 2^m près au plus. Pour le troisième ordre, l'erreur va parfois jusqu'à 4^m, rarement cependant.

NOMS des SOMMETS.	ANGLES		LOGARITHMES DES SINUS des angles corrigés.	CALCUL des CÔTÉS.	COTÉS en MÈTRES.
	RÉDUITS.	CORRIGÉS.			
(*s*)	,	,	,	*l*.DG , c.*l*.sin.S , *l*.sin.D ,	,
(*d*)	,	,	,	*l*.S.G. ,	,
				l.DG+c.*l* sin.S= , *l*. sin.G ,	
(*g*)	,	,	,	*l*.SD ,	,
	,	200,0000			
	,	Erreur dont il faut corriger la somme des trois angles en la répartissant par tiers.			

TABLEAU V.

Différences de niveau.

Points du premier et du deuxième ordre.

Les distances zénithales de ces points doivent être rapportées aux sommets des signaux. Les corrections qui sont de la forme $\frac{dH}{K.\ \sin.1''}$ ont dû être calculées dans la dernière colonne du troisième tableau.

La formule qui détermine les différences de niveau est

$$dN = K.\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta).$$

δ' et δ représentent ici les distances zénithales corrigées des erreurs de réfraction ; mais, comme celle-ci est la même pour les deux observations, il s'ensuit que l'on peut n'en pas tenir compte, puisqu'elle disparaît comme affectée successivement des signes + et —. On suppose ainsi que les observations ont été faites avec le même état atmosphérique, circonstance dont on essaie de se rapprocher autant que possible.

Les logarithmes se prennent avec 5 décimales.

Il faut calculer chaque cote de deux manières au moins. Souvent, on prend la moyenne entre cinq ou six résultats, parce qu'il est nécessaire d'être bien sûr de l'exactitude de cotes qui servent ensuite à déterminer celles des points conclus.

La dernière colonne est destinée à l'inscription des cotes des points correspondants du sol ; elles s'obtiennent en retranchant des résultats précédents les hauteurs des signaux mesurées directement.

NOMS DES POINTS.	DISTANCES ZÉNITHALES rapportées aux sommets des signaux.	CALCUL DES DIFFÉRENCES DE NIVEAU $dN = K \tang \frac{1}{2}(\Delta' - \Delta)$.	ALTITUDES. DES POINTS de mire.	ALTITUDES. DES SOLS.
- - - - - - - - -	$\Delta =$	$\Delta' - \Delta =$ $\frac{1}{2}(\Delta' - \Delta)' =$	$N =$	
Point dont la hauteur est connue.		Log. K = Log. tang. $\frac{1}{2}(\Delta' - \Delta) =$		
- - - - - - - - -	$\Delta' =$	Log. $dN =$	$dN =$	
Point cherché.			$N_1 =$	
- - - - - - - - -	$\Delta =$	$\Delta' - \Delta =$ $\frac{1}{2}(\Delta' - \Delta) =$	$N =$	
		Log. K = Log. tang $\frac{1}{2}(\Delta' - \Delta) =$		
- - - - - - - - -	$\Delta' =$	Log. $dN =$	$dN =$ $N' =$	

TABLEAU VI.

Différence de niveau.

Points du troisième ordre.

Les cotes de ces points se calculent sur deux bases. Quelquefois cependant la nature du terrain force à en admettre quelques uns sur lesquels on n'a pu prendre qu'une distance zénithale, et qui, néanmoins, ne peuvent être rejetés comme indispensables au nivellement topographique.

Ces cotes se déterminent au moyen d'une seule distance zénithale. Le tableau V peut également servir pour les points de station, et c'est dans ce cas seulement qu'il y a lieu d'employer la dernière colonne. Alors on n'a pas besoin de rapporter la distance zénithale au point de mire; mais elle doit être corrigée de l'erreur de réfraction et de celle due à la sphéricité de la terre.

Le second terme de la formule renferme cette double correction.

Le signe du premier terme dépend de celui de la cotangente qui est positive, lorsque $\Delta < 100^g$, et négative dans le cas contraire.

Le second terme est toujours positif : on le calcule fort simplement en ajoutant le double du logarithme de K à celui de la constante q. On peut encore le trouver directement dans les tables publiées, il y a quelques années, par le Dépôt de la guerre, et destinées à faciliter le calcul des différences de niveau dans les opérations topographiques.

NOMS des OBJETS	ÉLÉMENTS du CALCUL.	DIFFÉRENCES DE NIVEAU : $dN = K.\text{cotang}.\Delta + q K^2$.		log.q = 2,81869.	HAUTEURS ABSOLUES des points de mire	des sols.
Point dont on cherche la cote.	Δ = ° , dH = m dT = ,	Log.K = , Log. cot.Δ = ,	2 log.K = , Log.q = ,	1er terme = m 2e terme = + ,	N = m	
Point connu.	Δ' = , dH' = , dT' = ,	Log.1er terme = ,	Log.2e terme = ,	dN = , dH = , dN = ,	dN = , N' ,	
-------	Δ = ° , dH = m dT = ,	Log.K = , Log. cot.Δ = ,	2 log.K = , Log.q = ,	1er terme = m 2e terme = + ,	N = m	
-------	Δ' = , dH' = dT' =	Log.1er terme = ,	Log.2e terme = ,	dN = , dH = , dN = ,	dN = , N' = ,	

TABLEAU VII.

Latitudes, longitudes, azimuts.

Les formules sont :

$$L' = L - K\frac{(1 - e^2\sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}}{a\sin.1''}(1 + e^2\cos.^2 L)\cos.z +$$

$$+ \tfrac{1}{2}K\frac{{}^2(1 - e^2\sin.^2 L)}{a^2\sin.1''}(1 + e^2\cos.^2 L)\,\text{tang}.L\,\sin.^2 z$$

$$M' = M + K\frac{(1 - e^2\sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}}{a\sin.1''}\sin.z\;\text{séc}.L'$$

$$z' = 200^g + z - (M' - M)\sin.\tfrac{1}{2}(L + L')$$

On a fait, par abréviation,

$$P = \frac{(1 - e^2\sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}}{a\sin.1''}(1 + e^2\cos.^2 L)$$

$$Q = \tfrac{1}{2}\frac{(1 - e^2\sin.^2 L)}{a^2\sin.1''}(1 + e^2\cos.^2 L)\,\text{tang}.L \qquad R = \frac{(1 - e\sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}{a\sin.1''}$$

Ces expressions ne renfermant pas d'autre variable que la latitude L, du point de départ, on a construit des tables donnant de suite P, Q, R : l'argument est L. Pour le premier et le second ordre, on prend les logarithmes de P et R à 7 décimales, et celui de Q à 5. Pour le troisième ordre, on calcule le premier terme de la latitude à 5, le second à 3, et la longitude à 5.

Les azimuts ne se calculent que pour les points du premier et du deuxième ordre ; ils n'auraient aucun but pour les points conclus. Ils se comptent de 0^g à 400^g, l'origine au sud, remontant au nord par l'ouest, et revenant au sud par l'est.

La vérification des azimuts des deux côtés AC, BC (*fig.* 329), pris avec le méridien du point C, consiste à retrancher l'angle C du triangle, de l'azimut du côté droit BC : le résultat doit être l'azimut de AC.

Les latitudes et longitudes se calculent sur deux points de départ, afin d'éviter les erreurs.

On inscrit toujours ce double calcul en commençant par l'objet de droite, parce qu'alors, pour former les azimuts des côtés qui aboutissent au point cherché C, pris avec les méridiens de B et de A, la règle des signes devenant constante, on n'a pas besoin d'avoir recours au canevas. On reconnaît, en effet, à l'inspection de la figure 329, et en se rappelant dans quel sens on compte les azimuts, que, pour former d'abord celui de BC pris en B, il faut, de celui de A, augmenté de 400ᵍ, pour le cas particulier que présente cette figure, retrancher l'angle B du triangle, tandis que l'azimut de AC, compté avec le méridien du point de gauche A, est égal à celui de B, auquel il faut ajouter l'angle A du triangle ABC.

L'erreur, dans les latitudes du deuxième ordre, ne doit pas excéder 0″, 2 ou 2ᵐ, et 0″, 3, c'est-à-dire 3 mètres pour celles du troisième ordre.

On place ici dessous, pour faciliter la recherche des logarithmes de sinus et cosinus des azimuts, un tableau qui rappelle ce que sont ces lignes trigonométriques, suivant le quart de circonférence dans lequel aboutit l'azimut.

sin. 100 + A = + cosin. A	sin. 200 + A = − sin. A	sin. 300 + A = − cosin. A
cosin. 100 + A = − sin. A	cosin. 200 + A = − cosin. A	cosin. 300 + A = + sin. A

Extrait de la table des facteurs P, Q, R.

Latitude.	Log. P.	Log. Q.	Log. R.	Latitude	Log. P.	Log. Q.	Log R.
49°0	8.99996		8.998	52 6	8.99979	1.929	8.99850
1				7	79	30	50
2				8	78	32	50
3				9	77	33	50
4				53 0	77	34	49
5				1	76	36	49
6				2	75	37	49
7				3	75	38	49
8				4	74	40	49
9				5	73	41	48
50.0	96	1.894	56	6	73	43	48
1	96	95	56	7	72	44	48
2	95	96	56	8	71	45	48
3	94	98	55	9	71	47	48
4	94	99	55	54.0	70	48	47
5	93	1.900	55	1	69	49	47
6	92	02	55	2	69	51	47
7	92	03	55	3	68	52	47
8	91	04	54	4	67	53	46
9	90	06	54	5	67	55	46
51.0	90	07	54	6	66	56	46
1	89	09	54	7	65	58	46
2	88	10	53	8	65	59	46
3	88	11	53	9	64	60	45
4	87	13	53	55.0	63	62	45
5	86	14	53	1	63	63	45
6	86	15	53	2	62	64	45
7	85	17	52	3	61	66	44
8	84	18	52	4	61	67	44
9	84	19	52	5	60	69	44
52.0	83	21	52	6	60	70	44
1	83	22	51	7	59	71	44
2	82	23	51	8	58	73	43
3	81	25	51	9	58	74	43
4	81	26	51	56.0	57	75	43
5	80	28	51	1			

Table donnant la valeur du second terme dans la formule de latitude.

Le second terme de la formule, au moyen de laquelle on calcule les latitudes, peut, sans que l'on emploie les logarithmes, se trouver immédiatement dans la table ci-dessous.

Elle a pour entrée l'azimut de 10 en 10 grades, et le côté K, depuis 3,000 jusqu'à 10,000 mètres.

Au-dessous de 3,000^m de côté ou de 20^g d'azimut, le terme est nul. On retranche 200^g de l'azimut, lorsque l'expression de son amplitude est plus grande que ce nombre.

Côté K	3	4	5	6	7	8	9	10	Kilomètres.
Z=20$_g$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	Z=180$_g$
30	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	170
40	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	160
50	0.0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.3	0.3	0.4	150
60	0.0	0.1	0.1	0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	140
70	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	130
80	0.1	0.1	0.2	0.3	0.3	0.5	0.6	0.7	120
90	0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	110
100	0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	100

N° VII.

NOMS DES POINTS.	LATITUDES $L' = L - P.K.\cos z - Q.K.^2 \sin^2 z$		LONGITUDES. $M' = M + R.K. \sin z. \sec L'$	AZIMUTS. $Z' = 200 + z - d.M. \sin \frac{1}{2}(L+L')$.
Point dont la latitude est connue.	Lat L = ° ″,		Long. M = °, ″,	Az. Z = °, ″,
	Log. P = , —	Log. Q = , —	Log. R. = , +	z = °, ,
	Log. K = ,	2. Log. K = ,	Log. K. = ,	— , ,
	Log. cos. z. = ,	2. Log sin. z = ,	Log. sin. z = ,	
			Log. séc. L′ = ,	
	Log 1er tme = ,	Log. 2e tme ,		L sin. $\frac{L+L'}{2}$ = 0,
			Log. dM = ,	L dM = ,
	1er tme = ″,			
	2e tme = ,			Log. d. z = ,
	dL ″,		dM = ″,	dz = °, ″,
	L = °, ,	L+L′ = °, ″,	M = °, ,	200 + Z = , ,
Point dont on cherche la latitude.	L′ = , ,	½(L+L′) = , ,	Long. M′ = , ,	Az. Z′ = , ″,
Point connu.	Lat. L = °, ″,		Long. M = °, ″	Az. Z = °, ″,
	Log. P = , —	Log. Q = , —	Log R = , +	z = , ″,
	Log. K = ,	2. Log. K = ,	Log. K = ,	+ , ,
	Log. cos. z = ,	2. Log. sin. z = ,	Log. sin. z. = ,	
	Log. 1er tme = , ,	Log 2e tme = ,	Log. séc. L′ = ,	L sin. $\frac{L+L'}{2}$ = ,
			Log. dM = ,	Log. dM = ,
	1er tme = ″,			
	2e tme = — ,			Log. dz = ,
	dL = ″,	L+L′ °, ″,	dM = ″,	dz = ,
	L = °, ,	½(L+L′) = , ,	M = °, ,	200 + Z = , ,
Point dont on calcule la latitude.	L′ = , ,		Long. M′ = , ,	Az. Z′ = , ,

Tableau des coordonnées géographiques.

DÉSIGNATION DES POINTS.	LATITUDES.	LONGITUDES.	CROQUIS des signaux.	LATITUDES	
				des points de mire.	des sols.

N° IX.

Détermination de l'ascension droite et de la déclinaison apparentes de Sirius *pour le 1er juin 1813.—Détermination de l'heure de son passage, en temps sidéral et en temps vrai, au méridien de l'Ile-de-Fer, pour la même époque.*

(Longde occle de l'Ile-de-Fer = 1h,23m,0s.)

FORMULES DE NUTATION, § 543.

D′ = D − *d*☉. sin.ω − *d*.ω. sin.Æ.

Æ′ = Æ − *d*.☉ (cos.ω + sin.ω. sin.Æ tang.D) + *d*.ω cos.Æ. tang.D

d.☉ = − 19.2. sin.N, *d*.ω = 9.63. cos.N.

Obliquité de l'écliptique, ou ω = 23°,27′,40″.

Longitude du nœud ascendant de la lune, ou N = 133°,17′.

D. Déclinaison moyenne.

Æ. Ascension droite moyenne.

☉. Longitude du lieu.

Le 1er janvier 1810,	Æ = 99°.11′.40″	D = 16°.27′.19″
Pour 3 ans,	1.59,4	12,6
Pour 5 mois,	16,58	1,75
Le 1er juin 1813,	Æ = 99°.13′.55″.98	D = 16°.28′.3″,35

	1er terme. (Calcul de D′).	2e terme.
log.19 2 = 1.28330		
log. sin.N = 9 85851		
log.*d* ☉ = 1 11181	log.*d* ☉ = 1.11181 −	log.*d* ω = 0.82369 −
	log. sin.ω = 9.60002	log. sin.Æ = 9.99434
log.9″.63 = 0.98363	log. cos Æ = 9.20529	log.2e. T = 0.81803 −
log. cos.N = 9.84006		
log.*d*. ω = 0.82369 −	log.1er T = 9,91712 +	
	1er terme = 0″,885 +	2e terme = 6″.577 −

Calcul de Æ′.

1er terme.	2e terme.	3e terme.
log.*d* ☉ = 1.11181 −	log.*d* ☉ = 1.11181 −	log.*d* ω = 0.82639 −
log. cos.ω = 9.96253	log. sin ω = 9.60002	log. cos.Æ = 9.20529 −
log.1″ T = 1.10434 −	log sin.Æ = 9.99434	log. tang.D = 9.47070
	log. tang.D = 9.47070	log 3e T = 9.49968 −
	log.2e T = 0.20687 −	
1er terme = 12″,72 −	2e terme = 1″,51 −	3e terme = 0′,316 −

Suite du N° IX.

D austral est pris négatif. D = 16°.28′.3″.35 — 0 88 — 6.58 + D′ = 16°.27′.57″.65 +	Æ = 99°.44′.55″.99 1 2,72 + 1.51 + 0,32 — Æ′ = 99°.44′.9″.90	log. sin. D′ = 9.45247 log. cos. D′ = 9.98181 log. sin. ⊙ = 9.97438 log. cos. ⊙ = 9.52322 log. sin. Æ′ = 9 99433 log. cos. Æ′ = 9.20548

FORMULES D'ABERRATION, § 544.

D″ = D′ — 20″,25 [sin. D′. (cos. Æ′. sin. ⊙ — sin. Æ′. cos. ω. cos. ⊙) +
+ cos. D′. sin ω. cos. ⊙]

$$Æ'' = Æ' - \frac{20'',25}{\cos. D'} (\cos. \omega. \cos. Æ' \cos. \odot + \sin. Æ'. \sin. \odot)$$

log. 20″,25 = 1,30642.

log. 20″,25 = 1.30642 log. sin. D′ = 9.45247— log. sin. Æ′ = 9.20548— log. sin. ⊙ = 9.97438 log. 1er T = 9.93875+ 1er t(D″) = 0″,86846+	log. 20″,25 = 1.30642 log. sin. Æ′ = 9.99433 log sin. D′ = 9 45247— log. cos. ω = 9 96253 log. cos. ⊙ = 9.52322 log. 2e T = 0.23897— 2e te (D″) = — 1″,7337	log. 20″,25 = 1.30642 log. cos. D′ = 9.98181 log. sin. ω = 9.60002 log. cos. ⊙ = 9.52322 log. 3e T = 0.44447 3e te (D″) = 2″,5794
log. 20″,25 = 1.30642 Ct. log. cos. D′ = 0.01819 log. cos. ω = 9 96253 log. cos. Æ′ = 9.20548— log. cos. ⊙ = 9.52322 log. 1er T (Æ″) = 0.01584 1er te (Æ″) = 1″.0371—	log. 20″,25 = 1.30642 Ct. log. cos. D′ = 0.01819 log. sin Æ′ = 9.99433 log sin. ⊙ = 9.97438 log. 2e T (Æ″) = 1.29332 2e te (Æ″) = 19″,649	Longitude occidentale de l'Ile-de-Fer = 1h,23m,0s.

D″ = 16°,27′.57″,65 + 2″,58 — 0″,87 — 1″,73 = 16°,27′,57″,63.

Æ″ = 99°,44′,9″,90 + 1″,04 — 19″,65 = 99°,43′,50″,25.

	h.	m.	s.	
Ascension droite apparente de Sirius, convertie en temps. . .	6	36	55	3
(Ce n'est autre chose que l'heure sidérale du passage de l'étoile au méridien supérieur.)				
Distance de l'équinoxe au soleil, à Paris, le 1er juin, à midi. .	19	24	22	6
Temps vrai approximatif du passage de Sirius au méridien. .	26	1	17	9
Ou, ce qui est la même chose.	2	1	17	9
Diminution proportionnelle de la distance de l'équinoxe au soleil, à raison de 1m,56s,6 en 24 heures.			12	6
Heure précise du passage de Sirius au méridien de Paris. . .	2	1	5	3
Longitude occidentale de l'Ile-de-Fer.	1	23	0	0
Temps vrai du passage de l'étoile au méridien de l'Ile-de-Fer. .	0	38		3

N° X.

CALCUL DES PARALLAXES.

Détermination de la parallaxe** d'ascension droite **ou d'angle horaire, et vérification par le calcul direct de la tangente d'ascension droite apparente.

$$\text{Æ}' - \text{Æ} = \sin.P\,\frac{\sin.\text{Æ}.\cos L}{\sin.1''.\cos.D} - \tfrac{1}{2}\sin.^2P.\,\frac{\cos.^2L.\sin.2\,\text{Æ}}{\sin.1''.\cos.^2D}$$

(*Formule* 3, § 548.)

L'angle horaire oriental de l'astre	= 58°,43',50" = H
Sa déclinaison	= 4°,49',46" = D
Son ascension droite vraie	= 9°,49',44" = Æ
Sa parallaxe horizontale	= 0°,54',2",5 = P
La latitude du lieu de l'observation	= 48°,39'50" = L

log. sin. P	= 8.4964369	2. log. sin.P	= 6.39287
log. cos. L	= 9.8198564	2. log. cos. L	= 9.63974
log. sin. H	= 9.9318349	2. Ct. log. cos. D	= 0.00309
Ct. log. cos.D	= 0.0015442	log. sin. 2. H	= 9.94808
Ct. log. sin.1"	= 5.3144251	Ct log sin. 1"	= 5.31442
		Ct. log. 2	= 9.69897
log. 1er terme)	= 3.2640945	log. (2e terme)	= 0.99714
1er terme = 1836",931 = 30',36",931		2e terme = 0,0',9",934	
1er terme = 30'. 36",931		Æ = 9°,49',44"	
2e terme = 0'. 9",934		Æ' − Æ = 30',46",865	
α = Æ' − Æ = 30'. 46",865		Æ' = 10°,20', 0",865	

$$\text{tang}\,\text{Æ}' = \frac{\cos.D.\sin.\text{Æ} - \sin.P.\cos L.\sin.M}{\cos.D.\cos.\text{Æ} - \sin.P.\cos.L.\cos.M}$$

(*Formule* (1), § 548.)

H = 58°,43',50"		log. cos. D	= 9.9984558
Æ = 9°,49',44"		log. cos. Æ	= 9.9935494
− (Æ − H) = 48°,54',36' = − M		log. 1er terme dén.	= 9.9920449
		1er terme dénom.	= 0.9814495
log. cos.D	= 9.9984558	log. sin. P	= 8.4964369
log. sin. Æ	= 9.2318848	log. cos. L	= 9.8198564
log. 1er terme num.	= 9.2303406	log. cos. M	= 9.8147264+
1er terme numérateur	= 0.1699575	log. 2e terme dénom.	= 7.8340497+
log. sin. P	= 8.4964369	2e terme dénom.	= 0.0068237+
log. cos. L	= 9.8198564	0,1699575	0,9818495
log. sin. M	= 9.8774859−	0,0078249	0,0068237
log. 2e terme num.	= 7.8934792	Nr = 0,4777822	Dr = 0,9750258
2e terme numérateur	= 0.0078249−		
log. num.	= 9.2498888	Æ' = 10°,20',0",8465.	
log. dénom.	= 9.9890462		
log. tang. Æ'	= 9.2608726		

Suite du N° X.

CALCUL DES PARALLAXES.

Détermination de la parallaxe* de déclinaison *et vérification par le calcul direct de la déclinaison.

$$(4)\ \sin.\delta = \left(\frac{\sin.P \sin.L. \sin\,(P+\alpha)}{\sin.H} - \frac{2.\sin.\frac{1}{2}\alpha.\sin.D\ \cos.(P+\frac{1}{2}\alpha)}{\sin.H}\right)\cos.(D+\delta)$$

Après avoir fait

$$\text{tang}.x = \sin.P.\sin L.\sin.(P+\alpha)\frac{1}{\text{sio}.H'}\quad (\textit{Formules } 5, 6, 7, \S\, 548),$$

$$\text{taog}.y - 2.\sin.\tfrac{1}{2}\alpha.\text{sio}.D.\cos.(P+\tfrac{1}{2}\alpha)\frac{1}{\text{sio}.H}$$

la première formule, après plusieurs transformations, devient

$$\text{tang}.\delta, \text{ on } \delta = \frac{\sin.(x-y).\cos.D}{\cos.x.\cos.y.\sin.1''} + \frac{\sin^2(x-y)\sin.2D}{2.\cos.^2x\cos.^2y.\sin.1''}$$

Les données sont les mêmes que pour la parallaxe d'ascension droite.

	log. 2 = 0.30103	Æ' — Æ = α
log. sin. P = 8.19644	log. sin. ½α = 7.65104	D — D' = δ
log. sin. L = 9.87555	log. sin. D = 8.92425	
log. sin.(P+α) = 9.93425	log cos.(P+½α) = 9.74209	x = 0°,40',48''
Ct. log. sin. H = 0.06817	Ct. log. sin. H = 0.06800	y = 0°, 1',33'',9
log. tang. x = 8 07441	log. tang. y = 6.65745	x—y = 0°,39',14'',1
x = 0°,40',48''	y = 0°,1',33'',9	

	2.log.sio.(x—y) = 6.11474	1er terme = 2345''.8
log.sin.(x—y) = 8.05737	log. sio.2D = 9.22472	2e terme = 2'',25
log. cos D = 9.99846	2.Ct.log.cos.x = 0.00006	δ = 2348'',05
Ct. log. cos.x = 0.00033	2.Ct.log.cos.y = 0.00000	
Ct. log. cos y = 0.00000	Ct. log. 2 = 9.69897	δ = 0°,39', 8'',05
Ct. log. cos.1'' = 6.31443	Ct. log. sio.1'' = 5.31433	D = 4°,49',16''.
log. 1er terme = 3.37029	log. 2e terme = 0.35292	D' = 4°,10',08'',05

$$\text{tang } D' = \frac{\cos.Æ'(\sin.D - \sin.P.\sin.L)}{\cos.D.\cos.Æ - \sin.P.\cos.L.\cos.M}$$

(*Formule* 2, § 548.)

log. cos. Æ' = 9.99290	log. cos. Æ' = 9.99290	Le dénominateur est le même qoe pour taog. Æ'.
log. sin.D = 8 92521	log. sin.P = 8.19644	
log. 1er T. Nr = 8.91811	log. sin.L = 9.87555	
1er t. du nr = 0.828148	log. 2me Te Nr = 9.06489	Son log. = 9 98902.
2e t. oum. = 0.011611	2me Te du Nr = 0.0116114	
Numérateur = 0.839759		

log. Nr = 9,8525007 + Ct. log.Dr = 0,0109835 = log. tang.D' = 8,8634842

D' = 4°,10',36'',23

N° XI.

CALCUL DES PARALLAXES.

Parallaxe de longitude.

$$\alpha' = M - M' = \sin.P \frac{\cos.L(A) \sin.1''}{\sin.[M(A) - M(Z)] \cos.L(Z)} +$$

$$+ \sin.^2P \frac{\cos.^2L(Z)}{2.\cos.^2L(A)} + \frac{\sin.2[M(A) - M(Z)]}{\sin.1''}.$$

(*Formule* 40, § 548.)

On détermine les latitude et longitude de l'astre, L (A) et M (A), au moyen des formules 46 et 47, § 548, et celles du zénith, L (Z) et M (Z), par les formules 48 et 49, § 548.

(46) $\sin.L(A) = \cos\omega.\sin.D(A) - \sin\omega\cos.D(A)\sin.Æ(A)$

(47) $\tan g.M(A) = \frac{\tan g.D(A).\sin.\omega}{\cos.Æ(A)} + \cos.\omega\ \tan g.Æ(Z)$

(48) $\sin.L(Z) = \cos.\omega\ \sin.D(Z) - \sin.\omega\cos.D(Z)\sin.Æ(Z).$

(49) $\tan g.M(Z) = \frac{\tan g.D.(Z)\sin.\omega}{\cos.Æ(Z)} + \cos.\omega.\tan g.Æ(Z)$

(17) log. sin.ω	= 9.60222	(19) log. sin.ω	= 9.60022
log. tang D (A)	= 8.86349	log. tang.D (Z)	= 0.05570
Ct. log. cos.Æ (A)	= 0 00711	Ct. log. cos.Æ (Z)	= 0.18230
log. 1ᵉʳ terme	= 8.47082	log. 1ᵉʳ terme	= 9.83822
1ᵉʳ terme	= 0.02947	1ᵉʳ terme	= 0.68900
log. tang.Æ (A)	= 9.29830	log. tang.Æ (Z)	= 0.05948 —
log. cos.ω	= 9 96249	log. cos.ω	= 9.96249
log. 2ᵉ terme	= 9 26079	log. 2ᵉ terme	= 0.02167
2ᵉ terme	= 0.18230	2ᵉ terme	= 1.0519 —
+ 1ᵉʳ terme	= 0.02947	+ 1ᵉʳ terme	= 0.68900
+ 2ᵉ terme	= 0.18230	— 2ᵉ terme	= 1.0519
+ tang M (A)	= 0.21177	— tang.M (Z)	= 0.3629
log. tang M (A)	= 9.32586	log. tang.M (Z)	= 0 55979
M (A) = 11°,57',35''		— M (Z) = 19°,56',45''	

L'ascension droite du zénith, qui n'est autre chose que la longitude du lieu, est négative, puisque nous avons trouvé celle-ci = — 48°,51' 46''. C'est ce qui a changé le signe du deuxième terme de (19) qui contient la tangente de l'arc — M.

Suite du N° XI.

CALCUL DES PARALLAXES.

Parallaxe de longitude.

(46) log. cos.ω	= 9.96249	(48) log. cos.ω	= 9.96249
log. sin.D (A)	= 8.86230	log sin D (Z)	= 9.87555
log. 1ᵉʳ terme	= 8.82479	log 1ᵉʳ terme	= 9.83804
log. sin ω	= 9.60022	log. sin.ω	= 9 60022
log. cos.D (A)	= 9.99846	log. cos.D (Z)	= 9.99846
log. sin Æ (A)	= 9 23188	—log. sin.Æ (Z)	= 9.87720
log.2ᵉ terme	= 8.23056	—log. 2ᵉ terme	= 9 29728
1ᵉʳ terme	= 0.066802	1ᵉʳ terme	= 0.68872
2ᵉ terme	= 0 067696	2ᵉ terme	= 0.49828
sin.L (A)	= 0.000894	sin.L (Z)	= 0.88700
log. sin.L (A)	= 6,95434	log. sin.L (Z)	= 9.9479236
L (A) = 0°,3′,4″,5		L (Z) = 62°,29′,55″	

(40) log. sin.H	= 8.49644	2. log. sin.P	= 6 39288
log. cos.L (Z)	= 9.66443	2. log. cos.L (Z)	= 9.32886
Ct. log. cos.L (A)	= 0.00002	2. Ct. log cos.L (A)	= 0.00004
Ct. log. sin.1″	= 5.31442	log. sin.2 [M (A) — M (Z)]	= 9.69897
log.[M(A)sin. — M(Z)]	= 9.74013	Ct. log.1″	= 5.31442
log. 1ᵉʳ terme	= 2.88544	log. 2ᵉ terme	= 0.68001
1ᵉʳ terme	= 768″,14		
2ᵉ terme	= 4″,7864		

$\alpha' - 772'',9264 = 12'52'',93$

La longitude vraie du lieu	= — 48′,54″,36
Sa longitude apparente	= — 48°,44′,43″,07

Le 2ᵐᵉ terme de (48), négatif dans la formule, est devenu positif dans l'exemple ci-dessus, en raison du sinus de l'arc négatif Æ (Z). On a pris pour sinus et cosinus D (Z) ceux de la latitude du lieu de l'observation, parce que ces deux éléments sont une seule et même chose.

N° XII.

Détermination du temps par les distances zénithales absolues du soleil ou des étoiles.

Observation du soleil
faite au Dépôt de la guerre, le 11 décembre 1813. S 554

	TEMPS de la pendule.	ANGLES horaires δ p.	RÉDUCTIONS à l'époque moyenne.	OBSERVATIONS météorologiques et remarques.
1	10h,43′,56,33			Baromètre.... 0m7625
2				Thermomètre barométr.
3				Therm. libre + 3° ½ (R)
4				
5				Arc parcouru = 73°,29′,35″,70
6				
7				
8				
9				Époque moyenne des observations=22h,43′,56″,33
10				
Somme des réductions				

Distance zénithale observée	= 73°,29′,35″,70
Réfraction vraie — parallaxe	=+ 3′,11″,63
Distance zénithale vraie	= 73°,32′,47″,33
Distance polaire apparente ou (90 + D)	= 113°, 0′,42″,75
Colatitude du lieu de l'observation	= 41°,08′,20
	S = 227°,41′,50″,08

½ S = 113°,50′,55″,04	½ S = 113°,50′,55″,04
(1) 90 + D = 113°, 0′,42″,75	(2) 90 — L = 41°, 8′,20″
½ S + (1) = 0°,50′ 12″,29	½ S — (2) = 72°,42′,35″,04

Suite du N° XII.

Détermination du temps par les distances zénithales absolues du soleil et des étoiles.

Réfraction moyenne	194″,5
Facteur barom. 1,004 / Facteur thermom. 1,022	1″,026
Réfraction vraie	+3′,19″,60
Parallaxe	— 8″,27
Correction	+3′,11″,63
10 décembre midi, D=23°,55′,47″	
Correction p. 22h ¾ =	1′,55″,75
11 déc. à 10 h. ¾, D=23°,00′,12″,75	
Distance polaire	=66°,59′,47″,25
Latitude L	48°,51′,40″
Colatitude	41°,08′,20″

(*) On peut encore obtenir le temps moyen de l'observation compté de midi, ainsi :

Temps vrai	= 22h,50m,11s
Éq. du T=6m,57s,8 / Correct. = 26s,3	6m,31s,5
Temps moy. de l'obs.	=22h,43m,39s,5

log. sin. [$\frac{1}{2}$ S + (1)]	=	8.1644136
log. sin. [$\frac{1}{2}$ S — (2)]	=	9.9799167
Ct. log. sin. (1)	=	0.0360145
Ct. log sin. (2)	=	0.1818490
2 log. sin. $\frac{1}{2}p$	=	18.3624908
log sin. $\frac{1}{2}p$	=	9.1840954
$\frac{1}{2}p$	=	8°,43′,39″,6
p	=	17°,27′,19″,2
En temps p	=	1h,9m,49
Angle horaire P	=	22h,50m,11s
Æ appar. de l'astre	=	6h,47m,33s,3
Temps sid. observ.	=	16h,02m,37s,7
Temps sid. à midi moy.	=	17h,21m,49s,45
Temps moy. approch.	=	22h,40m,48s,25
Table VIII correction.	=	2m,51s,25

Temps moyen de l'observation compté de midi (*)	=22h,43m,39s,5
Temps de la pendule, ou époque moyenne	=22h,43m,56s,33
État de la pendule par rapport au temps moyen	=— 16″83
État de la pendule par rapport au temps sidéral	=+5h,18m,41s,4

Détermination de la latitude par les distances méridiennes du soleil.

OBSERVATIONS DU SOLEIL
(12 décembre 1843),
FAITES AU DÉPÔT DE LA GUERRE. (Long. occid. en temps, 4''.)

	TEMPS de la pendule.	ANGLES horaires.	RÉDUCTIONS au méridien.	REMARQUES.
1	11h,49',12''	5',03''	50'',1	Baromètre = 0m,76185
2	50 ,20	3 ,55	30 ,1	Thermomètre = + 2°. (R),
3	51 ,38	2 ,37	13 ,4	§ 557.
4	52 ,58	1 ,17	3 ,2	Arc parcouru = 1438g,833
5	54 ,32	— 0 ,17	0 ,2	—
6	55 ,48	— 1 ,43	5 ,8	
7	57 ,20	— 3 ,05	18 ,7	Distance zénithale moyenne
8	58 ,32	— 4 ,17	36, 0	= 79g,9352
9	59 ,46	— 5 ,31	59 ,8	ou 71°,56',30'',05
10	12, 1 , 7	— 6 ,52	92 ,6	—
11	3 , 4	— 8 ,49	152 ,6	Hauteur apparente du ☉
12	3 ,56	— 9 ,44	184 ,1	= 18°,3',29'',95.
13	6 ,25	— 12 ,10	290 ,6	
14	8 ,16	— 14 ,01	385 ,6	—
15	10 ,11	— 15 ,56	498 ,2	Angle horaire moyen
16	11 ,33	— 17 ,18	587 ,6	= — 6',57'',39
17	12 ,46	— 18 ,31	673 ,2	
18	14 , 9	— 19 ,54	776 ,6	
		125',13''	3859'',4 = Σ	

Si ρ (qui doit être exprimé en secondes) désigne une avance, il faut le faire négatif.

Lorsqu'on observe un passage supérieur, la réduction au méridien est toujours négative; c'est le contraire pour un passage inférieur (cette observation ne se rapporte évidemment qu'à l'observation d'une étoile).

Suite du N° XIII.

Détermination de la latitude par les distances méridiennes du soleil.

Temps moyen le 12	$11^h,53',57'',7$
Avance de la pendule	$17''$
Temps du passage à la pendule	$11^h,54',14'',7$
Avance de la pendule	$\rho =$ $17''$
$\dfrac{\rho}{86400-\rho}=\dfrac{-17}{86417}$	$=\rho' = -$ 0,0004967
	$1+2\rho' =$ 0,9996066
Latitude approchée du lieu d'observation	$= 48°,51',40''$
Déclinaison australe le 12	$= 23°, 5',44''$
Variation en D pour $6',57'',39$	$-$ $1'',26$
Différence entre L et $-$ D ou D + L	$71°,57',22'',74$
Distance zénithale observée	$71°,56',30'',058$
Réfraction	$+$ $3', 2'',685$
Parallaxe	$-$ $8'',220$
Distance zénithale vraie	$71°,59',24'',543$
log. $(1+2\rho')$	9,99983
log. Σ	3,58632
Ct. log. 18	8,74473
log. cos.L	9,81815
log. cos.D	9,96371
Ct. log. sin.(D + L)	0,02190
log. x	$=$ 2,13484
x ou réduction au méridien	$= -$ $0°, 2',16'', 41$
Distance zénithale vraie	$=$ $71°,59',24'',513$
Distance zénithale méridienne	$71°,57',08'',403$
Déclinaison apparente du soleil	$23°, 5',42'', 74$
Latitude cherchée	$=$ $48°,51',25'',363$
Le 13 décembre, par des opérations analogues	$48°,51',29'', 40$
Le 14 id. id.	$48°,51',32'', 47$
La moyenne des trois donne	L $=$ $48°,51',28'',878$

N° XIV.

Détermination de la latitude, par la polaire observée hors du méridien.

Distance zénithale de la polaire observée à le § 559

$$L = 90° - \delta - d.\cos P + \tfrac{1}{2} d^2.\sin.1''.\text{cotang}.\delta + \tfrac{1}{3} d^3 \sin.^2 P \cos.P.\sin.^2 1''.$$

	Temps de la pendule.	Angles horaires.	Réduction à l'époque moyenne.	OBSERVATIONS météréologiques et commencement du calcul.
1				Baromètre =
2				Thermomètre (bar°) =
3				Thermomètre libre =
4				
5				Arc parcouru =
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
Sommes des réductions, Σ =				

Si ρ (qui doit être exprimé en secondes) désigne une avance, il faut le faire négatif.

L'époque moyenne est égale à la somme des temps de la pendule, divisée par le nombre des observations.

Les angles horaires sont les différences entre l'époque moyenne et chacun des temps de la pendule, différences que l'on prend, sans avoir égard à leurs signes.

Les réductions à l'époque moyenne peuvent être prises dans la table X de l'*Astronomie pratique* de Francœur.

Suite du N° XIV.

Détermination de la latitude par la polaire observée hors du méridien.

		h. m. s.
Époque moyenne en temps de la pendule,	=	
Correction de la pendule,	=	
Heure du milieu de l'observation en temps sid.	T =	
Ascension droite apparente de l'astre	Æ =	
Angle horaire (T — Æ ou Æ — T) en temps,	=	
Angle horaire en degrés,	P =	
Distance polaire apparente de l'astre,	d =	

Retard diurne de la pendule sur le temps sidéral ρ =

$$\frac{\rho}{86400-\rho} = \ldots \rho'$$

$$1 + 2\rho' =$$

Distance zénithale observée,	=	
Réfraction,	=	
Distance zénithale vraie,	=	

Log. $(-d)$	=		Log. $\frac{1}{2}$ sin ^{2} 1″	= 8,89403
Log. sin. P	=		Log. 1er terme	=
			2. log. d sin. P	=
Log. 1er terme	=			
			Log. 3e terme	=
Log. d	=			
Log. sin. P	=		1er terme	=
			2e terme	= +
Log. d sin. P	=		3e terme	=
Log. d. sin P	=			
Log $\frac{1}{2}$ sin 1″	=		Somme	=
Log. cotang. δ	=		90 — δ	=
Log. 2e terme	=		Latitude	=

Nous n'avons pas cru devoir agir ici comme dans la formule précédente, relativement à P, parce que la déclinaison de l'étoile est constante, pour le très-petit intervalle de temps qui s'écoule de la première observation à la dernière.

N° XV.

AZIMUT DÉDUIT DES OBSERVATIONS DU SOLEIL.

Azimut de la flèche de l'Abbaye, calculé au moyen d'une observation du soleil, faite au Dépôt de la guerre, le 11 *décembre* 1813, *après-midi.*

TEMPS DE LA PENDULE.	
1	3h,21m,10s,
2	24 ,23 ,
3	25 , 4 ,5
4	25 ,43 ,
5	26 ,22 ,5
6	27 ,11 ,

Arc parcouru
= 666s,64.

—

Angle observé
= 111g,107 ou
— 99°,59',45",5.

—

Latitude du lieu
= 48°,51',28".

—

Longitude (O)
= 4".

—

Baromètre = 0m,7662.
Thermomètre (R) = 2°,8
ou 3s,36.

—

L'astre est à l'ouest de la flèche.

Époque moyenne	=	3h,25m,21s,33
Avance de la pendule	=	17s,13
Temps moyen de l'observ.	=	3h,25m, 4s,20
Équation du temps	=	6m,26s,33
Temps vraie de l'observation	=	3h,31m,30s,53
Angle horaire { en temps		
Angle horaire { en degrés, P	=	52°,52',36",63

D. ⊙, à midi	=	23°, 0',59"
Correction	=	41",86
D. ⊙ lors de l'observation	=	23°, 1',40",86
Comp. D. ⊙	=	113°, 1',40",86
(Parce que la déclinaison est australe.)		
Colatitude	=	41°, 8',32"
Ct. D — Ct. L	=	71°,53', 8",86
Ct. D + Ct. L	=	154°,10',12",86

$\frac{1}{2}$ (Ct. D — Ct. L) = 35°,56',34",43 (1)

$\frac{1}{2}$ (Ct. D + Ct. L) = 77°, 5', 6",43 (2)

$\frac{1}{2}$ P = 26°,26',18",22

Suite du N° XV.

AZIMUT, PAR LES OBSERVATIONS DU SOLEIL (Suite).

log. cot. ½ P	= 0.3034344	log. cot. ½	= 0.3034344
log. cos. ½ (1)	= 9.9082719	log. sin. ½ (1)	= 9.7686223
C log. cos. ½ (2)	= 0.6506161	Ct. log. sin. ½ (2)	= 0.0114276
log. tang. ½ (Z + S)	= 0.8623224	log. tang. ½ (Z − S)	= 0.0834840
½ (Z + S)	= 82°,10′,55″,34	½ (Z − S)	= 50°,27′,14″,40

Supplément de l'azimut = Z =	132°,38′, 9″,44
Azimut occ. compté du Sud =	47°,21′,50″,56

log. cos. D′	= 9.96394	Réfrac. moy. pour 3°,53.10 = 12′,18″,7	
log. sin. P	= 9.90164	Produit des fact. Bque et Tque = 1,033	
log. sin. Z	= 0.13342	Réfraction vraie	763″,08
		ou	12′,43″,08
log. sin. Δ	= 9.99900		
Δ ⊙	= 86°, 6′,50″	Δ	= 86°, 6′,50″
H vrai ⊙	= 3°,53′,10″	Réfraction vraie −	12′,43″,08
		Parallaxe = +	8″,59
Δ′	= 85°,44′,15″,51		
δ′	= 87°,45′,48″,50	Δ′ apparent	= 85°,44′,15″,51
K	= 99°,59′,45″,60		
2 S	= 273°,29′,49″,71	log. sin S	= 9.83582
S	= 136°,44′,54″,85	log. sin. (S − K)	= 9.77696
S − K	= 36°,45′, 9″,25	Ct. log. δ′	= 0.00033
		Ct. log. Δ′	= 0.00121
α	= 100°,12′	2 log cos ½ α	= 19.60432
360 − α	= 259°,48′	log. cos. ½ α	= 9.80716
Azimut ⊙	= 47°,21′,50″,56		
Azimut cherché = 307°, 9′,50″,56		½ α	= 50°, 6′,00″
		α	= 100°,12′,00″

N° XVI.

Détermination de la longitude, par la distance du soleil à la lune.

Observation faite, le 24 juin 1854, à 7h,45m,00s temps civil moyen.
ou le 23 juin , à 19h,45m,00s temps astronomique moyen.

Distance angulaire apparente des bords voisins 59°,45′,12″
Hauteur apparente du bord inférieur ☉ = 50°,15′,25″
Demi-diamètre apparent ☉ = + 0°,15′,45″,60

Hauteur apparente du centre ☉ = 50°,31′,10″,60 = h'

Hauteur apparente du bord supérieur ☾ = 36°,25′,10″
Longitude occidentale approchée 70°
Heure correspondante approchée de Paris 24 h. ou 0 h. le 24 juin.
Demi-diamètre apparent horizontal ☾ à cette époque 15′,10″,5
. . . . de hauteur $= \frac{15',10'',5}{\cos.36°,25}$ 18′,56″,8
Hauteur apparente du centre ☾ = 36°,25′,10″ — 18′,56″,8 = 36°,6′,13″,2 = h

Distance angulaire apparente des centres de ☉ et ☾
D′ = 59°,45′,12″ + 0°,15′,45″,60 + 18′,56″,8 = 60°,19′,54″,4

Baromètre 0m,741 Thermomètre centigrade + 9.25
Réfraction ☉, r' = 47″,05 Réfraction ☾ = 1′,18″,08
Parallaxe de hauteur ☉ p' = 5″,63
Parallaxe horizontale ☾ . . . 55′,56″,2
Parallaxe de hauteur ☾ p = 55′,56″,2 × cos.h = 44′,58″,57.

Hauteur vraie ☉ . H′ = h' + p' − r' = 50°,30′,29″,21
. . . . ☾ H = h + p − r = 36°,49′,59″,69

h = 36°, 6′,13″,8 H + H′ = 87°,20′,23″,90
h' = 50°,31′,10″,6 $\frac{H + H'}{2}$ = 43°,40′,11″,95
D′ = 60°,19′,54″,4

$h + h'$ + D′ = 146°,57′,18″,2 $\frac{h + h' + D'}{2}$ = 73°,28′,39″, 1

$h + h'$ − D′ = 26°,17′,29″,4 $\frac{h + h' - D'}{2}$ = 13°, 8′,44″, 7

Suite du N° XVI.

Détermination de la longitude par la distance du soleil à la lune.

$$\sin.^2\varphi = \frac{\cos.H.\ \cos.H'}{\cos.h.\ \cos.h'} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(h+h'+D')\ \cos.\frac{1}{2}(h+h'-D')}{\cos.^2\frac{1}{2}(H+H')}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}D = \cos.\tfrac{1}{2}(H+H')\ \cos.\varphi$$

$\log.\cos.H = \log.\cos.\ 36°,49',53'',69 = +\ 9,9033235$

$\log.\cos.H' = \log.\cos.\ 50°,20',29'',21 = +\ 9,8034359$

$\log.\cos.h = \log.\cos.\ 36°,\ 6',43'',20 = -\ 9,9073857$

$\log.\cos h' = \log.\cos.\ 56°,31',40'',60 = -\ 9,8033302$

$+\ \bar{1},9960435$

$\log.\cos.\frac{1}{2}(h+h'+D') = \log.\cos.\ 73°,28',39'',10 = +\ 9,4539463$

$\log.\cos.\frac{1}{2}(h+h'-D') = \log.\cos.\ 13°,\ 8',44'',70 = +\ 9,9884674$

$2\log.\cos.\frac{1}{2}(H+H') = 2\log.\cos.\ 43°,40',14'',93 = -\ 19,7186714$

$2\log.\sin.\varphi \ldots\ldots = \bar{1},7197558$

$\log.\sin.\varphi \ldots\ldots = 9,8598779$

$\varphi \ldots\ldots = 46°,24',12'',50$

$\log.\cos.\frac{1}{2}(H+H) = 9,8593357$

$\log.\cos.\varphi = +9,8385820$

$\log.\sin.\frac{1}{2}D = 9,6979477$

$\frac{1}{2}D = 29°,55',12'',10$

$D = 59°,50',24'',20$

A Paris, la distance angulaire est à 21 h. . . . . 60°,58',00''

— à 24 h. . . . . 59°,31',30''

Différence pour 3 h. ou 10800ˢ . . . . 1°,26',30''

L'observation de la distance angulaire vraie D = 59°,50',24'',20 répond à

$$\text{à une heure de Paris} = 21^h + \frac{(60°,58',00 - 59°,50',24'',2)\ .\ 10800^s}{1°,26',30''}$$

$$= 21^h + \frac{10800^s.\ 4055,8}{5190} = 21^h + x^s$$

$\log.10800 = 4,0334238$

$\log.4055,8 = +3,6080765$

$\log.5190 = -3,7151674$

$\log.x = 3,9263329$

$x = 8439^s,81$

$= 2^h,20^m,39^s,8$

Heure de Paris $= 2^h,20^m,39^s,8$

$+\ 21^h$

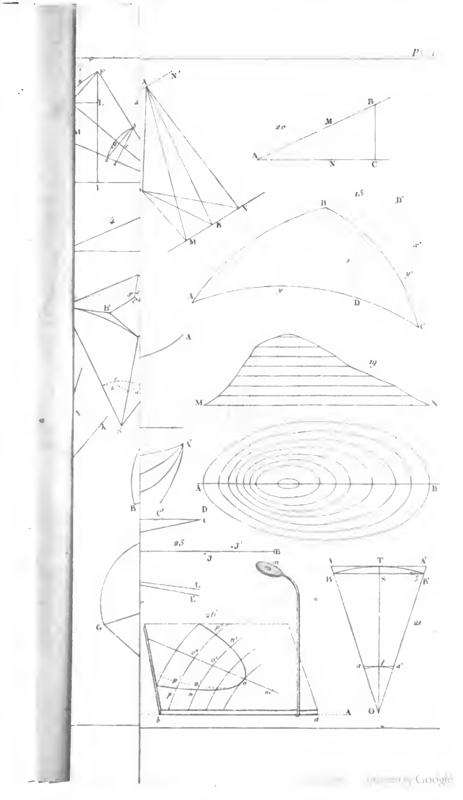
$= 23^h,20^m,39^s,8$

Heure du lieu $= 19^h,15^m,00^s$

Différence de temps $= 4^h,\ 5^m,39^s,8$

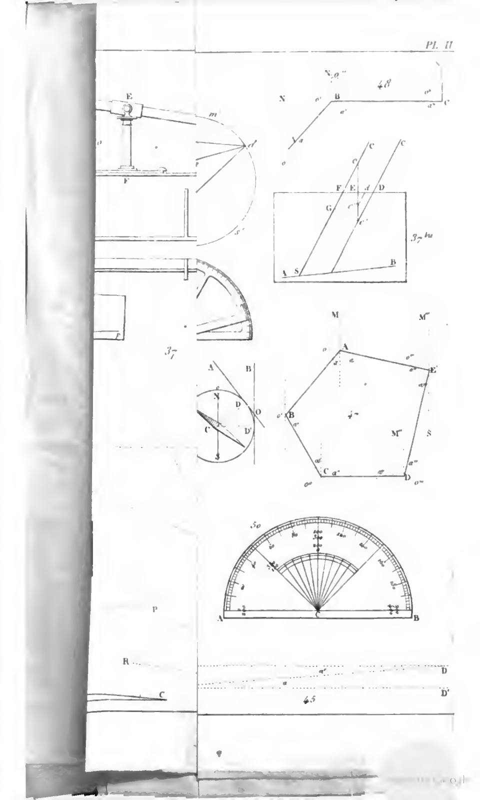
Longitude occidentale du lieu de l'observation =

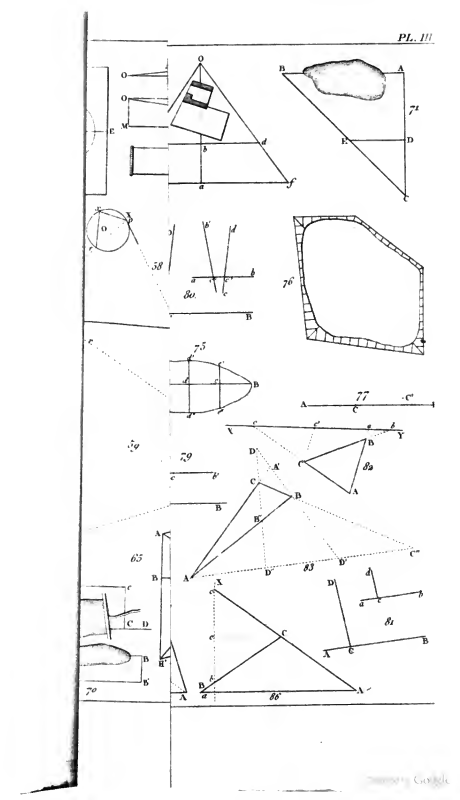
$= 4°,5',39'',80 \times 15 = 61°,24',57''.$

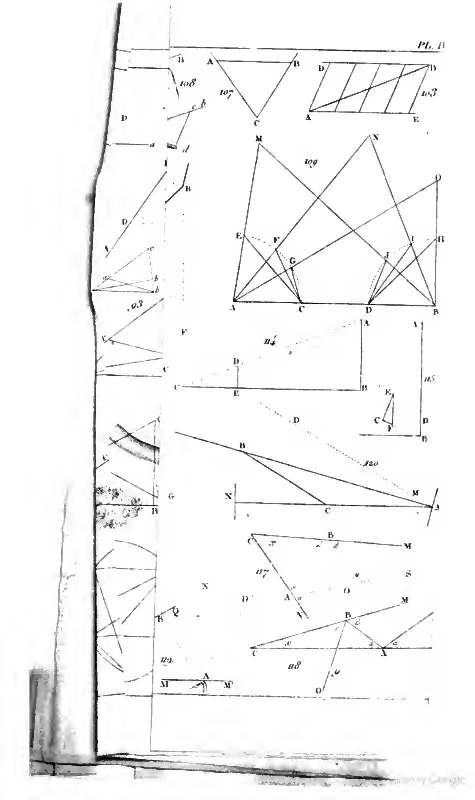


20
15
19
21
25
26'

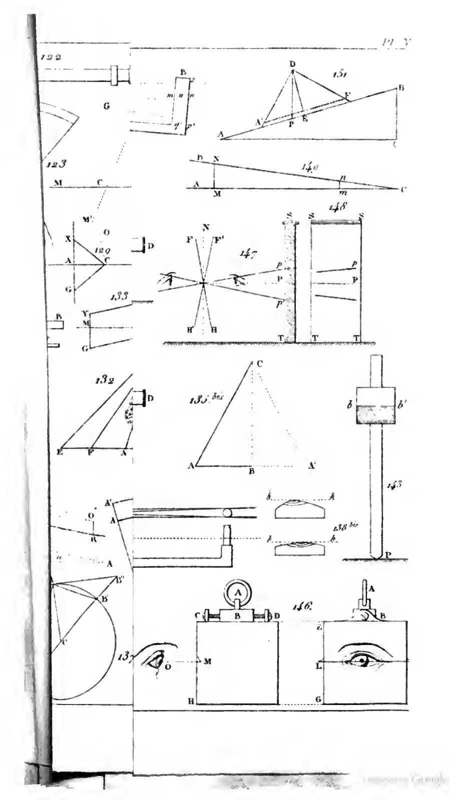



48
N
B
C
E
F
37 bis
A
S
D
G
37
O
M
M'
50
45
P
R
D'

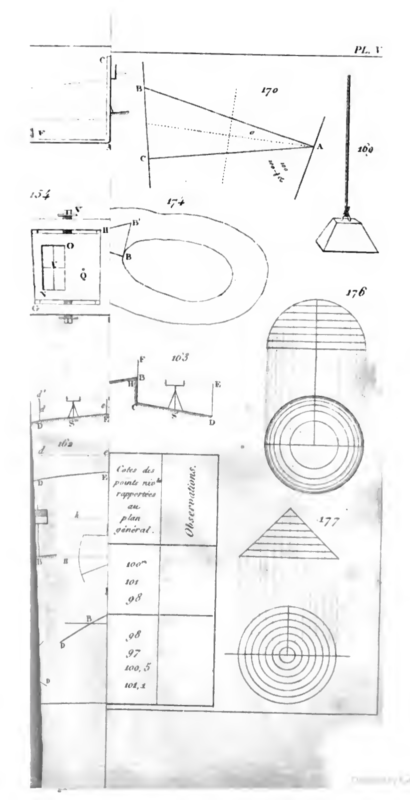



PL. II
107
108
109
114
115
117
118
119
120

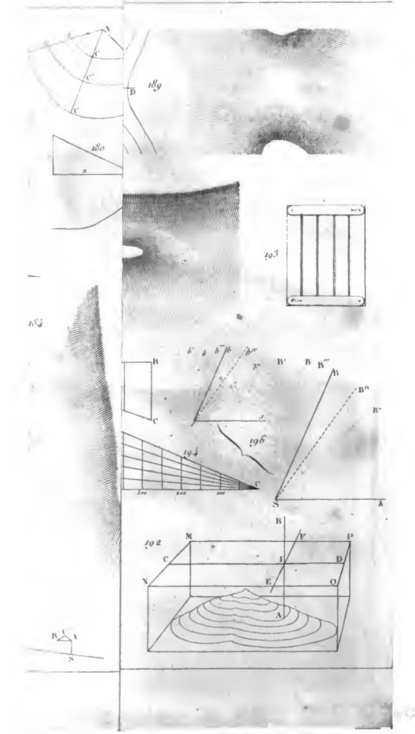



122
123
129
133
132
151
140
148
147
135 bis
143
138 bis
146
137

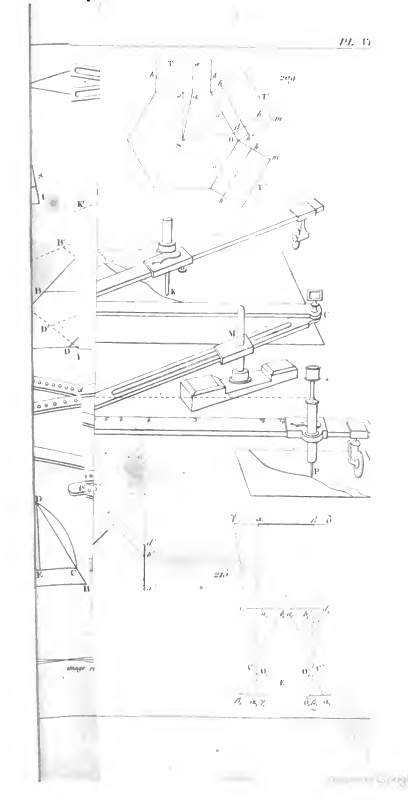




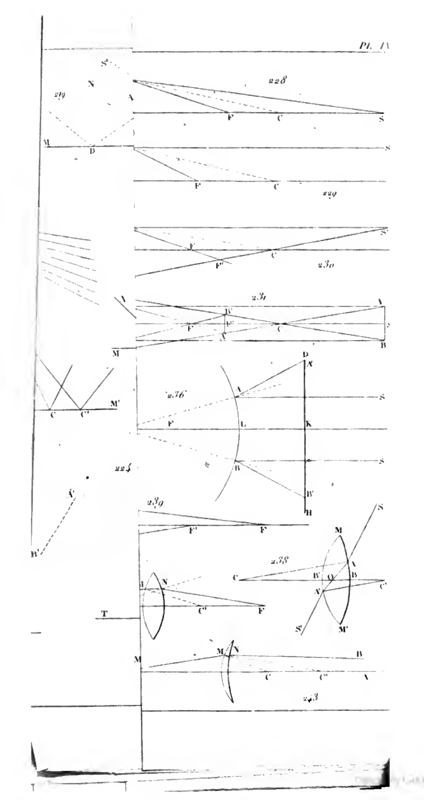
Cotes des points nivés rapportées au plan général.	Observations.
100m 101 98	
98 97 100, 5 101, 2	


189
D
180
193
184
196
194
192
B
C
M
P
F
N
E
O
A
S

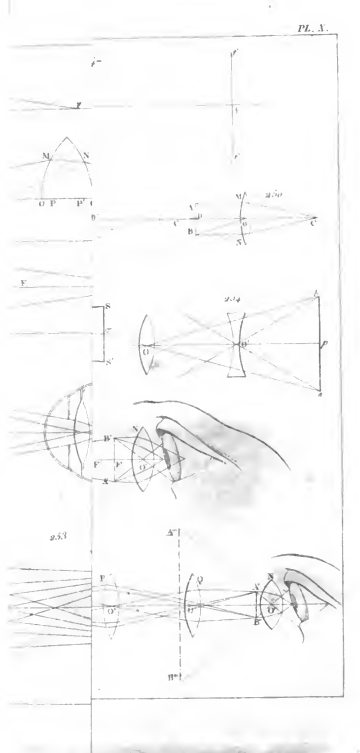


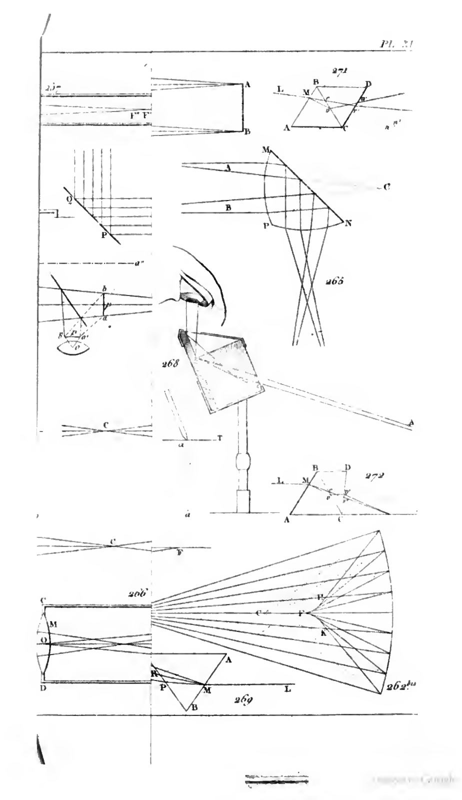




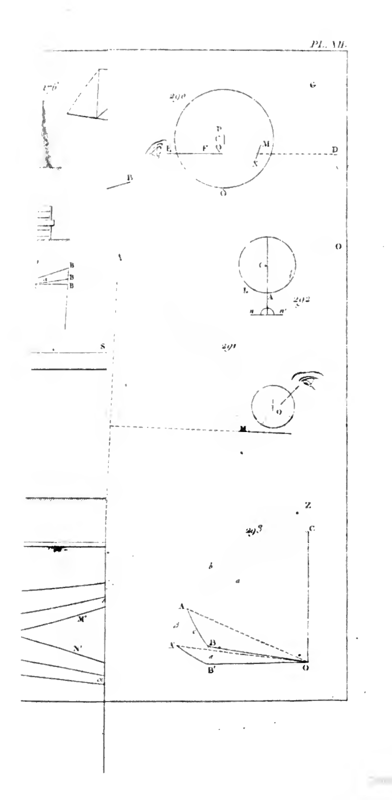


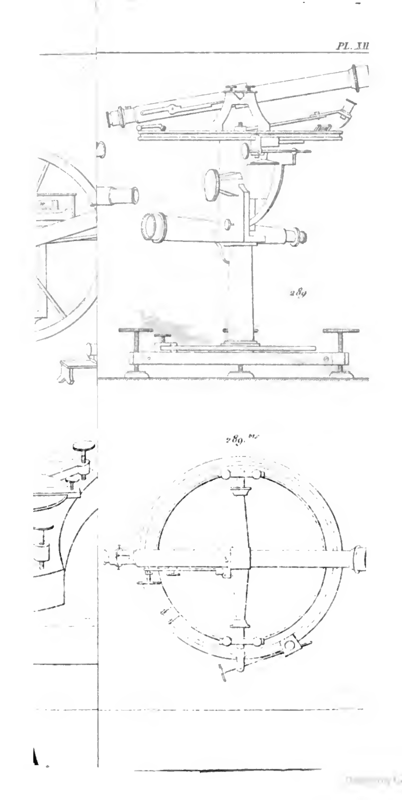
Pl. IV
228
229
230
231
236
224
239
238
243


250
254
253

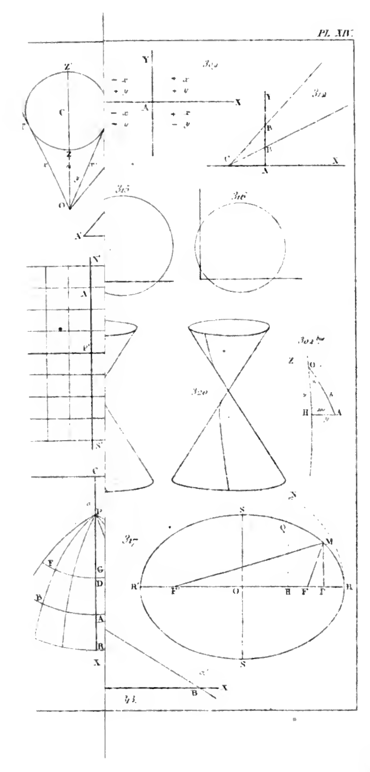

271
B
D
L
M
A
C
M
A
C
B
N
P
265
Q
P
268
A
T
272
B
D
L
M
A
C
C
F
266
C
M
O
D
F
H
K
A
R
P
M
L
B
269
262bis




290
G
P
E
F
Q
M
D
O
O
C
A
202
291
O
M
Z
C
293
b
a
A
c
B
A'
B'
O
M'
N'


289
289. bis




Y
X
A
X
A
C
Z
C
Z
O
O
H
A
S
S
M
R'
F'
O
F
R
D
A
B
X

356

A

E

O'

O

d

356

P

B

355

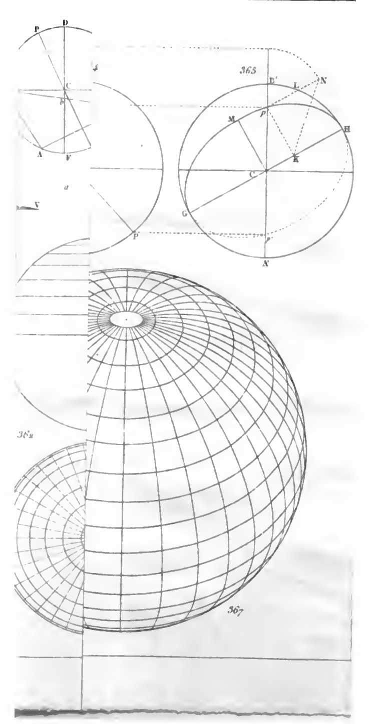
O

P

B'

V

P'


P
D
C
A
F
a
365
B'
L
N
p
M
H
K
C
G
P
A'
36z
367

376

386

387

385

391

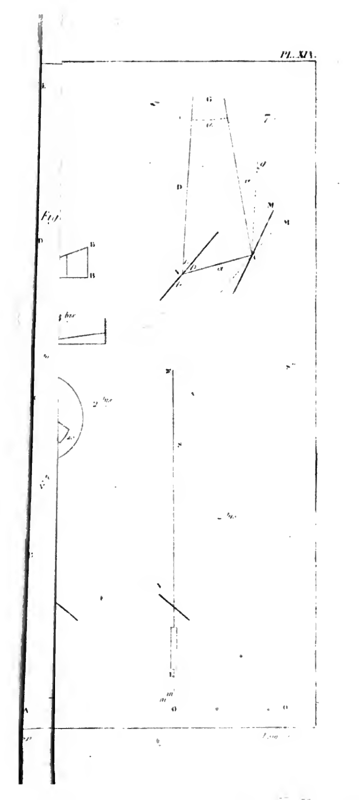
390

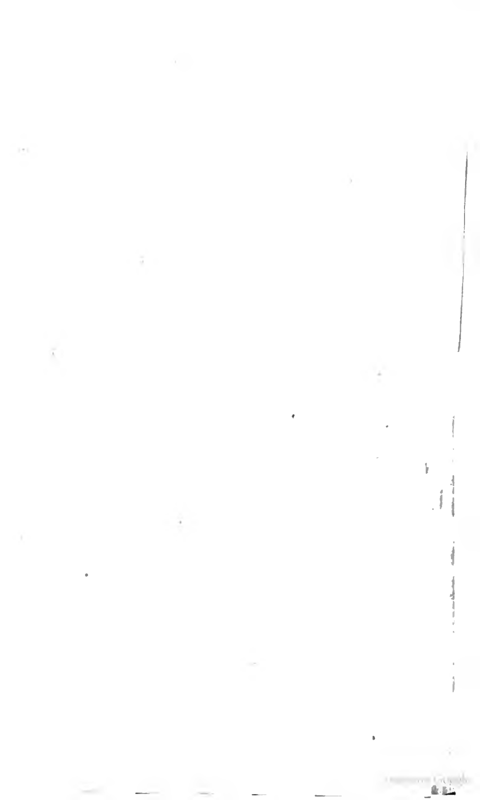
389

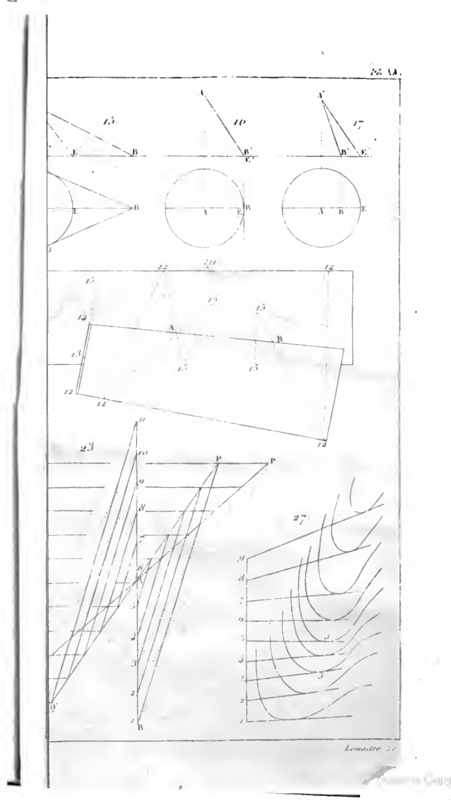
393

392

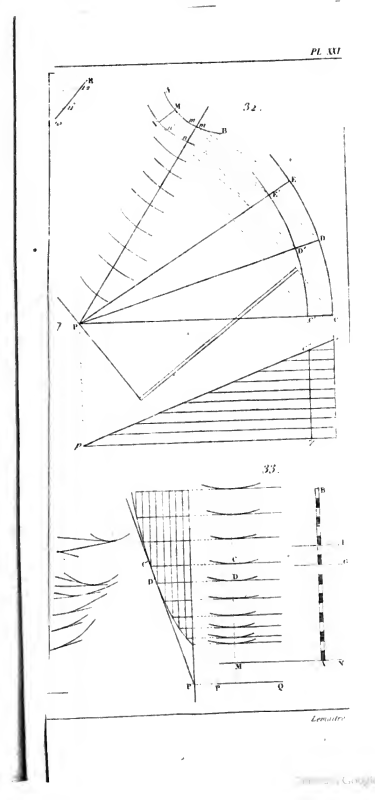
379

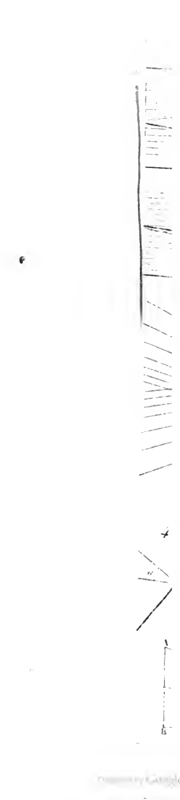

Pl. XIV.

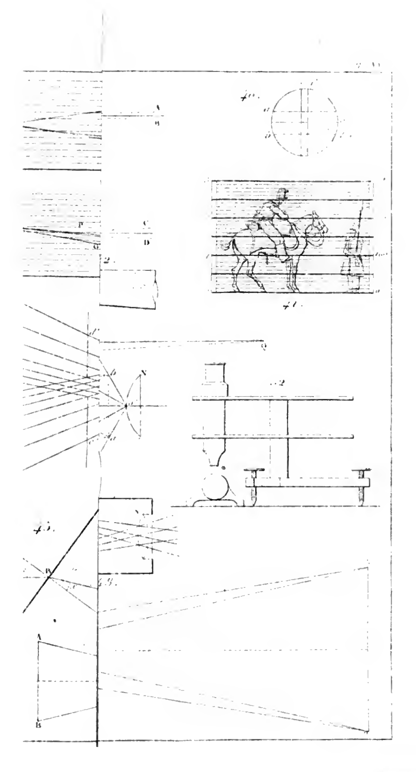


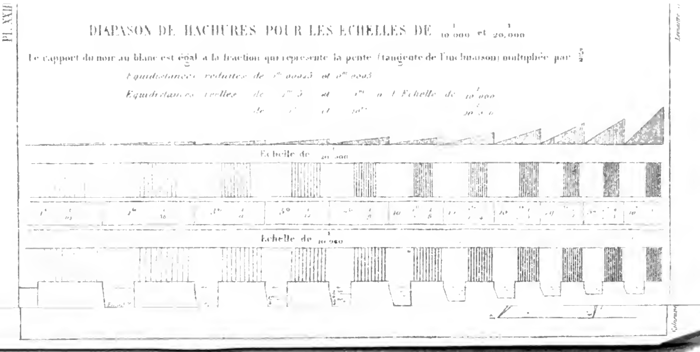


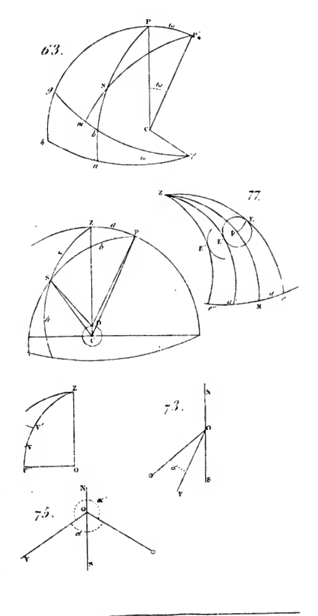
16
17
A
B
E
23
P
Q'
27
Lemaitre sc.


32.
A
M
m
m
n
n
B
E
E'
D
D'
C'
C
7
P
p
33.
B
C
D
M
N
P
Q
Lemaitre






DIAPASON DE HACHURES POUR LES ECHELLES DE 1/10,000 et 1/20,000
Le rapport du noir au blanc est égal à la fraction qui représente la pente (tangente de l'inclinaison) multipliée par 2/3
Equidistances réduites de 0m 00025 et 0m 0005
Echelle de 1/20,000
Echelle de 1/10,000


63.
P
ω
P'
g
S
ω
m
C
h
b
n
ω
q
77.
Z
E
P
E'
E''
Z
a
P
A
b
S
h
O
C
e''
a'
M
a
e
Z
V'
V
F
O
73.
N
O
α
S
V
N
O
α'
75.
α
V
S

Lemaître


Google



